

## 6. 低次の行列式とその応用

# 行列式とは

行列式とは、**正方行列**の特徴を与える一つのスカラーである。すなわち、行列式はスカラーに写す写像の一種とみなすこともできる。

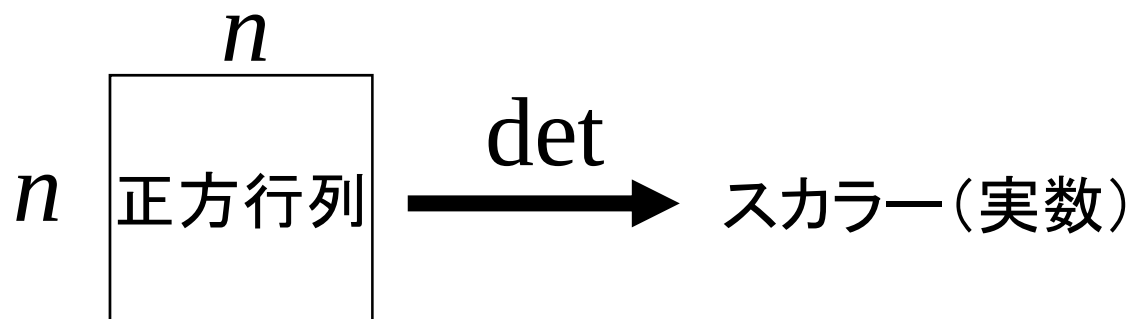
$$\begin{aligned} \det : \mathbf{R}^{n \times n} &\rightarrow \mathbf{R} \\ A (\in \mathbf{R}^{n \times n}) &\mapsto \det(A) (\in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

$n \times n$  の行列に対する行列式を、  
 **$n$  次の行列式**という。

行列  $A$  の行列式を

$$|A|$$

とも表す。



# 1次の行列式

## 定義(一次の行列式)

$1 \times 1$  行列  $A = [a]$  の行列式  $|A|$  は次式で定義される。

$$|A| = a$$

$$\det(A) = a$$

## 2次の行列式

定義(2次の行列式)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

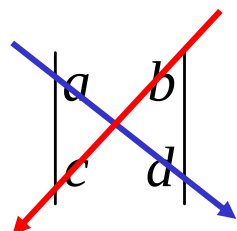
このとき、 $A$  の行列式  $|A|$  は次式で定義される。

$$|A| = ad - bc$$

行列式は、次ぎのように書かれることもある。

$$\det(A) = ad - bc$$

$|A|$  の求め方



乗算して符号が正

乗算して符号が負

$$|A| = ad - bc$$

## 2元1次連立方程式から2次の行列式へ

$$\begin{cases} ax + by = k \cdots (1) \\ cx + dy = l \cdots (2) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$

消去法によって、 $x, y$  を求める。

$$\begin{array}{l|l} (1) \times d - (2) \times b & (2) \times a - (1) \times c \\ (ad - bc)x + (bd - bd)y = kd - bl & (ac - ac)x + (ad - bc)y = la - kc \\ \hline \therefore (ad - bc)x = kd - bl & \therefore (ad - bc)y = la - kc \end{array}$$

$(ad - bc)$  の部分が共通に現れた。  
このスカラーが0以外であれば、  
一意に解が存在する。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{とすると都合が良い。}$$

## 2元連立一次方程式の解

$$(ad - bc)x = kd - bl$$

似ている。  
実は、 $a$  を  $k$  に  
 $c$  を  $l$  に  
置き換えただけ。

$x$  に対応する列ベクトルを定  
数項ベクトルに置き換える。

$y$  に対応する列ベ  
クトルを定数項ベク  
トルに置き換える。

$y$  についても同様に考察できる。

よって、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{のとき、} \quad \therefore x = \frac{\begin{vmatrix} k & b \\ l & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & k \\ c & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

(この方法を**クラメールの解法**といいます。)

## 例題

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$$

解) まず、行列で記述する。

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

係数行列の行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - (-3) \times 4 = 2 + 12 = 14 \neq 0$$

