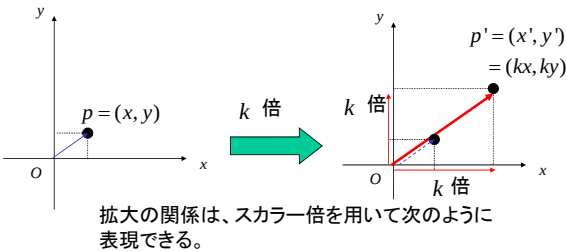


9. 線形写像

- ここでは、行列の積によって、写像を定義できることをみていく。
- また、行列の積によって定義される写像の性質を調べていく。

行列演算と写像(変換)

拡大とスカラー倍



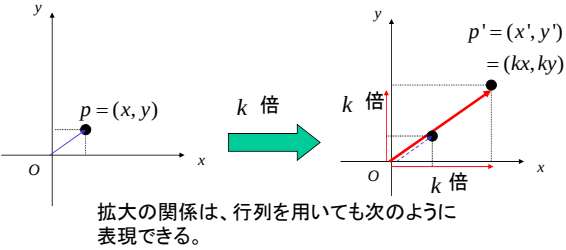
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

拡大後

拡大前

拡大

拡大と行列の積



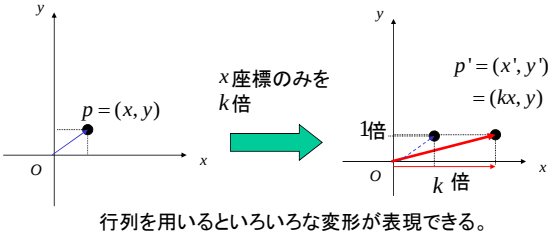
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

拡大後

拡大前

拡大

変形と行列



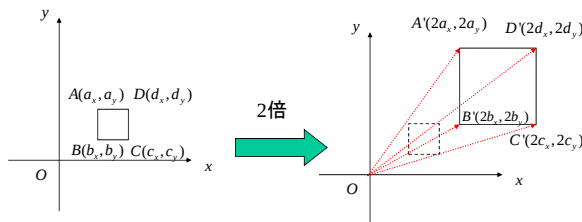
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

変形後

変形前

変形

行列による図形の変形1

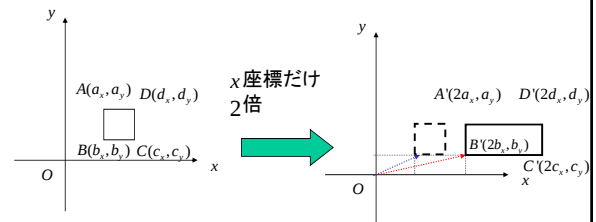


図形の拡大は行列を用いて表現できる。

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

7

行列による図形の変形2



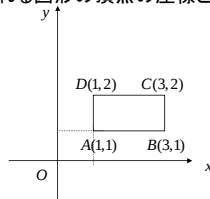
図形の変形は行列を用いて表現できる。

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

8

練習

次の図形に各変換をほどこしたとき、うつされる図形の頂点の座標と外形を描け。



(1)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(3)

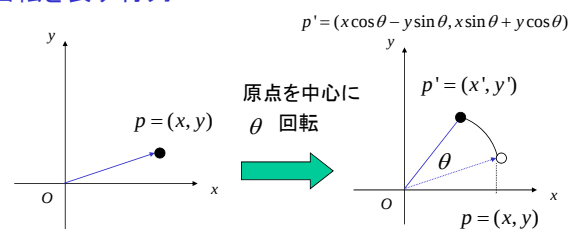
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

9

回転を表す行列



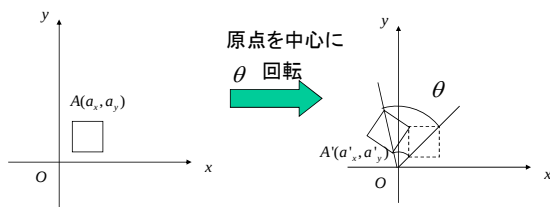
回転も行列を用いて表すことができる。

回転を表す行列は少し複雑である。
(興味のある人は自分で導くとよい。)

