

第1回 線形代数学レポート解答例

1.以下の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{F}$ に対して問いに答えよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。(ただし、 $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ といった同じ行列同士の和も含む。)

注意点：型が一致していないといけない。組み合わせは系統だてて列挙する。

$$\mathbf{A} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。(ただし、 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ といった同じ行列同士の積も含む。)

注意点：左の行列の列数と、右の行列の行数が等しくなければならない。

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 2-3 & 4+0 \\ 0-1 & 0+3 & 0+0 \\ -2+2 & -1-6 & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 0-1 \\ 0-1 & 0+1 \\ -2+2 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AF} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+3 & -4+1 \\ 0-3 & 0-1 \\ 0+6 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0-2 & 2-1+4 \\ 4+0+0 & 1+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BD} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+5+4 & 2+0+2 & 0+2+6 \\ -1-15+0 & 1+0+0 & 0-6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \\ -16 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BE} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2+0 & -2+0+2 \\ 0-6+0 & -1+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 2+0 & 4+0 \\ 2-1 & 1+3 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 0+0 \\ 2-1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CF} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & -4+0 \\ 0-3 & -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0+0 & -1-1+0 \\ 10+0-2 & 5+0+4 \\ 4+0-3 & 2-1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 8 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DD} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5+0 & -1+0+0 & 0+2+0 \\ -5+0+4 & 5+0+2 & 0+0+4 \\ -2+5+6 & 2+0+3 & 0+2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DE} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2+0 & 1+0+0 \\ 0+0+0 & -5+0+2 \\ 0+2+0 & -2+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{EB} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & 0+3 & 0+0 \\ 4+0 & 2+0 & 4+0 \\ 0+1 & 0-3 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{EC} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & 0+1 \\ 4+0 & 0+0 \\ 0+1 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{EF} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-3 & 0-1 \\ 0+0 & -4+0 \\ 0+3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{FB} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 & 0+6 & 0+0 \\ 6+1 & 3-3 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{FC} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 & 0+2 \\ 6+1 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{FF} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-6 & 0-2 \\ 0+3 & -6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

(3) $\mathbf{A}(\mathbf{C} + \mathbf{BE}) - (\mathbf{AB} + \mathbf{D})\mathbf{E} + \mathbf{D}(\mathbf{E} + \mathbf{AC})$ を求めよ。

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(\mathbf{C} + \mathbf{BE}) - (\mathbf{AB} + \mathbf{D})\mathbf{E} + \mathbf{D}(\mathbf{E} + \mathbf{AC}) \\ &= \mathbf{AC} + \mathbf{ABE} - \mathbf{ABE} - \mathbf{DE} + \mathbf{DE} + \mathbf{DAC} \\ &= \mathbf{AC} + \mathbf{DAC} \\ &= (\mathbf{I}_3 + \mathbf{D})\mathbf{AC} \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、 $\mathbf{I}_3$ は 3 次の単位行列。よって、

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 24 & -8 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(4) ${}^t \left({}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{A} + \mathbf{B} \right) {}^t \mathbf{C} \right) + {}^t \mathbf{E} \right)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 & {}^t \left({}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{A} + \mathbf{B} \right) {}^t \mathbf{C} \right) + {}^t \mathbf{E} \right) \\
 &= {}^t \left({}^t \mathbf{A} + \mathbf{B} \right) {}^t \mathbf{C} + \mathbf{E} \\
 &= \left(\mathbf{A} + {}^t \mathbf{B} \right) {}^t \mathbf{C} + \mathbf{E} \\
 &= \mathbf{A} {}^t \mathbf{C} + {}^t \mathbf{B} {}^t \mathbf{C} + \mathbf{E} \\
 &= \mathbf{A} {}^t \mathbf{C} + {}^t (\mathbf{CB}) + \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

と計算できる。

よって、

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} {}^t \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) + {}^t \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2. 次の性質を満たす 3×3 の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を見つけよ。(無数に存在するので、1 組ずつ示せば良い。)

(解答は略)

(1) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

(2) $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ かつ $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ かつ $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$