

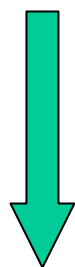
4. 行列の基本変形とその応用

行列の行基本変形

連立方程式の解法と行列の行基本変形

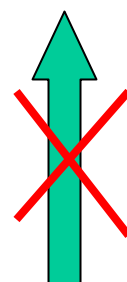
連立方程式の加減法による解法を考察する。

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \dots(1) \\ 3x - y = 7 & \dots(2) \end{cases}$$



(1) + (2)

$$5x = 10$$



式を減らすと、
逆方向の計算
ができない。

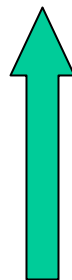
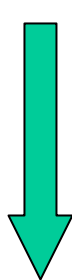
同値な変形ではない。

同値な変形

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \dots(1) \\ 3x - y = 7 & \dots(2) \end{cases}$$

式を減らさずに
変形する。

$$(2)' = (1) + (2)$$

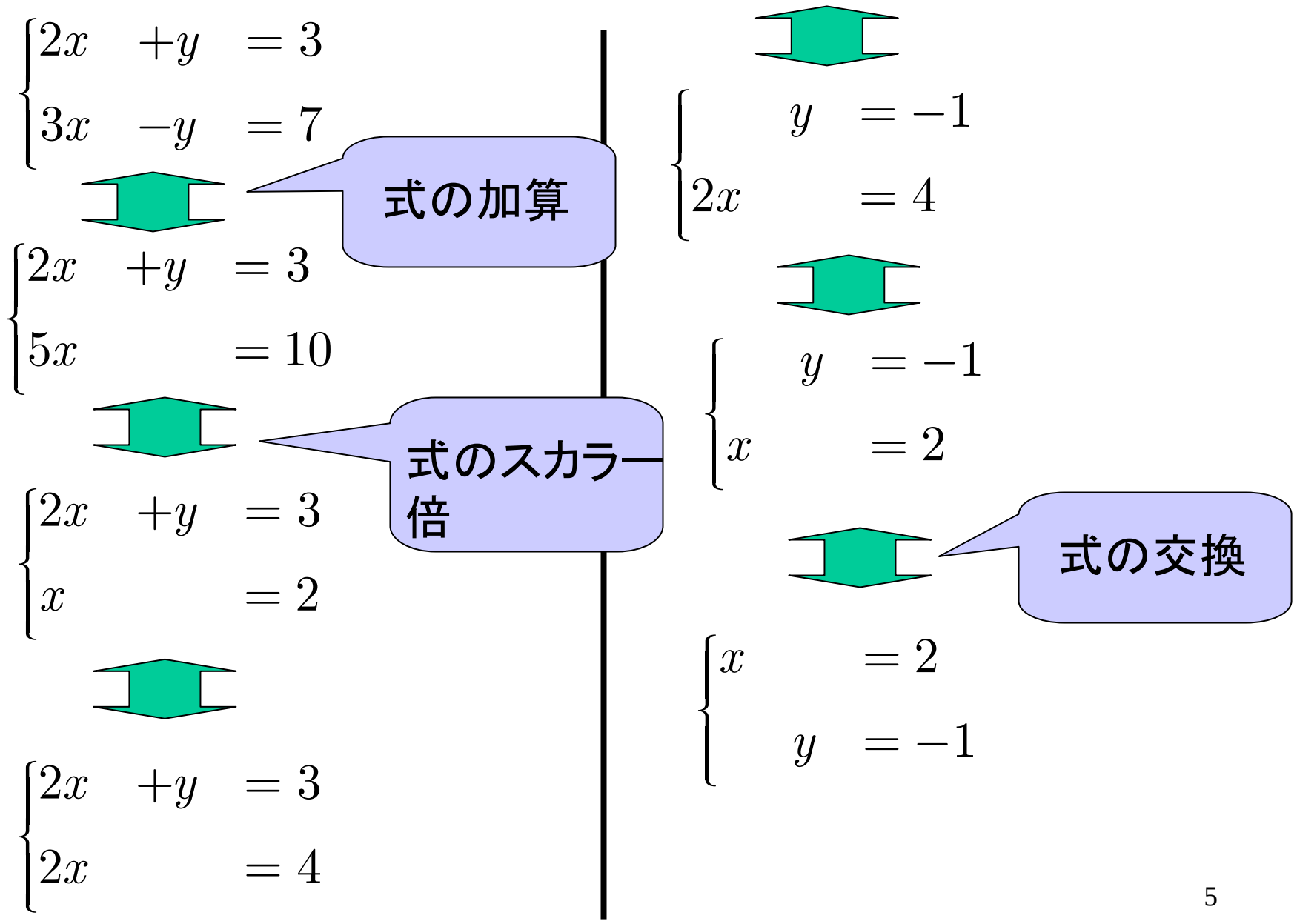


$$(2) = (2)' - (1)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \dots(1) \\ 5x = 10 & \dots(2)' = (1) + (2) \end{cases}$$

同値な変形

同値な変形による連立方程式の解法



3種類の同値変形1

- I: ある式をスカラー倍 (k ($k \neq 0$) 倍) する。
- II: ある式を他の式に加えたり、引いたりする。
- III: 2つの式を交換する。

これでもいいのだが、通常は、
IとIIを組み合わせたものを
II'とすることが多い。

3種類の同値変形2

定義(連立方程式の同値変形)

- I: ある式をスカラー倍 (k ($k \neq 0$) 倍) する。
- II: ある式を他の式 k 倍して加える。
- III: 2つの式を交換する。

これらの変換の組を用いることが多い。

同値な変形による連立方程式の解法

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \dots(1) \\ 3x - y = 7 & \dots(2) \end{cases}$$

$$(1)' \leftrightarrow (2)''$$

$$(2)' = (2) + 1 \times (1)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \dots(1) \\ 5x & = 10 & \dots(2)' \end{cases}$$

$$(2)'' = \frac{1}{5} \times (2)'$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \dots(1) \\ x = 2 & \dots(2) \end{cases}$$

$$(1)' = (1) - 2 \times (2)''$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} y & = -1 \quad \dots (1)' \\ x & = 2 \quad \dots (2)'' \end{array} \right.$$

この一連の変形を
行列を用いて表現する。

同値な変形と行列の変換

$$\begin{cases} 2x & +y & = 3 \\ 3x & -y & = 7 \end{cases}$$

$(2)' = (2) + 1 \times (1)$

$$\begin{cases} 2x & +y & = 3 \\ 5x & & = 10 \end{cases}$$

$(2)'' = \frac{1}{5}(2)'$

$$\begin{cases} 2x & +y & = 3 \\ x & & = 2 \end{cases}$$

$(1)' = (1) - 2 \times (2)''$

$$\begin{cases} y & = -1 \\ x & = 2 \end{cases}$$