よって、解が一意に定まる。

$$x = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{14} (5 - 6) = -\frac{1}{14}$$

$$y = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{14} (-4 - 20) = -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7}$$

## 練習

クラメールの方法を用いて次の連立方程式を解け。

(1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 6 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 5x - 3y &= 2 \\ 3x - 2y &= -1 \end{cases}$$

## 3元1次連立方程式から3次の行列式へ？

$$\begin{cases} ax + by + cz &= p \\ dx + ey + fz &= q \\ gx + hy + iz &= r \end{cases}$$

これを文字だけで解くことは大変です。

しかし、クラメルらによって一般的な解が  
見つけられています。

行列式は、その解が表現できるように  
定義されています。

高次元の行列式は、定義自体も複雑です。

まず、3次元の行列式の定義からみていきます。

# 3次の行列式の定義

## 定義(3次の行列式)

3次の正方行列

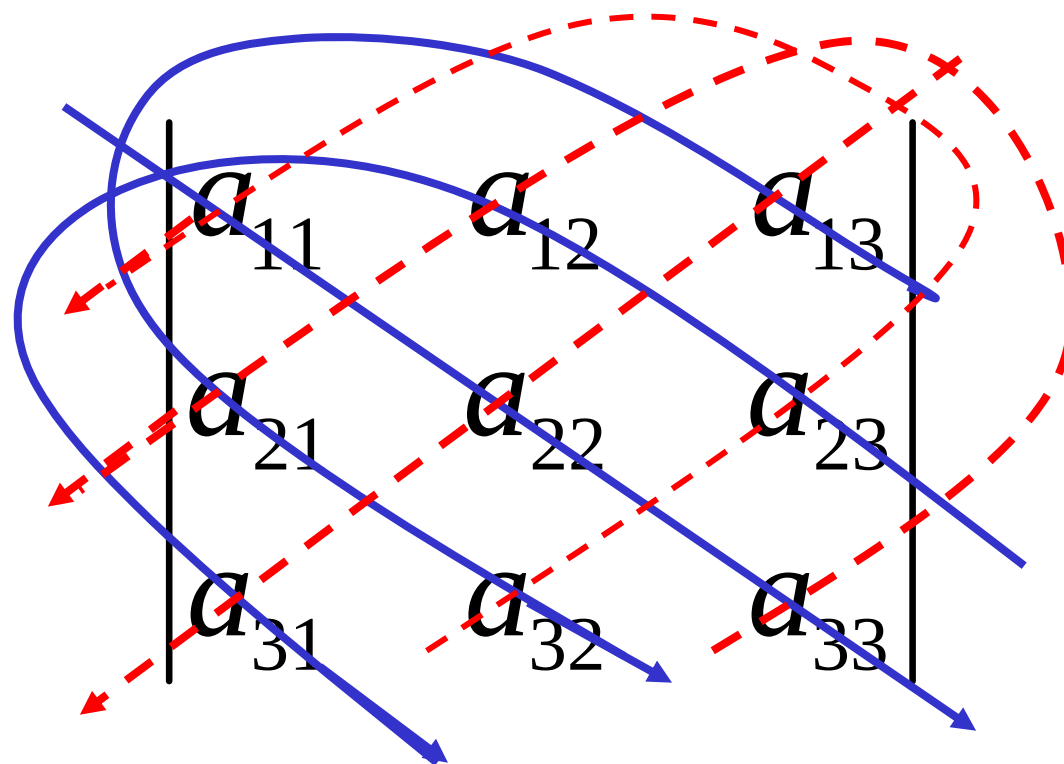
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

に対して、その行列式は、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

と定義される。

## 3次の行列式の覚え方(サラスの方法)



乗算して符号が正

乗算して符号が負

例

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 45 + 56 + 144 - 24 - 80 - 189 = -48$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - a^3 - b^3 - c^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

## 練習

次の行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

# 3元1次連立方程式に対するクラメールの解法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

の連立方程式は、行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

のときに次のような解を持つ。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

## 例

次の連立方程式をクラメールの方法で解く。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 22 \\ 2x + 3y - 4z = -8 \\ 3x + 5y + z = 24 \end{cases}$$

解)

