

第3回 線形代数学レポート課題解答例

提示：2007/5/16(水) 提出：2007/5/23(水)

1. 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x + y + 2z + u = -1 \\ x + y + 3z + 2u = 2 \\ 2x - 2y + 2z - u = -1 \\ -x + y + u = 1 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{1}{2} \times (2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(3) \leftrightarrow (4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{-1 \times (4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{4列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

以上より、与式は次と等価。

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -2 \\ u = 5 \end{cases}$$

したがって、解は次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)+(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -12 & -13 & -8 \\ 0 & 2 & -17 & -19 & -12 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{-1 \times (2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -12 & -13 & -8 \\ 0 & 2 & -17 & -19 & -12 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)-(4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -2 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{-1 \times (3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

以上より、

係数行列の rank は 3 で、拡大係数行列の rank は 4 と異なる。

したがって、解なし（不能）。元の連立方程式で考えると矛盾が生じている。

$$(3) \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{(3) \leftrightarrow (4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & -7 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{-\frac{1}{2} \times (3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{\frac{1}{3} \times (3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{4列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

以上より、与式は次と等価。

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 6 \\ & x_2 & & = & -3 \\ & & x_3 & = & 0 \\ & & & x_4 & = & -1 \end{cases}$$

したがって、解 $\mathbf{x} = {}^t[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$ は次のように表せる。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & & +4x_5 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & +3x_5 & = & 2 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -20 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -2 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

以上より、与式は次と等価。

$$\begin{cases} x_1 & & -9x_4 & 0 & = & 3 \\ & x_2 & & -20x_4 & -3x_5 & = & 5 \\ & & x_3 & -13x_4 & -2x_5 & = & 3 \end{cases}$$

未知数の数が5で、拡大係数行列の **rank** が3であるので、

自由度は $5 - 3 = 2$

よって、2つの任意定数 k_1, k_2 を用いて解が表現できる。今、 $x_4 \equiv k_1, x_5 \equiv k_2$ とし、上の

方程式から次の解が得られる。

$$\begin{cases} x_1 &= 9k_1 + 3 \\ x_2 &= 20k_1 + 3k_2 + 5 \\ x_3 &= 13k_1 + 2k_2 + 3 \\ x_4 &= k_1 \\ x_5 &= k_2 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \text{は任意定数})$$