$(1)' \leftrightarrow (2)''$

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$(2)' = (2) + 1 \times (1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$(2)'' = \frac{1}{5}(2)'$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$(1)' = (1) - 2 \times (2)''$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$(1)' \leftrightarrow (2)''$

行列の行基本変形

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$



$$(2)' = (2) + 1 \times (1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$



$$(2)'' = \frac{1}{5}(2)'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$(1)' = (1) - 2 \times (2)''$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$(1)' \leftrightarrow (2)''$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

係数行列	変形
$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}$	
$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{matrix}$	$(2) + 1 \times (1)$
$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$\frac{1}{5}(2)$
$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$(1) - 2 \times (2)$
$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$(1) \leftrightarrow (2)$

行列の行基本変形

定義(連立方程式の同値変形)

- I: ある行をスカラー倍 (k ($k \neq 0$) 倍) する。
- II: ある行を他の行に k 倍して加える。
- III: 2つの行を交換する。

重要

例

次の行列を行基本変形を用いて、単位行列にせよ。

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

解)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\frac{1}{2} \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+3 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(-1) \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+2 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

あくまで変形なので、矢印を用いる。
行列としては等しくないので、
「＝」を用いてはいけない。

練習

次の行列を行基本変形を用いて、単位行列にせよ。

(1)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1次方程式と連立方程式

一次方程式

未知数

係数

$$5x = 3$$

定数

2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ -x + 5y = 7 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ として、}$$

係数行列

$$Ax = b$$

定数項ベクトル

変数ベクトル
(未知数ベクトル)