まず係数行列の行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + (-24) + 30 - (-20) - 4 - 27 = 9 - 11 = -2$$
$$\neq 0$$

よって、解が一意に定まる。

各列ベクトルを定数項ベクトルと置き換えて、行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 22 & 2 & 3 \\ -8 & 3 & -4 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 66 + (-196) + (-120) - (-440) - (-16) - (216) = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 2 & -8 & -4 \\ 3 & 24 & 1 \end{vmatrix} = (-8) + (-264) + 144 - (-96) - 44 - (-72) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 22 \\ 2 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & 24 \end{vmatrix} = 72 + (-48) + 220 - (-40) - 96 - 198 = -10$$

よって、

$$x = \frac{-6}{-2} = 3, \quad y = \frac{-4}{-2} = 2, \quad z = \frac{-10}{-2} = 5$$

## 練習

クラメールの方法により、次の方程式を解け。

(1)

$$\begin{cases} 3x & +2y & +4z & = 0 \\ 2x & -y & +z & = 1 \\ 2x & +y & +4z & = 2 \end{cases}$$

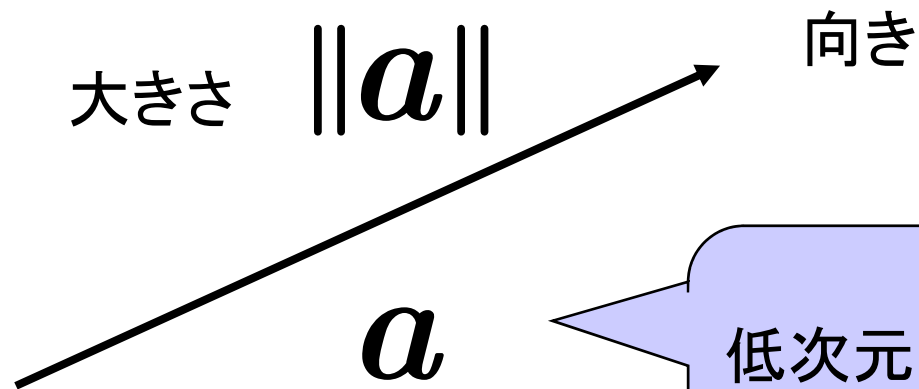
(2)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 & = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = 2 \end{cases}$$

# ベクトル

## 定義(ベクトル)

“向き”と“大きさ”を持つ量をベクトルという。



低次元のベクトルは  
矢印を用いて表現可能

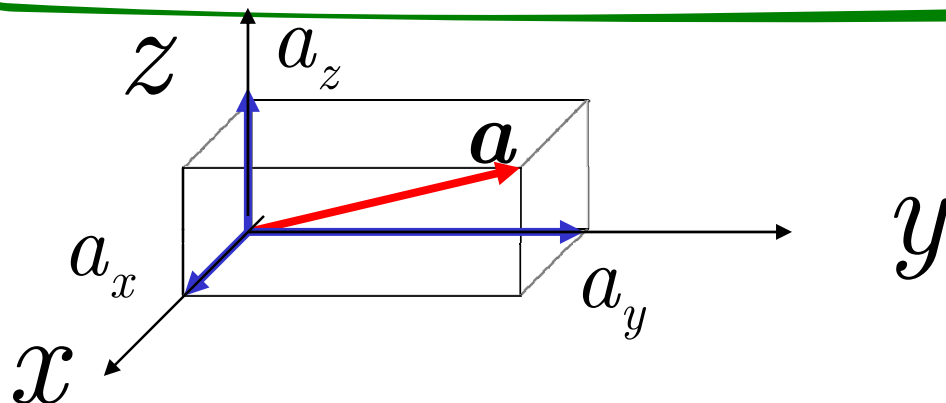
# 空間ベクトル

## 定義(空間ベクトル)

空間中のベクトルを空間ベクトルという。  
空間ベクトルは、3つのスカラーを用いて、  
表現できる。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \in R^3 \text{ あるいは } \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \in R^3 \text{ と表現できる。}$$

