

7. n次の行列式

一般的な(n次の)行列式の定義には、数学的な概念がいろいろ必要である。まずそれらを順に見ていく。

1

余因子

定義(余因子)

$n \geq 2$ とする。
 n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ とその要素 a_{ij} に対して、
第 i 行と第 j 列を取り除いた $n-1$ 次の
正方行列 $\overline{a_{ij}}$ を考え、符号を次のように設定
したスカラーを、

$$\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j} \overline{a_{ij}}$$

行列 A の (i, j) 余因子という。

$n-1$ 次の行列式。
行列式の定義は
帰納的に定義される

2

余因子の形

(余因子の形)

$$\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$\widetilde{a_{ij}} \in R$
すなわち、余因子はスカラー
であることに注意すること。

3

余因子の求め方その1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A は $n \times n$
行列

削除

$$\overline{a_{ij}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\overline{a_{ij}}$ は
 $(n-1) \times (n-1)$
行列

4

余因子の求め方その2
(余因子の符号)

(1, 1) 成分
 a_{11}

+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+

(n, n) 成分
 a_{nn}

左上がプラスのチェスボードを考えればよい。

5

例題1

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 とする。

このとき、次の余因子を $n-1$ 次の行列式を
用いて表せ。

(2) (3, 3)-余因子

(1) (1, 1)-余因子

$$\widetilde{a_{11}} = (-1)^{1+1} \overline{a_{11}} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{a_{33}} = (-1)^{3+3} \overline{a_{33}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(3) (1, 2)-余因子

$$\widetilde{a_{12}} = (-1)^{1+2} \overline{a_{12}} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(4) (2, 3)-余因子

$$\widetilde{a_{23}} = (-1)^{2+3} \overline{a_{23}} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

6

例題2

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

このとき、次の成分の余因子を求めよ。

$$(1) a_{11} \quad \widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} |\overline{a_{11}}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$$

$$(2) a_{22} \quad \widetilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} |\overline{a_{22}}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$$

$$(3) a_{12} \quad \widetilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} |\overline{a_{12}}| = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(36 - 42) = 6$$

$$(4) a_{23} \quad \widetilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} |\overline{a_{23}}| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1)(8 - 14) = 6$$

7

練習

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 7 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

このとき、次の余因子を求めよ。

$$(1) \widetilde{a}_{11} \quad (2) \widetilde{a}_{33}$$

$$(3) \widetilde{a}_{12} \quad (4) \widetilde{a}_{23}$$

8

行列式の定義(重要)

定義(行列式)

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対し、
行列式 $|A|$ を次のように再帰的に定義する。

(i) $n = 1$ のとき
1次正方行列 $A = [a]$ に対し、 $|A| = a$ とする。

(ii) $n \geq 2$ のとき(i行による余因子展開)

$$|A| = a_{i1} \widetilde{a}_{i1} + a_{i2} \widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in} \widetilde{a}_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij}$$

余因子展開では、右辺に $n - 1$ 次の
行列式しか出現しないことに注意する。

9

行列式の余因子展開公式

(余因子展開公式)

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列とする。
このとき、次式が成り立つ。

(1) (i 行に関する余因子展開)

$$|A| = a_{i1} \widetilde{a}_{i1} + a_{i2} \widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in} \widetilde{a}_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij}$$

(2) (j 列に関する余因子展開)

$$|A| = a_{1j} \widetilde{a}_{1j} + a_{2j} \widetilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj} \widetilde{a}_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij}$$

これらは、すべての同じ値(スカラー)になる。
(証明略)

10

例題1 次の行列式を指定された余因子展開により求めよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1$$

解) (1) 第1行で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times |7| + 3 \times (-1) |5| = 2 \times 7 - 3 \times 5 = -1$$

(2) 第2行で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times (-1) |3| + 7 \times |2| = -5 \times 3 + 7 \times 2 = -1$$

(3) 第1列で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times |7| + 5 \times (-1) |3| = 2 \times 7 - 5 \times 3 = -1$$

(4) 第2列で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) |5| + 7 \times |2| = -3 \times 5 + 7 \times 2 = -1$$

11

例題2 次の行列式を指定された方法により求めよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解)

(1) サラスの方法

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 2 \\ - \{ 2 \cdot (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) \} \\ = -3 + 16 - (-12 - 4) \\ = 13 + 16 \\ = 29$$

12

(2) 第2行で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ = -4(-1-4) + 3(4-1) = 29$$

(3) 第2列で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \\ = (4-3) - 2(-6-8) = 29$$