拡大係数行列

連立方程式を定めるには、
変数の名前(x や y 、あるいは x_i)は重要ではない。
すなわち、その係数行列と定数項ベクトルだけがあれば
連立方程式が一意に定まる。

定義(拡大係数行列)

連立方程式 $Ax = b$ に対して、係数行列 A と
定数項ベクトル b から作られる次の行列

$$[A \mid b]$$

を**拡大係数行列**という。

このように、小行列や、ベクトルで定められる
行列を**ブロック行列**という。

例 1

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - z = -2 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -1 \end{cases}$$

この連立方程式に対して、係数行列 A 、未知数ベクトル x 、定数項ベクトル b 、拡大係数行列 $[A | b]$ は次のようになる。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

例2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$$

この連立方程式に対して、係数行列 A 、未知数ベクトル x 、定数項ベクトル b 、拡大係数行列 $[A | b]$ は次のようになる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[A | b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right]$$

拡大係数行列と連立方程式の解法

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$(2)' = (2) + 1 \times (1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$(2)'' = \frac{1}{5}(2)'$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$(1)' = (1) - 2 \times (2)''$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$(1)' \leftrightarrow (2)''$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

拡大係数行列	変形
$\begin{array}{cc c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{array}$	
$\begin{array}{cc c} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 10 \end{array}$	$(2) + 1 \times (1)$
$\begin{array}{cc c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}$	$\frac{1}{5}(2)$
$\begin{array}{cc c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}$	$(1) - 2 \times (2)$
$\begin{array}{cc c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$	$(1) \leftrightarrow (2)$ 18

行列の基本変形と基本変形行列

一般の n 元1次連立方程式を考える。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \cdots (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \cdots (2) \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \cdots (m) \end{array} \right.$$

$m \times n$ の係数行列 $A = [a_{ij}]$

$n \times 1$ の未知数(列)ベクトル $x = [x_i]$

$m \times 1$ の定数項(列)ベクトル $b = [b_i]$

とすると、以下のように表せる。

$$Ax = b$$

式の定数倍に対応する基本変形行列

ある式を定数倍しても、連立方程式の解には変化は無い。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \quad \cdots(1) \\ \vdots & & \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \cdots + ka_{in}x_n & = & kb_i \quad \cdots k \times (i) \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \quad \cdots(m) \end{array} \right.$$

これを**行列の積**で表現したい。

基本変形行列1 (行列の行の定数倍)

$$T_{k \times (i)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (i)$$

i 行を k 倍する
 $m \times m$ の正方行列。
正方行列を乗じても、
行列の形が変わらないことに
注意する。

$$T_{k \times (i)} A x = T_{k \times (i)} b$$

例1

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{左から掛ける}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$T_{(-1) \times (2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{左から掛ける}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 10 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$T_{2 \times (3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

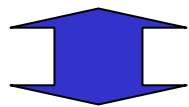
練習

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

行列 A の3行目を2倍にする変換行列 $T_{2 \times (3)}$ を求め、
積 $T_{2 \times (3)} A$ を計算せよ。

加減法に対応する基本変形行列

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \cdots (i) \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \quad \cdots (j) \\ \vdots \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + ka_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j \\ \vdots \quad \cdots (i') = (i) + k \times (j) \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \quad \cdots (j) \end{array} \right.$$

行を他の行へ定数倍して加算しても、
連立方程式は変わらない。

基本変形行列2 (行の他の行への加算)

$$T_{(i)+k \times (j)} = \begin{matrix} & i & j \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \dots k \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ & & & \\ & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix} \end{matrix}$$

i 行に j 行を k 倍して加算する $m \times m$ の正方行列。

$$T_{(i)+k \times (j)}Ax = T_{(i)+k \times (j)}b$$

例1

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}_{(2)+2 \times (3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 8 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

左から掛ける

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}_{(4)+2 \times (2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

左から掛ける

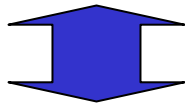
練習

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

行列 A の2行目の -1 倍を1行目に加算する変換行列 $T_{(1)+(-1)\times(2)}$ を求め、積 $T_{(1)+(-1)\times(2)}A$ を計算せよ。