回転後 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 回転前

10

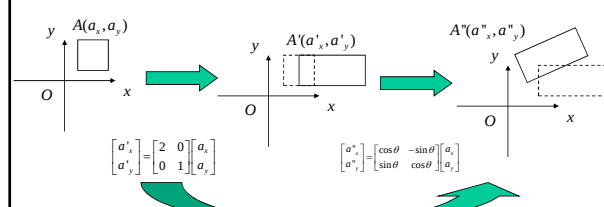
行列による図形の回転



$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

11

変形の組み合わせと行列の積1



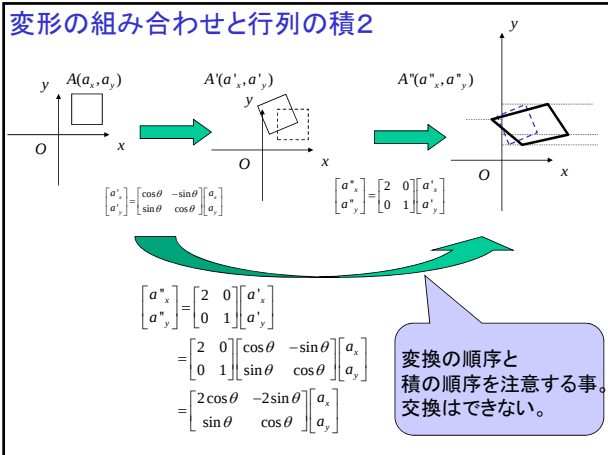
$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a''_x \\ a''_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a''_x \\ a''_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & -\sin \theta \\ 2 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

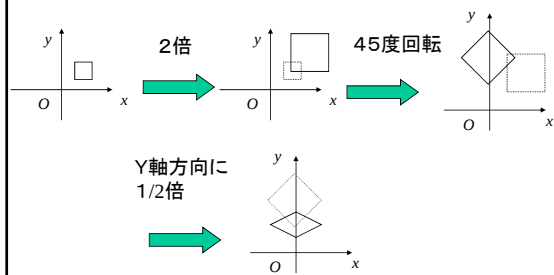
変形の組み合わせは行列の積で表現される。

変形の組み合わせと行列の積2



練習

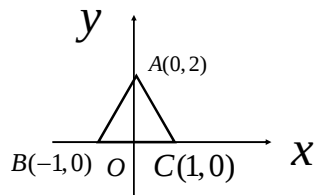
次の1連の変形を一括して表す1つの行列を求めよ。



14

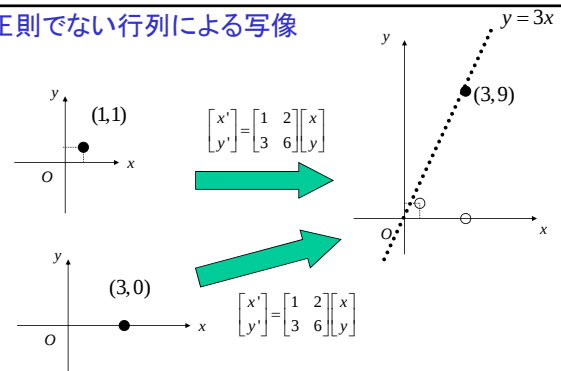
練習

一つ前の練習問題で求めた行列により、次の図形がどのような図形に変換されるかを求めよ。



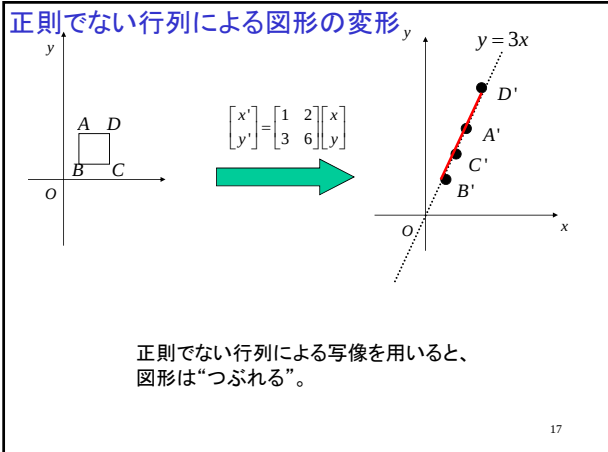
15

正則でない行列による写像



16

正則でない行列による図形の変形



17

練習

 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって写像を表す。以下の座標を持つ四角形ABCDに対して、各頂点が上写像によって移される点の座標をそれぞれ求めよ。
また、それらの点が一直線上にあることを確かめよ。

