

第2回 線形代数学レポート解答例

提示：2007/5/2(水) 提出：2007/5/16(水)

1. 次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

転置行列

$${}^t \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

対称行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

交代行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

転置行列

$${}^t \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

対称行列

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

交代行列

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ -\frac{5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)+1 \times (1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)+3 \times (1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{(1)-2 \times (2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)-8 \times (2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-1 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 & -1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{(1)+2 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 14 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 & -1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 14 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

実際、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 14 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+2-10 & 14+2-16 & -2+0+2 \\ -9-1+10 & -14-1+16 & 2+0-2 \\ -27+2+25 & -42+2+40 & 6+0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{(1,1)\text{成分による} \\ 1\text{列目の掃き出し}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3} \times (2)} \\
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{(2,2)\text{成分による} \\ 2\text{列目の掃き出し}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{3 \times (3)} \\
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{(3,3)\text{成分による} \\ 2\text{列目の掃き出し}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 5 & 3 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\therefore \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

実際、

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 7-6+0 & 4-4+0 & 2-2+0 \\ 7+3-10 & 4+2-5 & 2+1-3 \\ -35+15+20 & -20+10+10 & -10+5+6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$(3) \quad \left[\begin{array}{ccc} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)+1 \times (2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{1\text{列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow{(2)+1 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2\text{列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow{(2)-1 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

実際、

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-8+6 & 9-24+15 & 6-12+6 \\ -2+4-2 & -6+12-5 & -4+6-2 \\ 2-2+0 & 6-6+0 & 4-3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(裏へ続く)

3. 次の行列を行基本変形によって階段行列にし、階数を求めよ。

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3} \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{(3)-2 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

よって、2 段の階段行列に変形されるので、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{(1) \leftrightarrow (3)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2) - 1 \times (1)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(3) + 1 \times (1)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、段数 3 の階段行列に変形できるので、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 3$$

注意：(1, 1) 成分が 0 のときには、行の交換を用いて、0 以外にする。

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 \end{bmatrix} \\
 \xrightarrow{\text{2列目の下部分の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

よって、段数 2 の階段行列に変形できるので、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = 2$$