連立方程式での式の交換

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \cdots (i) \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \quad \cdots (j) \\ \vdots \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \quad \cdots (i') = (j) \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \cdots (j') = (i) \\ \vdots \end{array} \right.$$

行を交換しても、連立方程式は変わらない。

行列の基本変形3(行の交換)

$T_{(i) \leftrightarrow (j)}$

i 行に j 行を交換する
 $m \times m$ の正方行列。

i
 j

$$T_{(i) \leftrightarrow (j)} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots \\ & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ & & & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ (j) \\ \\ \end{array}$$

$$T_{(i) \leftrightarrow (j)}Ax = T_{(i) \leftrightarrow (j)}b$$

例 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}_{(2) \leftrightarrow (3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

左から掛ける

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}_{(1) \leftrightarrow (4)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

左から掛ける

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

練習

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

行列 A の1行目と3行目に交換する変換行列 $T_{(1) \leftrightarrow (3)}$ を求め、積 $T_{(1) \leftrightarrow (3)} A$ を計算せよ。

基本変形行列の積

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Uparrow (2) + 1 \times (1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Uparrow \frac{1}{5}(2)$$

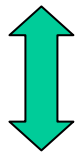
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{A}$$

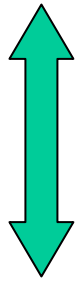
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$(1) - 2 \times (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$(1) \leftrightarrow (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{(1)-2 \times (2)} \mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{T}_{(1) \leftrightarrow (2)} \mathbf{T}_{(1)-2 \times (2)} \mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基本変形行列の積と逆行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ に対して、}$$

$$\left(T_{(1) \leftrightarrow (2)} T_{(1) - 2 \times (2)} T_{\frac{1}{5} \times (2)} T_{(2) + 1 \times (1)} \right) A = E$$

が成り立つ。

ここで、

$$X \equiv T_{(1) \leftrightarrow (2)} T_{(1) - 2 \times (2)} T_{\frac{1}{5} \times (2)} T_{(2) + 1 \times (1)} \quad \text{とおく。}$$

$$XA = E$$

$$\therefore X = A^{-1} = T_{(1) \leftrightarrow (2)} T_{(1) - 2 \times (2)} T_{\frac{1}{5} \times (2)} T_{(2) + 1 \times (1)}$$

基本変形行列の性質1

(基本変形行列の正則性)

基本変形行列は、すべて正則行列である。
(逆行列が存在する。)

証明 実際に逆行列を示す。

$$(1) \quad T_{k \times (i)} T_{\frac{1}{k} \times (i)} = T_{\frac{1}{k} \times (i)} T_{k \times (i)} = E$$

$$(2) \quad T_{(i)+k \times (j)} T_{(i)-k \times (j)} = T_{(i)-k \times (j)} T_{(i)+k \times (j)} = E$$

$$(3) \quad T_{(i) \leftrightarrow (j)} T_{(i) \leftrightarrow (j)} = T_{(i) \leftrightarrow (j)} T_{(i) \leftrightarrow (j)} = E$$

QED

例

$$(1) \quad \mathbf{T}_{2 \times (2)} \mathbf{T}_{\frac{1}{2} \times (2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

$$(2) \quad \mathbf{T}_{(2)-2 \times (3)} \mathbf{T}_{(2)+2 \times (3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

$$(3) \quad \mathbf{T}_{(2) \leftrightarrow (4)} \mathbf{T}_{(2) \leftrightarrow (4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

基本変形行列の性質2

(基本変形行列の積)

基本変形行列の積で得られる行列は正則である。

証明 正則行列の積は正則である。 *QED*

実際、 A, B を正則行列とし、その積 $C \equiv AB$ を考える。

まず、 A は正則なので逆行列 A^{-1} が存在する。

同様に、逆行列 B^{-1} も存在する。

よって、積 $X = B^{-1}A^{-1}$ が構成できる。

このとき、以下のように計算できる。

$$XC = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

$$CX = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$\therefore X = C^{-1}$$

したがって、逆行列が存在するので $C = AB$ は正則行列。

行列の基本変形の応用1 (逆行列を求める)