A(1,2)

B(1,1)

C(2,1)

D(2,2)

18

線形写像

ここでは、行列によって表される写像の性質を調べる。

19

線形写像

定義(線形写像)

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 f が次の(1)、(2)を満たすとき、 f は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像であるという。

(1) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と任意のスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(kx) = kf(x)$$

正比例の拡張概念。

正比例は、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の線形写像である。

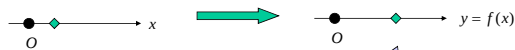
20

線形写像例1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x$$

写像元

写像先



$$\begin{aligned} (1) \quad f(x_1 + x_2) &= 2(x_1 + x_2) \\ &= 2x_1 + 2x_2 \\ &= f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

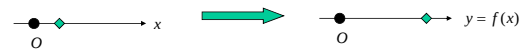
$$\begin{aligned} (2) \quad f(kx_1) &= 2(kx_1) \\ &= k2x_1 \\ &= kf(x_1) \end{aligned}$$

この2つをまとめて一つのグラフとして表すことも多い。実は、写像はきちんと図示できるものだけではない。

21

線形でない写像例1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$$

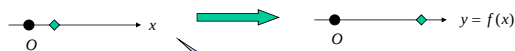


$$\begin{aligned} (1) \quad f(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &\neq x_1^2 + x_2^2 \\ &= f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

22

線形でない写像例2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1$$



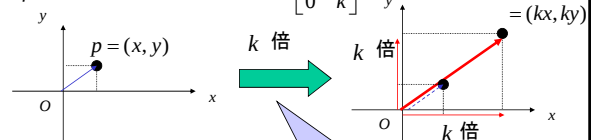
$$\begin{aligned} (2) \quad f(kx_1) &= (kx_1) + 1 \\ &= kx_1 + 1 \\ &\neq kx_1 + k \\ &= k(x_1 + 1) \\ &= kf(x_1) \end{aligned}$$

一つの図で、線形写像を表したときには、原点を通らなければならない。

23

線形写像例2

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x) = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} (1) \quad f(x_1 + x_2) &= A(x_1 + x_2) \\ &= Ax_1 + Ax_2 \\ &= f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(kx_1) &= A(kx_1) \\ &= kAx_1 \\ &= kf(x_1) \end{aligned}$$

なお、写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のように)一枚の図で表すことはできない。よって、定義域と値域との対応(関係)だけに注目する。

24

線形写像例3

形写像例3

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$ が線形写像かどうか調べよ。

解)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2, k \in \mathbf{R}$$

に対して、線形写像の条件を調べる。

$$(1) \quad f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(a_1 + b_1) \\ (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) &= f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_1 \\ b_1 + 2b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(a_1 + b_1) \\ (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$$

25

(2)

$$f(k\mathbf{a}) = f\left(k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2ka_1 \\ ka_1 + 2ka_2 \end{bmatrix}$$

$$kf(\mathbf{a}) = kf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ka_1 \\ ka_1 + 2ka_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a})$$

よって、線形写像である。

26

線形写像例4

$$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

$$\begin{aligned} (1) \quad f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \\ &= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k\mathbf{x}_1) &= A(k\mathbf{x}_1) \\ &= kA\mathbf{x}_1 \\ &= kf(\mathbf{x}_1) \end{aligned}$$

行列の形(大きさ)から、
定義域の次元と、値域の次元
(の最大値)が直ちにわかる。

$$y = Ax$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

27

線形写像でない例3

$$f : \mathbf{R} \rightarrow [0,1] \qquad f(\alpha) = \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} (1) \quad f(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &\neq \sin \alpha + \sin \beta \\ &= f(\alpha) + f(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(k\alpha) &= \sin(k\alpha) \\ &\neq k \sin \alpha \\ &= kf(\alpha) \end{aligned}$$

角度(ラジアン)から正弦(サイン)をもとめる関数(写像)。

28

練習

次の写像が、線形写像かどうかを答えよ。

$$(1) \quad f_1: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad f_2: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad f_3: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad f_4: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^1 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3} [e^{x_1+x_2}]$$

20

正比例と線形写像

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
 $y = f(x) = ax$
 スカラー (for a)
 スカラー (for x)
 スカラー (for y)
 止比例 (for f)