$3 \times 1$  行列(3次元ベクトル)あるいは  
 $1 \times 3$  行列(3次元ベクトル)を空間ベクトルという。

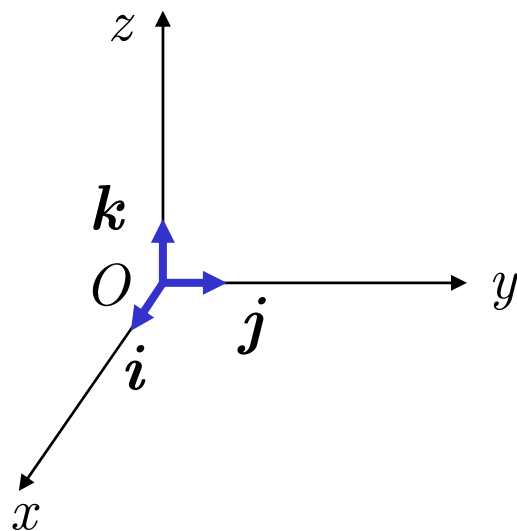


# 空間の単位ベクトル

応用の分野では、 $x, y, z$  の軸方向の単位ベクトルを  $i, j, k$  であらわす。

すなわち、

$$i = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



単位ベクトルは、座標の  
基準となるベクトル

# 内積

ここでは、低次元空間における内積の定義を示す。

## 定義(3次元ベクトルの内積)

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in R^3 \quad \text{に対して、スカラー}$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

内積は、  
同じ成分同士の  
積和であり、  
 $n$  次元ベクトル  
に拡張できる。

をベクトル  $a$  とベクトル  $b$  の内積といい、

$a \bullet b$  あるいは  $(a, b)$   
と表す。

内積は交換可  
 $a \bullet b = b \bullet a$

このように内積の演算結果はスカラーになるので、  
内積をスカラー積と呼ぶこともある。

## 転置による内積の表現

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \quad \text{に対して、次が成り立つ。}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = {}^t \mathbf{a} \mathbf{b}$$

証明

$${}^t \mathbf{a} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{bmatrix} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$$