13

練習 次の行列式を指定された余因子展開により求めよ。

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

- (1) 第1行で展開
- (2) 第2行で展開
- (3) 第1列で展開
- (4) 第2列で展開

14

例題3 次の行列式を求めよ。

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 2 & 8 & -7 \\ 6 & -4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解) 第3列で展開する。

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 8 & -7 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & -7 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 8 & -7 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 8 & -7 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

15

さらに、第1列で展開する。

$$|A| = 2 \cdot 6 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

さらに、第2列で展開する。

$$|A| = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot (-1)(3-5) = 48$$

16

練習 次の行列式を求めよ。

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

17

行列式の性質1

(1行のスカラー倍)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A_{k \times (i)}| = k|A|$$

18

証明 i 行で展開する。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} ka_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} ka_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} ka_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k \left\{ (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

QED

19

例題 次の2つの行列式を比べよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 3 - \{1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 4\} = -4 - 9 - \{-3 - 8\} = -13 + 11 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\} = 12 + 27 - \{9 + 24\} = 39 - 33 = 6$$

20

行列式の性質2

(行における分解)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A_{(i)+(i')}| = |A_{(i)}| + |A_{(i')}|$$

21

証明 i 行で展開する。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} (a_{i1} + b_{i1}) \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} (a_{i2} + b_{i2}) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{i+n} (a_{in} + b_{in}) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

22

$$\left\{ (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ \left\{ (-1)^{i+1} b_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} b_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} b_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

QED

23

例題 次の3つの行列式を比べよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 3 - \{1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 4\} = 4 + 9 - \{3 + 8\} = 13 - 11 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - \{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4\} = 8 + 18 - \{6 + 16\} = 26 - 22 = 4$$

24

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{ 1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \}$$
$$= 12 + 27 - \{ 9 + 24 \}$$
$$= 39 - 33$$
$$= 6$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

25

行列式の性質3

(行交換の交代性)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A| = -|A_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

26

証明

2段階に分けて証明する。

場合1: 隣接する行の交換時

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

この式が成り立つことを示せばよい。

27

左辺を i 行で展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$
$$+ (-1)^{i+n} a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

28

右辺中の行列式を $i+1$ 行で展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{(i+1)+1} a_{(i+1)1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{(i+1)+2} a_{(i+1)2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$
$$+ (-1)^{(i+1)+n} a_{(i+1)n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

よって、左辺と右辺では、
符号が反転する。

チェスボードにしたがって符号を考えれば、隣接する行では符号は反転する。

場合2: 一般の行の交換時

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

30

隣接する行の交換を繰り返し適用して、望みの交換を実現する。

$i \leftrightarrow (i+1)$
 $(i+1) \leftrightarrow (i+2)$
 $\vdots$
 $(j-1) \leftrightarrow j$

この一連の交換により、右の行列式が得られる。
($j-i+1$ 回の交換が行われることに注意する。)

$$(-1)^{j-i+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

31

次に、逆方法に交換を繰り返す。

$(j-1) \leftrightarrow (j-2)$
 $\vdots$
 $(i+1) \leftrightarrow i$

この一連の交換により、右の行列式が得られる。
($j-i$ 回の交換が行われることに注意する。)

以上より、命題が成り立つ。

$$(-1)^{2(j-i)+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(j-1)1} & \cdots & a_{(j-1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

QED

32

例題

次の2つの行列式を比べよ。

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\} = 12 + 27 - \{9 + 24\} = 39 - 33 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 - \{2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3\} = 9 + 24 - \{12 + 27\} = 33 - 39 = -6$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

33

行列式の性質4

(同一行を持つ行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$
$$|A_{(i)=(j)}| = 0$$

34

証明

i 行と j 行が等しい行列を A とし、その行列 A に対して、 i 行と j 行を交換して得られる行列を $A_{(i) \leftrightarrow (j)}$ とする。

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

35

このとき、明らかに次が成り立つ。

$$A = A_{(i) \leftrightarrow (j)}$$
$$\therefore |A| = |A_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

一方、行の交換の性質(交代性)より、

$$|A| = -|A_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

が成り立つ。

したがって、

$$|A| = |A_{(i) \leftrightarrow (j)}| = -|A_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$
$$\therefore 2|A_{(i) \leftrightarrow (j)}| = 0$$
$$\therefore |A_{(i) \leftrightarrow (j)}| = |A| = 0$$