$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$
 $y = f(x) = Ax$
 $m \times n$ 行列 (for A)
 n 項ベクトル (for x)
 m 項ベクトル (for y)
 線形写像 (for f)

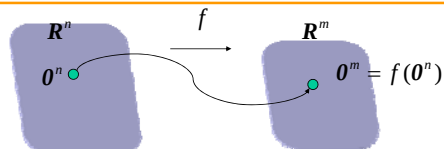
30

線形写像の性質1

(線形写像と零元)

線形写像 $f: R^n \rightarrow R^m$ に対して、零元は、零元に移される。すなわち、

$$0^m = f(0^n)$$



証明略

31

線形写像の性質2

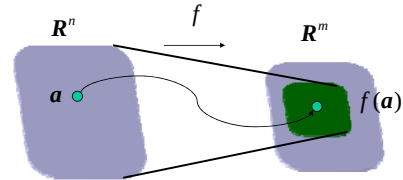
(線形写像と定義域の写像先)

R^n から R^m への線形写像 f に対して、次の集合

$$f(R^n) = \{f(x) \in R^m \mid x \in R^n\}$$

は R^m の部分空間である。

定義域全体の移動先



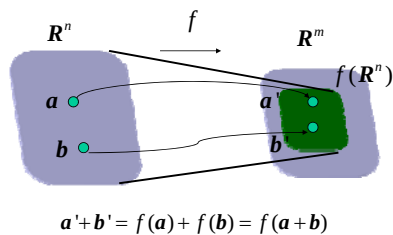
32

証明

$a, b \in R^n, k \in R$ に対して、線形写像の条件を調べる。

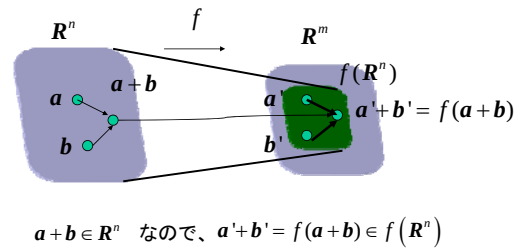
(1) $a', b' \in f(R^n) \subseteq R^m$ とすると、

$a' = f(a), b' = f(b)$ なる $a, b \in R^n$ が存在する。



$$a' + b' = f(a) + f(b) = f(a + b)$$

33



$$a + b \in R^n \text{ なので、 } a' + b' = f(a + b) \in f(R^n)$$

34

(2) $a' = f(a) \in f(R^n), a \in R^n$ とすると、

$ka' = kf(a) = f(ka)$ と書ける。

$ka \in R^n$ なので、 $ka' = kf(a) = f(ka) \in f(R^n)$

以上より、和の公理とスカラー倍の公理を満たすので、 R^m の部分空間である。

QED

35

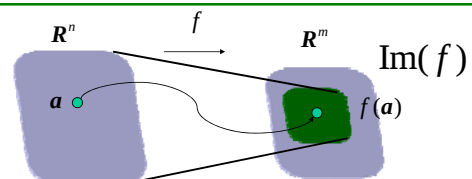
像(Imag)

定義(像)