*QED*

## ベクトルのノルム

ベクトル  $a$  に対して、スカラー

$$\sqrt{a \cdot a}$$

をベクトル  $a$  のノルム(大きさ、長さ)といい、

$$\|a\|$$

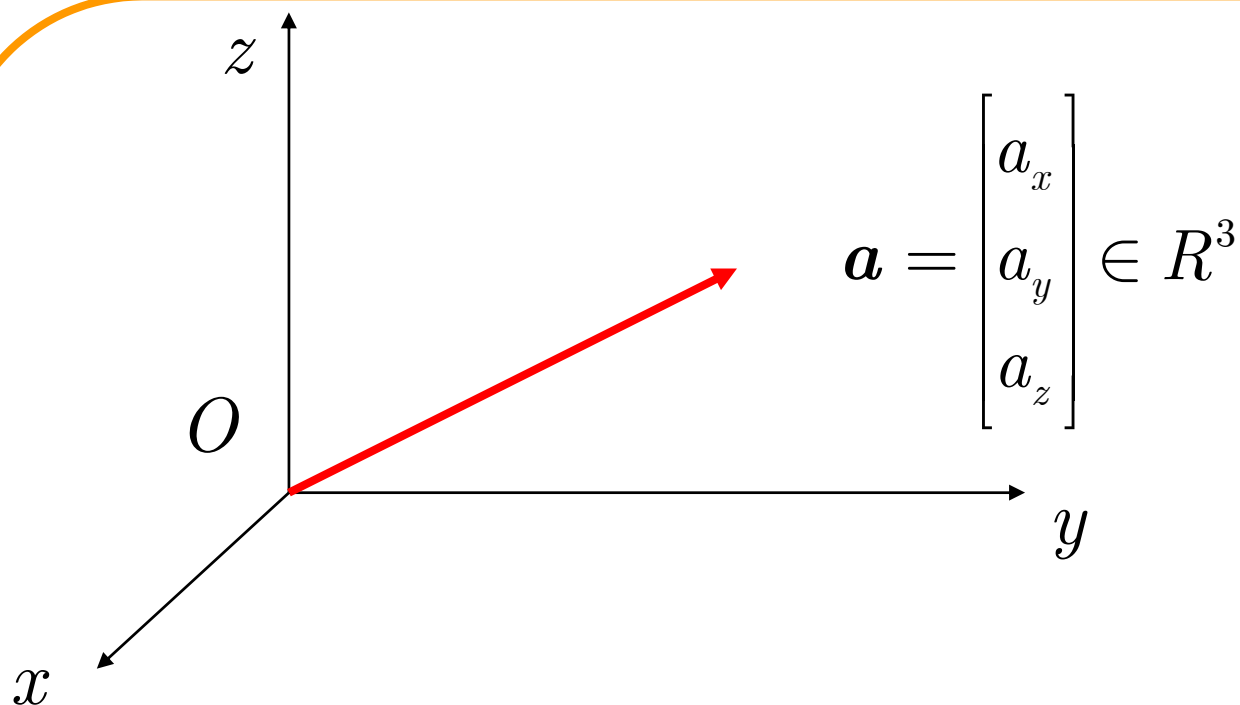
という記号で表す。すなわち、

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \in R^3 \quad \text{に対して、}$$

$$\|a\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

である。

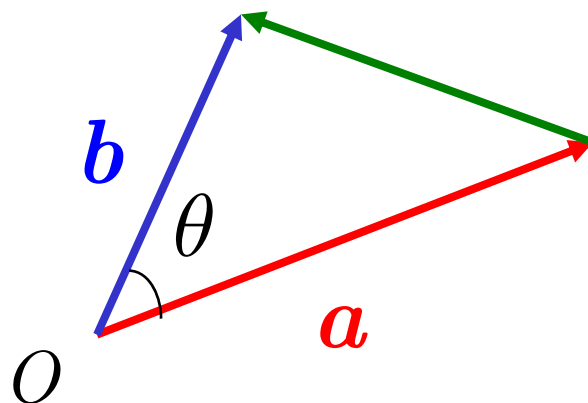
## ベクトルのノルムの幾何学的関係



$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

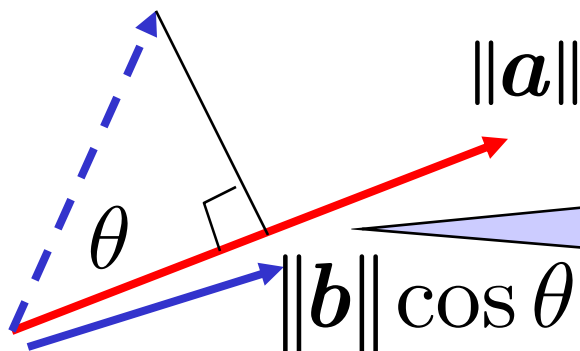
3平方の定理より、空間ベクトルのノルムは、  
ベクトルの大きさを意味している。

## 内積の幾何学的関係



ベクトルの内積に関して次の関係が成り立つ。

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta$$



方向が同じベクトルは  
スカラー同士の掛け算  
になる。

# 直交ベクトル

## 定義(直交ベクトル)

2つのベクトル  $a, b \in R^3$  の内積が0、すなわち、

$$a \cdot b = 0$$

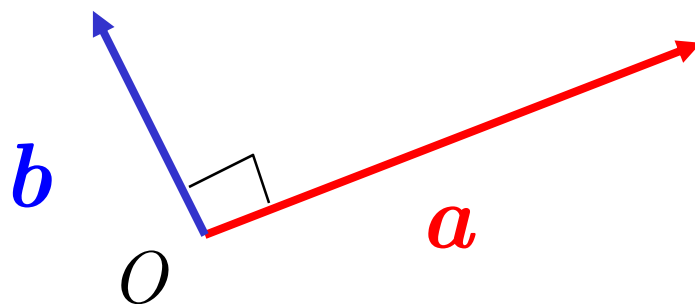
であるとき、

2つのベクトルは直交しているという。

このとき、2つのベクトルのなす角度  $\theta$  は

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

である。



# 外積

3次元ベクトル同士では、  
外積という演算が定義できる。

3次元空間は現実の空間であり、  
応用上重要な演算である。

外積の演算結果はベクトルであり、  
ベクトル積とも呼ばれる。

なお、外積が定義できるのは、  
3次元ベクトル同士だけであるので注意すること。

## 定義(3次元ベクトルの外積)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in R^3 \text{ に対して、ベクトル}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