行基本変形による逆行列の求め方

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列とする。

$n \times 2n$ の行列 $[A \mid E]$ を行基本変形で、 $[E \mid B]$ の形に変形できれば、 A は正則行列で、 $B = A^{-1}$ である。ここで、 $[A \mid E]$ は n 次正方行列 A, E を横に並べた行列を表す。

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{n1} & & b_{nn} \end{array} \right]$$

$A = [a_{ij}]$ と $B = [b_{ij}]$ は互いに逆行列。

証明

行に関する基本変形を行うことは、いくつかの基本変形行列を左から掛けることであった。

これらの積を X とすると、 X は正則行列である。

この X を用いて

$$X[A \mid E] = [E \mid B]$$

となる。

これより、

$$XA = E, \quad X = B$$

である。

よって、

$$X = A^{-1}, \quad X = B$$

である。

QED

連立方程式との関係

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Uparrow (2)+1 \times (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Eb}$$

$$\Uparrow (2)+1 \times (1)$$

$$\mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{Ax} = \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{Eb}$$

$$\begin{array}{c} \Uparrow \quad \frac{1}{5} (2) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Uparrow \quad (1) - 2 \times (2) \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \Uparrow \quad (1) \leftrightarrow (2) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Uparrow \quad \frac{1}{5} (2)$$

$$\mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{E} \mathbf{b}$$

$$\Uparrow \quad (1) - 2 \times (2)$$

$$\mathbf{T}_{(1)-2 \times (2)} \mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$= \mathbf{T}_{(1)-2 \times (2)} \mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{E} \mathbf{b}$$

$$\Uparrow \quad (1) \leftrightarrow (2)$$

$$\mathbf{T}_{(1) \leftrightarrow (2)} \mathbf{T}_{(1)-2 \times (2)} \mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$= \mathbf{T}_{(1) \leftrightarrow (2)} \mathbf{T}_{(1)-2 \times (2)} \mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2)+1 \times (1)} \mathbf{E} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \equiv \mathbf{T}_{(1) \leftrightarrow (2)} \mathbf{T}_{(1) - 2 \times (2)} \mathbf{T}_{\frac{1}{5} \times (2)} \mathbf{T}_{(2) + 1 \times (1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{X} \mathbf{E} \mathbf{b}$$

$$\therefore \mathbf{X} \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \mathbf{b}$$

$$= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

$$\therefore \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$$

掃きだし法

逆行列を作るときには、
対角成分に注目する。

- 系統的な行基本変形
 - (1) ある要素を1にする。(スカラー倍の基本変形 $T_{k \times (i)}$)
 - (2) その列の(1)の要素以外を0にする。(加減法の基本変形 $T_{(j)-s \times (i)}$)
 - これらを左から順に全ての列に行う。

j 列における掃き出し

$A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とする。

$a_{ij} \neq 0$ のとき、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$T_{\frac{1}{a_{ij}} \times (i)}$$

を左からかける。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ a_{ij} & & & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

同様に、繰り返し $T_{(k)-a_{kj} \times (i)}$ を左からかける。



$$\begin{bmatrix} a'_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ a_{ij} & & & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

このように、 j 列で (i, j) 成分以外を0にできる。

この一連の操作を j 列の (i, j) 成分による掃きだしという。

例

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ。

1列目の掃きだし
終了

解

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{T_{(2)-1 \times (1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{T_{-1 \times (2)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{T_{(1)-1 \times (2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{T_{(3)-1 \times (2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