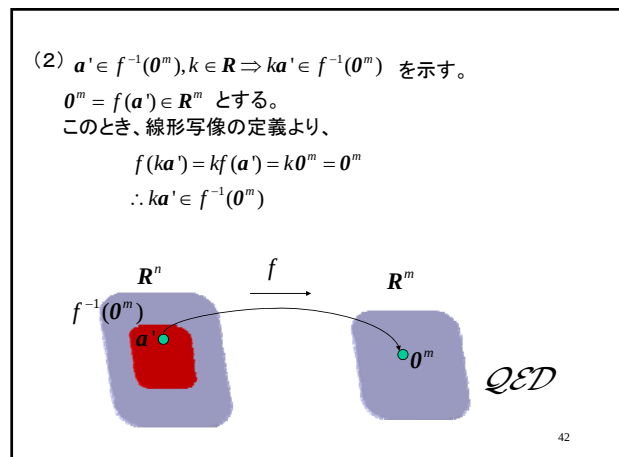
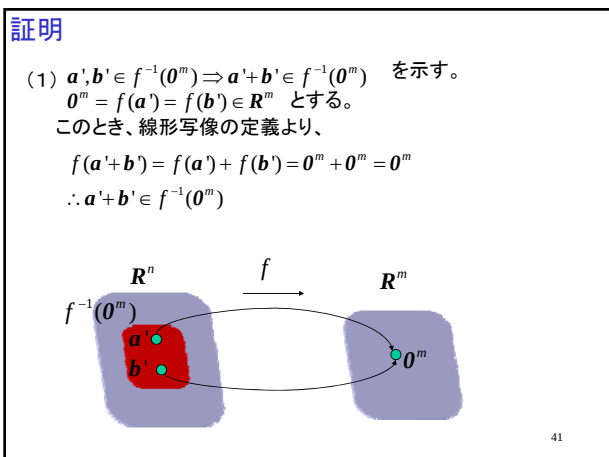
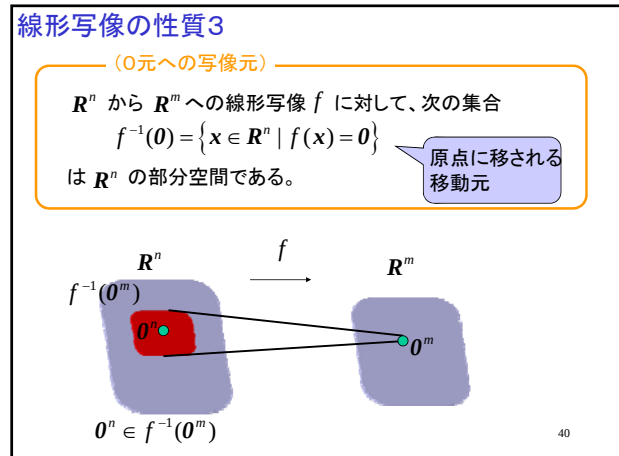
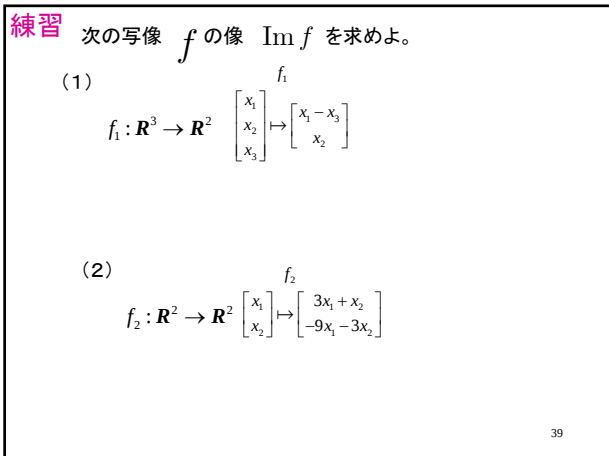
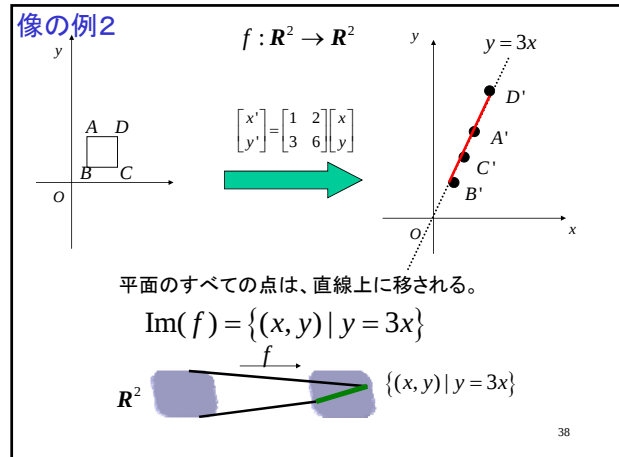
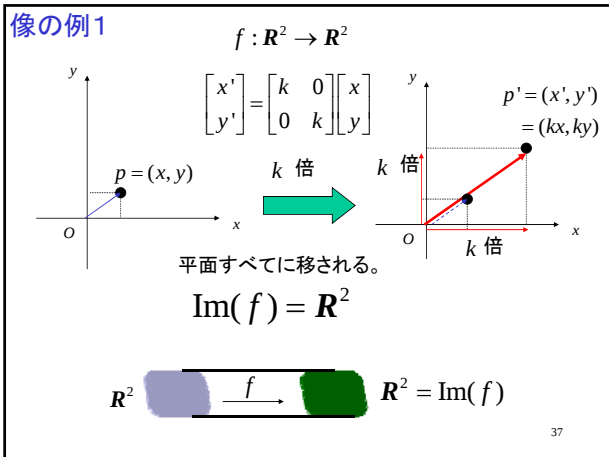
線形写像 $f: R^n \rightarrow R^m$ に対して、部分空間 $f(R^n)$ を f の像といい、