QED

36

例題

次の2つの行列式を求めよ。

$$\begin{array}{l}
 \text{解)} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} \right| \\
 = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - \{1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3\} \\
 = 6 + 18 - \{6 + 18\} \\
 = 24 - 24 \\
 = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \end{array} \right| \\
 = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 - \{2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4\} \\
 = 18 + 36 - \{18 + 36\} \\
 = 54 - 54 \\
 = 0
 \end{array}$$

37

行列式の性質5

(他の行への加法)

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 a_{11} & \cdots & a_{1n} & & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} & \cdots & a_{in} & = & a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{j1} & \cdots & a_{jn} & & a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & a_{n1} & \cdots & a_{nn}
 \end{array}$$

38

証明

行を分解し、スカラー倍、同一行の性質を用いる。

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|$$

39

$$= \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| + k \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| + k \cdot 0$$

以上より、左辺=右辺、が示せた。

Q.E.D.

40

例題

次の3つの行列式を求めよ。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |A_{(1)+(2)}| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |A_{(3)+(-1)\times(2)}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
 = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\} \\
 = 12 + 27 - \{9 + 24\} \\
 = 39 - 33 \\
 = 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
 = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 - \{4 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\} \\
 = 12 + 54 - \{36 + 24\} \\
 = 66 - 60 \\
 = 6
 \end{array}
 \end{array}$$

41

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1\} \\ = -6 + 27 - \{9 + 6\} \\ = 21 - 15 \\ = 6$$

7

行列式の性質のまとめ(重要)

(1) $|A_{k \times (i)}| = k|A|$

行列の基本変形I
に対応(行のスカラ倍)

(2) $|A_{(i)+(i')}| = |A_{(i)}| + |A_{(i')}|$

(3) $|A| = -|A_{(i) \leftrightarrow (j)}|$

行列の基本変形III
に対応(行の交換)

(4) $|A_{(i)=(j)}| = 0$

行列の基本変形II
に対応(行の他の行
へのスカラ倍加算)

(5) $|A| = |A_{(i)+k \times (j)}|$

行列式の性質のまとめ(列)

行列式の定義において、行と列の対称性から
列に関する性質も同様に成り立つ。

(1) $|A^{k \times (j)}| = k|A|$

列のスカラ倍

(2) $|A^{(j)+(j')}| = |A^{(j)}| + |A^{(j')}|$

列の分解

(3) $|A| = -|A^{(i) \leftrightarrow (j)}|$

列の交換

(4) $|A^{(i)=(j)}| = 0$

同じ列の出現

(5) $|A| = |A^{(i)+k \times (j)}|$

他列へのスカラ倍加算

(各記号は、行に関するスライドからの類推で用いている。)

例

次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+y & a \\ a & a & a & a+z \end{vmatrix}$$

解)

1列を他の列から引く。

与式=
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & 0 & 0 \\ a & 0 & y & 0 \\ a & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$$

第1行で展開する。

与式=
$$a \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = axyz$$

練習

次の行列式を求めよ。

(1)
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式の応用

単位行列の行列式

(単位行列の行列式)

単位行列の行列式は、
 1
である。すなわち、任意の n に対して、
次が成り立つ。

$$|E| = |E_n| = 1$$

証明略

例 $|E_1| = |1| = 1$ $|E_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$|E_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$|E_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

49

転置行列の行列式

(転置行列の行列式)

行列式は転置しても変わらない。すなわち、

$$|{}^t A| = |A|$$

証明略

50

例題

次の2つの行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\} \\ &= 12 + 27 - \{9 + 24\} \\ &= 39 - 33 \\ &= 6 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4\} \\ &= 27 + 12 - \{9 + 24\} \\ &= 39 - 33 \\ &= 6 \end{aligned}$$

51

行列の演算と行列式

(行列の演算と行列式)

 A, B を n 次の正方行列とする。
このとき次が成り立つ。

(1)

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

(2) A が正則行列ならば、

$$\det(A) \neq 0$$

であり

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

が成り立つ。

証明略

52

例題

次の行列式を比べよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} &= 4 - 6 = -2 \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} &= 10 - 12 = -2 \\ \begin{vmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{vmatrix} &= 290 - 286 = 4 \\ \begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{vmatrix} &= 308 - 304 = 4 \\ \therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(-2) = 4 \\ \therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(-2) = 4 \end{aligned}$$

53

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1/2 \end{vmatrix} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