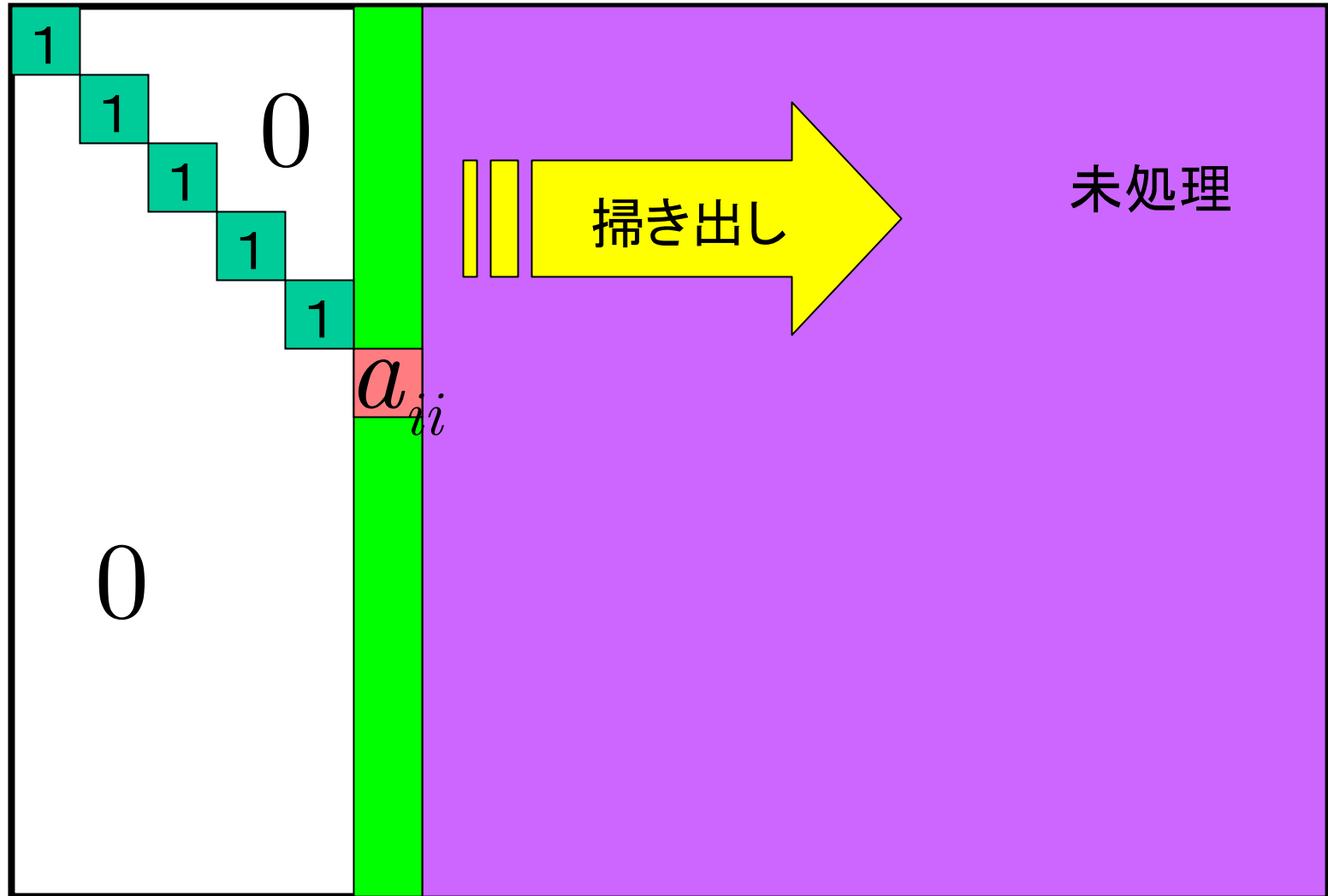
$$\begin{array}{c}
\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\
T_{\frac{1}{2} \times (3)} & T_{(2)+1 \times (3)} & T_{(1)-1 \times (3)}
\end{array}$$

よって、

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

この計算手順に従えば、一般のn次の正則行列に対する
逆行列を求めることができる。

掃き出し方のイメージ



練習

次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

行列の基本変形の応用2 (行列の階数(rank))

連立方程式と階数

例

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 & \cdots(1) \\ 6x + 4y = 8 & \cdots(2) \\ 5x + 3y = 3 & \cdots(3) \\ 15x + 9y = 9 & \cdots(4) \end{cases}$$

$$(2) = 2 \times (1)$$

$$(4) = 3 \times (3)$$

の関係に注目する。

4本の方程式があるが、意味のある方程式は2本である。

このようなとき、連立方程式中に意味のある方程式の本数を調べたい。

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

例2

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 & \text{-----} & (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 & \text{-----} & (2) \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 4 & \text{-----} & (3) \end{cases}$$

このような方程式においても、
(3) = (1) + (2) × 2 と表せるので、
本質的な方程式の本数は2本である。

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

一般的に、

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

のような連立方程式では、その係数行列に本質的な方程式の本数が隠れている。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