$\text{Im}(f)$ と書く。すなわち、

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \in R^m \mid x \in R^n\}$$

定義域全体の移動先
値域の部分集合(部分空間)

36



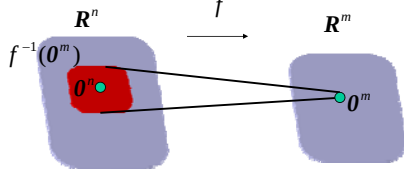
核 (Kernel)

定義 (核)

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、部分空間 $f^{-1}(0^m)$ を f の核といい、 $\text{Ker}(f)$ と書く。

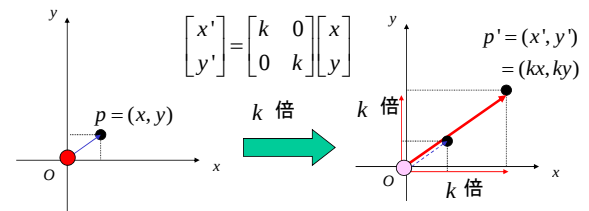
値域側の原点に移される移動元
定義域の部分集合 (部分空間)

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$



43

核の例1

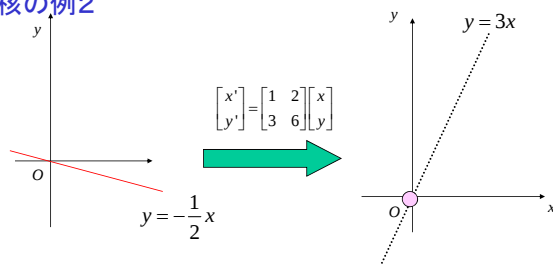


原点は原点からしか移されない。

$$\text{Ker}(f) = \{0\}$$

44

核の例2



直線上の点が、原点に移される。

$$\text{Ker}(f) = \left\{ (x, y) \mid y = -\frac{1}{2}x \right\}$$

45

練習

次の写像 f の核 $\text{ker } f$ を求めよ。

$$(1) \quad f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

46

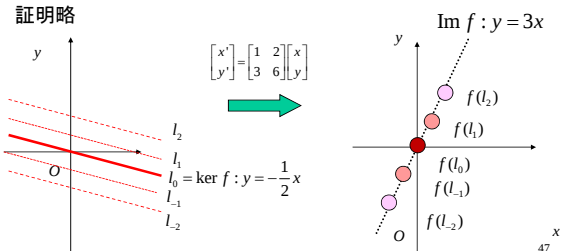
像と核の次元

(次元定理)

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して次式が成り立つ。

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$$

証明略



47

例題

次の写像に関して、 $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$ を確かめよ。

$$f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解

$$\text{Im } f_1 = \mathbb{R}^2 \quad \text{より、} \dim \text{Im } f_1 = 2$$

$$\text{ker } f_1 = \left\{ k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{より、} \dim \text{ker } f_1 = 1$$

$$\therefore \dim \text{Im } f_1 + \dim \text{ker } f_1 = 3 = n$$

48

練習

次の写像に関して、 $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$ を確かめよ。

$$f_2: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

49

線形写像と行列

(線形写像と行列)

- (1) 線形写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ に対して、次式を満たす $m \times n$ 行列 $A = A_f$ が一意に決定できる。

$$f(x) = Ax$$

- (2) $m \times n$ 行列 A に対して、写像 $f_A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ を

$$f_A(x) = Ax$$

で定めると、 f_A は線形写像である。

証明略

50

(線形写像の)表現行列

定義(表現行列)

線形写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ に対して、 $m \times n$ 行列 $A = A_f$ を f の表現行列という。

線形写像は、その表現行列がわかれば、すべてがわかる。

51

線形写像と基底

(線形写像と基底)