外積は、  
演算結果が  
3次元ベクトル

をベクトル  $\mathbf{a}$  とベクトル  $\mathbf{b}$  の外積といい

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

外積は交換  
不可

と表す。

## 3次の行列式を用いた外積の計算法

$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbf{R}^3$  に対して、外積は、

3次の行列式の記号を援用して

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}\end{aligned}$$

行列式はスカラーであるので、これは行列式ではない。しかし、記号的には覚えるのに便利である。外積が**ベクトル**であることに注意して、この表現を利用するとよい。

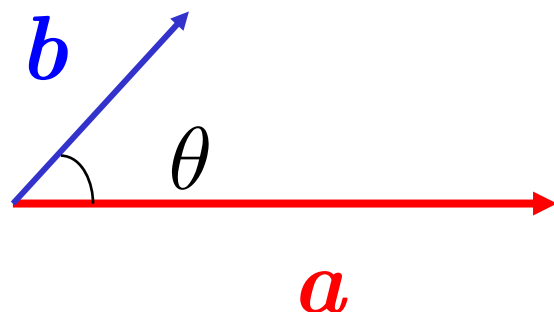
$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbf{R}^3$ に対して、外積は、

3次の行列式の記号を援用して

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}\end{aligned}$$

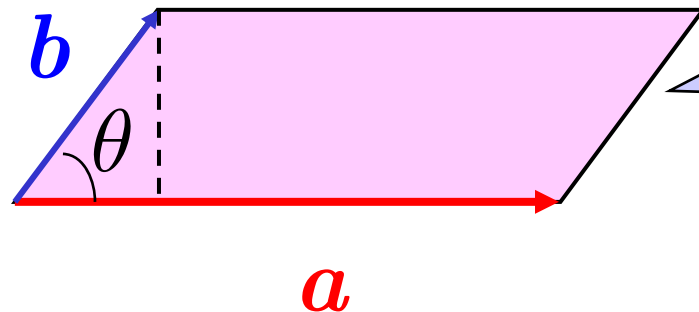
行列式はスカラーであるので、これは行列式ではない。しかし、記号的には覚えるのに便利である。外積が**ベクトル**であることに注意して、この表現を利用するとよい。