係数行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

係数行列

連立方程式の本質的な本数は、
係数行列の**階数(ランク、rank)**と等しい。

係数行列の階数を求めるためには、
係数行列を行基本変形することで、
階段行列に変形することで調べることができる。

階段行列

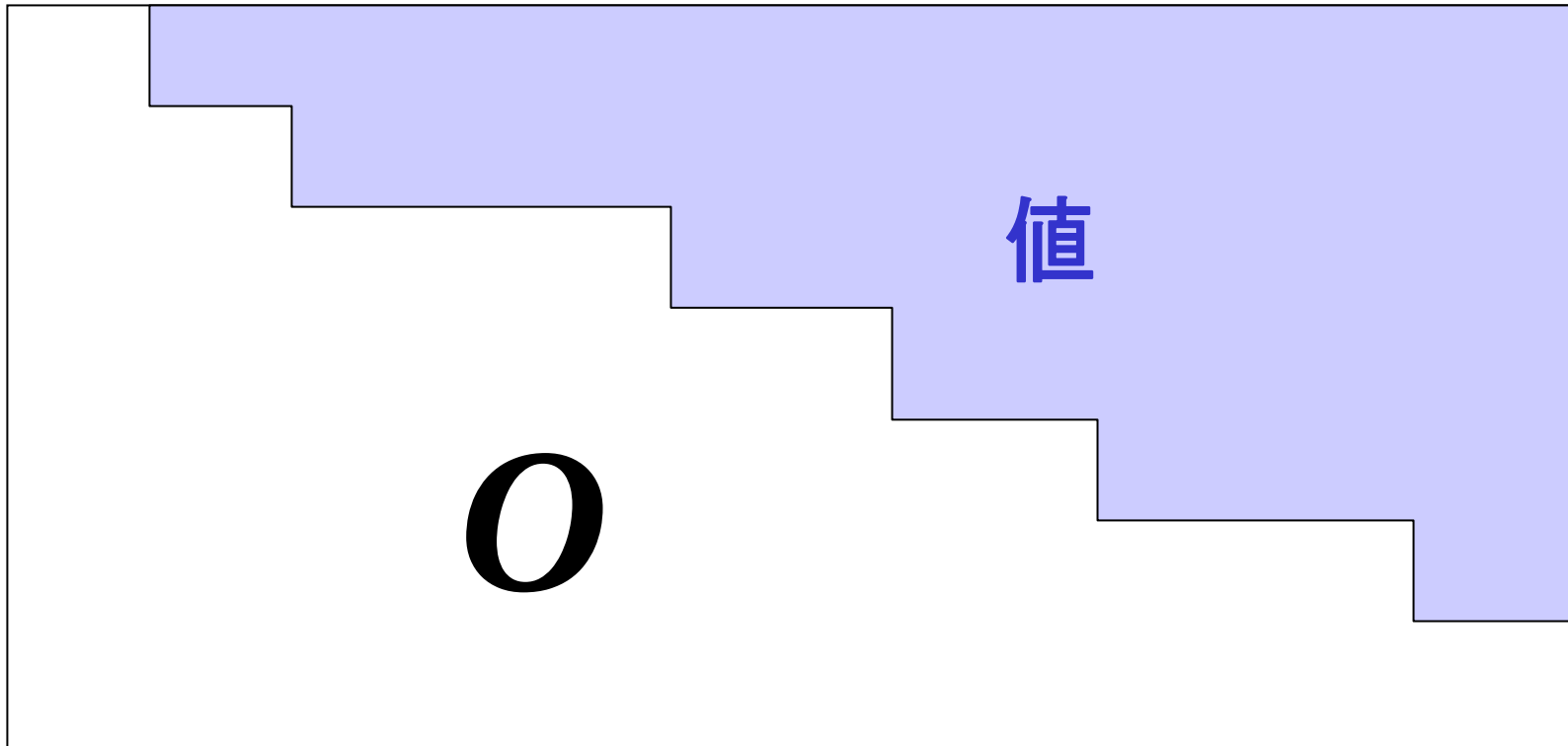
定義(階段行列)

次のような形の行列を**階段行列**とよぶ。

$$\begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j'_1} & & & & & & \\ 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j'_2} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rj'_r} \\ & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & & & & & & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}$$