線形写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ は、 $\mathbf{R}^n$ の標準基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ の像

$$\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$$

が決まれば、任意の元 $a \in \mathbf{R}^n$ に対して、像

$$f(a) \in \mathbf{R}^m$$

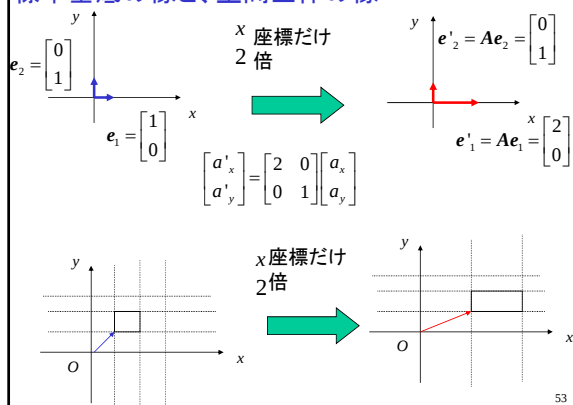
がきまる。

言い換えると、2つの線形写像 f, g が、 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ で同じ像をとれば、全く同じ写像になる。

証明略。

52

標準基底の像と、空間全体の像



53

基底の像と表現行列

(基底の像と表現行列)

線形写像 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ に対して、 $\mathbf{R}^n$ の標準基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ の像を、

$$\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$$

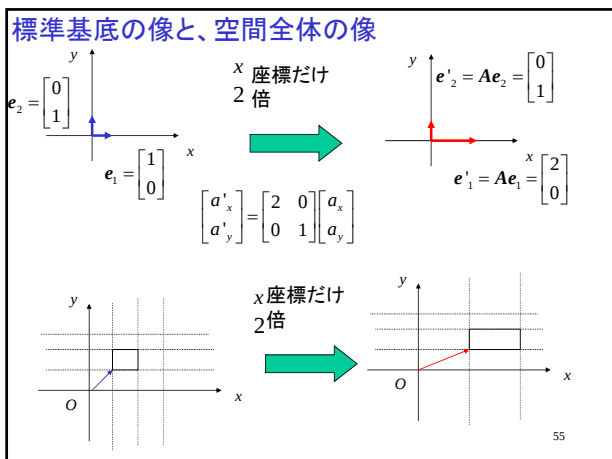
とする。このとき、 f の表現行列 A は、

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{bmatrix}$$

と表せる。

証明略。

54



例題 次の線形写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対して、表現行列を求めよ。

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

解) 写像より、

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

56

(別解)

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

より、

$$f(e_1) = f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(e_2) = f \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = [f(e_1) \ f(e_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

57

練習 次の写像 f 表現行列を求めよ。

(1)

$$f_1: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad f_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$f_2: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad f_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

58

表現行列と線形写像

(表現行列と線形写像)

表現行列が $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ であるような $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 f について次がなりたつ。

(1) $\text{Im}(f) = f(\mathbf{R}^n) = L\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

(2) $\dim \text{Im } f = \text{rank}(A)$

証明略

59

例題1 次の写像 f に関して、表現行列を $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ とする。このとき、

(1) $\text{Im}(f) = L\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

(2) $\dim \text{Im } f = \text{rank}(A)$

を確かめよ。

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

60

解)

$$(1) \quad f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{より、}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{Im } f = R^2 = L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

(2)

$$\dim \text{Im } f = \dim R^2 = 2$$

$$\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\therefore \dim \text{Im } f = \text{rank } A$$

61

合成写像と表現行列の積

2つの線形写像

$$f: R^n \rightarrow R^m, \quad g: R^m \rightarrow R^l$$

の表現行列をそれぞれ、

$$A = A_f, B = B_g$$

とすれば、 A は $m \times n$ 型で、 B は $l \times m$ 型である。また、合成写像 $g \circ f: R^n \rightarrow R^l$ の表現行列を C とすれば、 C は $l \times n$ 型であり、

$$C = BA$$

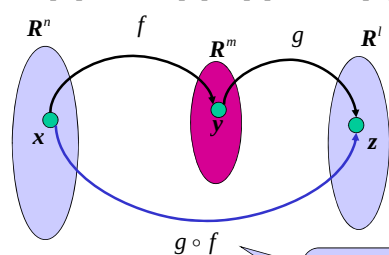
と表せる。

証明略

62

イメージ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = y = Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix} = z = By = B \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix} = z = BAx = BA \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$g \circ f(x) = g(f(x))$
と覚えればよい。