## 外積のノルム



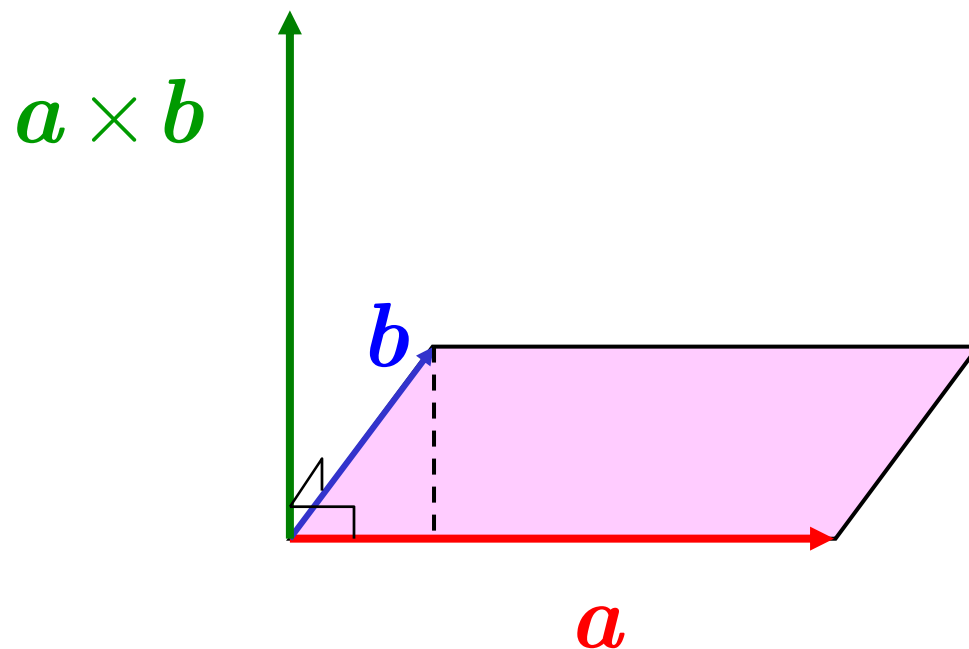
ベクトルの外積に関して、次の式が成り立つ。

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$$



外積のノルムは  
この平行4辺形の  
面積である。

## 外積の幾何学的性質



外積のベクトルは、右ねじの方向に、  
ベクトル  $a$  とベクトル  $b$  で生成される  
平面に直交する。

## 例題

外積を利用して、次の2つのベクトルと直交するベクトルを求めよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (12 - 15)i + (12 - 6)j + (5 - 8)k = -3i + 6j - 3k$$

よって、

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

## 練習

2つのベクトルと直交するベクトルを求めよ。

$$(1) \quad \boldsymbol{a} = (2, 1, 3) \quad \boldsymbol{b} = (-1, 2, -1)$$

$$(2) \quad \boldsymbol{a} = (1, -1, -1) \quad \boldsymbol{b} = (4, 1, 3)$$

$$(3) \quad \boldsymbol{a} = (-2, 0, 1) \quad \boldsymbol{b} = (4, 2, 0)$$

## 例2

外積を利用して、次の3点を頂点とする3角形の面積を求めよ。

$$A(2, 1, 1), B(3, -1, 1), C(4, 1, -1)$$

解)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 1-1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

面積は、

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3$$

と求められる。

## 練習

外積を利用して、次の3点を頂点とする3角形の面積を求めよ。

(1)  $A(1, 2, 1), B(2, 1, -1), C(3, 4, 2)$

(2)  $A(3, -1, 2), B(2, -2, 1), C(3, 5, -1)$

# 外積の性質

外積は、次のような性質を満足する。

$a, b, c \in R^3$  を3次元実数ベクトルとし、  
 $k \in R$  をスカラー(実数)とする。このとき、以下が  
成り立つ。

$$(1) \quad a \times b = -b \times a$$

交換したら符号反転。特に、外積は交換不可

$$a \times b \neq b \times a$$

$$(2) \quad (ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$$

$$(3) \quad a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

スカラーの  
抜き出し

分配法則

# 平行6面体の体積とスカラー3重積

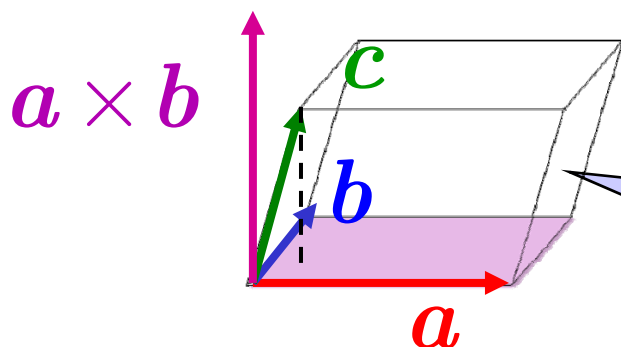
3次元の3つのベクトル  $a, b, c \in R^3$  に対して、  
スカラー

$$(a \times b, c) = (a \times b) \cdot c$$

をベクトル  $a, b, c$  のスカラー3重積という。

3つのベクトル  $a, b, c$  を辺とするような平行6面体の  
体積は、 $|(a \times b) \cdot c|$  に等しい。

ベクトルの向きで、負の値  
になることがある。ただし、  
大きさは等しい。



$c$  と  $a \times b$  のなす角度を  
 $\theta$  とすると、平行6面体の  
高さは  $\cos \theta$  と表せる。

## 行列式によるスカラー3重積の表現

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \quad \text{に対して、}$$

スカラー3重積は、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

と計算できる。

# 練習

次のベクトルで構成される平行6面体の体積を求めよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