54

練習

行列式の性質を利用して次の行列式を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad |{}^t A| \quad (2) \quad |B^{-1}|$$

$$(3) \quad |AB| \quad (4) \quad \left| \left({}^t (AB) \right)^{-1} \right|$$

55

展開定理

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列とする。
このとき、次式が成り立つ。

(1) (行に関する展開定理)

$$a_{i1} \widetilde{a}_{j1} + a_{i2} \widetilde{a}_{j2} + \cdots + a_{in} \widetilde{a}_{jn} = \begin{cases} |A| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

(2) (列に関する展開定理)

$$a_{1i} \widetilde{a}_{1j} + a_{2i} \widetilde{a}_{2j} + \cdots + a_{ni} \widetilde{a}_{nj} = \begin{cases} |A| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

56

証明

(1)だけを証明する。(2)は転置をすることによって同様に証明できる。

$i = j$ のときは、余因子展開より成り立つ。

$i \neq j$ のときには、

i 行 a_i と j 行 a_j が同じ成分の行列の行列式と等しい。

よって、0である。

QED 57

クロネッカーの δ

定義(クロネッカーの δ)

次の関数をクロネッカーの δ という。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

この関数は数学の様々な場面ででてくる。

58

クロネッカーの δ を用いると、
展開定理が次のように簡潔に表現できる。

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} \widetilde{a}_{jk} = \delta_{ij} |A|$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} \widetilde{a}_{kj} = \delta_{ij} |A|$$

59

クロネッカーの δ と単位行列

単位行列 E_n もクロネッカーの δ を用いると
簡潔に表現できる。

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}]$$

60

行列式と逆行列の関係

定義(余因子行列)

n 次の正方行列 A に対して、
その (i, j) 余因子 $\widetilde{a_{ij}}$ を基に
次のように構成される行列

$$\widetilde{A} = {}^t [\widetilde{a_{ij}}] = \begin{bmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{21}} & \cdots & \widetilde{a_{n1}} \\ \widetilde{a_{12}} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \widetilde{a_{1n}} & & & \widetilde{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

を A の余因子行列という。

61

余因子行列の性質

余因子行列に関して次の命題が成り立つ。

(余因子行列の性質)

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E_n$$

証明

$$\widetilde{A}A = \begin{bmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \cdots & \widetilde{a_{1n}} \\ \widetilde{a_{21}} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \widetilde{a_{1n}} & & & \widetilde{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} = [b_{ij}] = B$$

とする。

62

このとき、行列の積より、

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n \widetilde{a_{kj}} a_{ki}$$

である。

一方、列に関する展開定理より、

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} \widetilde{a_{kj}} = |A| \delta_{ij}$$

よって、

$$\widetilde{A}A = [b_{ij}] = [|A| \delta_{ij}] = |A| [\delta_{ij}] = |A| E_n$$

63

また、

$$A\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{21}} & \cdots & \widetilde{a_{n1}} \\ \widetilde{a_{12}} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \widetilde{a_{1n}} & & & \widetilde{a_{nn}} \end{bmatrix} = [c_{ij}] = C$$

とおく。行列の積より、

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \widetilde{a_{jk}}$$

である。

一方、行に関する展開定理より、

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \widetilde{a_{jk}} = |A| \delta_{ij}$$

$$\therefore A\widetilde{A} = [c_{ij}] = |A| [\delta_{ij}] = |A| E_n = \widetilde{A}A$$

QED 64

練習

次の行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

65

正則行列と行列式(重要)

(正則行列と行列式)

正方行列 A が正則であるための必要十分条件は、

$$\det(A) \neq 0$$

である。

証明

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ 正則

$|A| \neq 0$ とする。

このとき、余因子行列を用いて、

$$B = \frac{1}{|A|} \widetilde{A}$$

とおく。

66

$$AB = BA = E_n$$

である。よって、 B は逆行列 $B = A^{-1}$ である。
よって、 A は正則行列。

正則 $\Rightarrow |A| \neq 0$

A は正則行列とする。

このとき、逆行列 $B = A^{-1}$ が存在する。

$$AB = E_n$$

である。両辺の行列式を考える。

$$|\text{左辺}| = |AB| = |A||B|$$

$$|\text{右辺}| = |E_n| = 1$$

$$\text{よって、} |A||B| = 1$$

$$\therefore |A| \neq 0$$

QED ₆₇

余因子行列と逆行列

(余因子行列と逆行列)

正方行列 A に対して、 $|A| \neq 0$ であるとき
逆行列 A^{-1} が存在して、余因子行列 $\tilde{A}$ を
用いて、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

と表せる。

68

練習

次の行列 A に対して、
余因子行列 $\tilde{A}$ を利用して、逆行列 A^{-1} を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

69