ただし、 $a_{1j_1} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \dots, a_{rj_r} \neq 0$

階段行列のイメージ

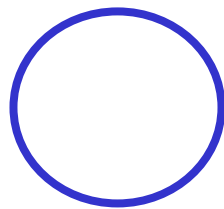


注意:

- (1) 全ての行で、値のある列数は異なる。
- (2) 行ごとに2列以上の違いがあってもよい。

階段行列の例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階段状でない

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 56 & 49 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同じ列数の行
がある。

練習

次の行列が階段行列であるか答えよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 49 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行基本変形と階段行列

(行列の階段行列化)

任意の行列 $A = [a_1 \cdots a_n]$ は、
有限回の行基本変形だけを行うことにより、
階段行列に変形できる。

証明

次のような手順を踏めばよい。

- (1) 第1列から順に、 0 ベクトルでない列 a_{j_1} 探す。
- (2) A の行を入れ替えて、 $(1, j_1)$ 成分が0で無いようにする。
- (3) 第1行に適当なスカラーを掛けて、 $(1, j_1)$ 成分を1にする。
- (4) $2 \leq i \leq m$ に対して、 $(1, j_1)$ 成分で掃き出して、
 (i, j_1) 成分をすべて0にする。

同様に、

- (1) 第 $j_1 + 1$ 列から順に、2行目以降が 0 でない列ベクトル a_{j_2} を探す。
- (2) 行を ($2 \sim m$ 行で) 入れ替えて、 $(2, j_2)$ 成分が 0 で無いようにする。
- (3) 第2行に適当なスカラーを掛けて、 $(2, j_2)$ 成分を 1 にする。
- (4) $3 \leq i \leq m$ に対して、 $(2, j_2)$ 成分で掃き出して、 (i, j_2) 成分をすべて 0 にする。

以下,同様に行なえば、階段行列にできる。

QED

例1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

を階段行列に変形せよ。

基本変形には
「=」と書かないこと。

解)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{(2)-5 \times (1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{(2)-9 \times (1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{-\frac{1}{4} \times (2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{(3)-8 \times (2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 14 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

を階段行列に変形せよ。

解)

(1,1)による掃出し

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 14 & 3 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{(3)-1 \times (2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{(2)+1 \times (4)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{(3) \leftrightarrow (4)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 7 & -1 \\ 0 & -6 & 2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{(3)+6 \times (2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 56 & 49 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

練習

次の行列を階段行列にせよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

階数(rank)

定義(行列の階数)

行列 A を行基本変形で階段行列 A^s に変形したとき、
階段行列 A^s の段数を、元の行列 A の階数といい、

$$\text{rank}(A)$$

と表す。

もちろん、

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^s)$$

であり、そのうえ

変形途中で現れる全ての行列は、
同じ階数を持つ。

練習

次の行列の階数を求めよ。

(1)

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

階数の性質1

定理(階数と転置)

行列 A の階数は、転置しても変わらない。
すなわち、

$$\text{rank}(A) = \text{rank}({}^t A)$$

定理(階数と行数、列数の関係)

行列 A を $m \times n$ 行列とすると、

$$\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階数の性質2

定理(階数と正則行列の積)

行列 A の階数は、正則行列を掛けてもかわらない。
すなわち、 B, C を積の定義できる正則行列すると、
次式が成り立つ。

$$(1) \quad \text{rank}(BA) = \text{rank}(A)$$

$$(2) \quad \text{rank}(AC) = \text{rank}(A)$$

$$(3) \quad \text{rank}(BAC) = \text{rank}(A)$$

A 自身は正則行列でなくてもかまわないことに注意する。さらに、 A は正方行列でなくてもかまわない。

階数の性質3

定理(行列の積と階数)

行列 A と行列 B の積では、階数は変わらないか、あるいは減少する。

すなわち、

$$(1) \quad \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$$

これは、次のようにも記述できる。

$$(2) \quad \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

階数の性質4

定理(階数と正則行列)

n 次の正方行列 A が正則行列であるための
必要十分条件は、

$$\text{rank}(A) = n$$

である。

これまでの、性質は正方行列以外でも成り立つ。
この性質だけ、正方行列と階数の関係を示して
いる。