

3. 正方行列

正方行列

(定義): 正方行列

行と列の数が等しい行列、すなわち

$n \times n$ 行列、 (n, n) 型の行列のことを
 n 次の**正方行列**という。

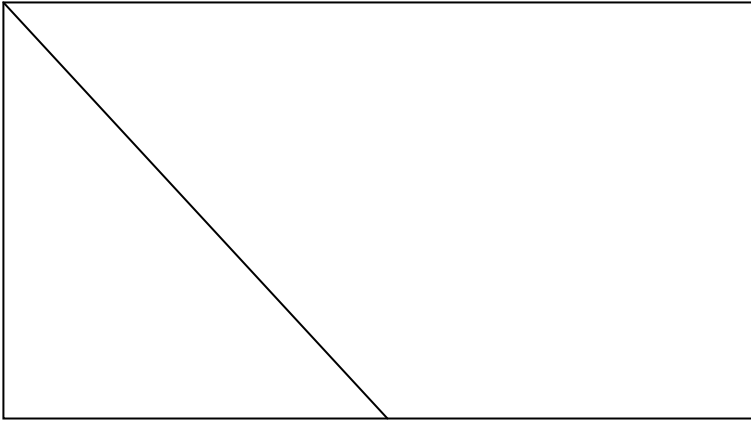
例 $[3]$: 1次の正方行列

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$: 2次の正方行列

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$: 3次の正方行列

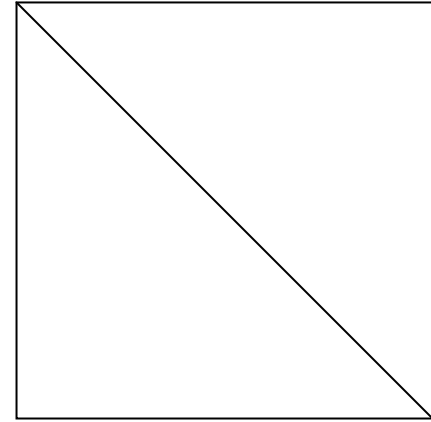
正方行列のイメージ

一般の行列



$m \times n$
長方形

正方行列



$n \times n$
正方形

単位行列

正方行列にしか、単位行列は定義されないので注意すること。

(定義): 単位行列

正方行列のなかで、対角成分が1で、それ以外の成分は0である行列を**単位行列**といい、

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{や} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表す。特に、次数にも注意する際には、

$$E_n \quad I_n$$

と書いて、 n 次の $n \times n$ の単位行列を表す。

例

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_4 = \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

単位行列の性質

(性質): 単位行列との積

A を任意の正方行列、 A と同じ型の単位行列を E とする。ことのき次式が成り立つ。

$$AE = EA = A$$

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AE} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + (-1) \times 0 & 2 \times 0 + (-1) \times 1 \\ 3 \times 1 + 1 \times 0 & 3 \times 0 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{EA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times (-1) + 0 \times 1 \\ 0 \times 2 + 1 \times 3 & 0 \times (-1) + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

練習

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、次の式が成り立つことを確かめよ。

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$$

(正方行列の)トレース

(定義): トレース (固有和)

$A = [a_{ij}]$ に対して、対角成分の総和を
トレースといい、

$\text{tr } A$

と表す。すなわち、

$$\text{tr } A \equiv \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & \color{red}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

例題

次の行列のトレースをそれぞれ求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

解)

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$$

$$\text{tr}(\mathbf{B}) = -2 + 1 + 4 = 3$$

$$\text{tr}(\mathbf{C}) = -3 + 5 + 4 - 2 = 4$$

練習

次の行列のトレースをそれぞれ求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

トレースの性質

(性質):トレースの性質

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ を $n \times n$ 行列とし、 c をスカラーとする。このとき、以下の式が成り立つ。

$$(1) \operatorname{tr}(A \pm B) = \operatorname{tr} A \pm \operatorname{tr} B$$

$$(2) \operatorname{tr}(cA) = c(\operatorname{tr} A)$$

$$(3) \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

$$(4) \operatorname{tr}({}^t A) = \operatorname{tr} A$$

積のチェックに使える。

証明

$$(1) \operatorname{tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \operatorname{tr} \mathbf{A} \pm \operatorname{tr} \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \operatorname{tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \\ &= \operatorname{tr}([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) \\ &= \sum_{i=1}^n ([a_{ii}] \pm [b_{ii}]) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n [a_{ii}] \right) \pm \left(\sum_{i=1}^n [b_{ii}] \right) \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{tr}(c\mathbf{A}) = c(\text{tr}\mathbf{A})$$

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \text{tr}(c\mathbf{A}) \\ &= \text{tr}(c[a_{ij}]) \\ &= \sum_{i=1}^n (c[a_{ii}]) \\ &= c\left(\sum_{i=1}^n [a_{ii}]\right) \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} = [c_{ij}] \quad \mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{A} = [d_{ij}] \quad \text{とする。}$$

$$\text{左辺} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})$$

$$= \text{tr}([c_{ij}])$$

$$= \sum_{i=1}^n ([c_{ii}])$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right)$$

$$\text{右辺} = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$$

$$= \text{tr}([d_{ij}])$$

$$= \sum_{i=1}^n ([d_{ii}])$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^n b_{il} a_{li} \right)$$

よって、左辺＝右辺

(3)のイメージ

$\text{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$

$a_{11}b_{11}$	$a_{12}b_{21}$	$\cdots$	$a_{1k}b_{k1}$	$\cdots$	$a_{1n}b_{n1}$	c_{11}
$a_{21}b_{12}$	$a_{22}b_{22}$					
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	
$a_{l1}b_{1l}$	$\cdots$		$a_{lk}b_{kl}$		$a_{ln}b_{nl}$	c_{ll}
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$	
$a_{n1}b_{1n}$	$\cdots$		$a_{nk}b_{kn}$	$\cdots$	$a_{nn}b_{nn}$	

$\text{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

d_{11}

d_{kk}

$$(4) \quad \text{tr}({}^t\mathbf{A}) = \text{tr}\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \text{tr}({}^t\mathbf{A}) \\ &= \text{tr}({}^t[a_{ij}]) \\ &= \sum_{i=1}^n ({}^t[a_{ii}]) \\ &= \sum_{i=1}^n ([a_{ii}]) \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

QED

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{とする。このとき、}$$

$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ および $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ を確かめよ。

解

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{よって、} \quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = 4 + 0 = 4$$

$$\text{tr}(\mathbf{BA}) = 1 + 3 = 4 \quad \text{よって、} \quad \text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$$

練習

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{とする。このとき、}$$

$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ および $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ を確かめよ。

行列のべき乗

正方行列に対しては、行列のべき乗が定義できる。

(定義): (正方行列の)べき乗

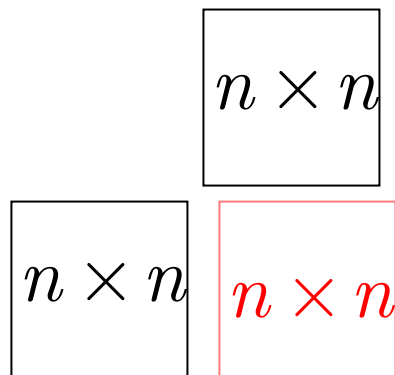
n 次の正方行列 A に対して、

$$A^k \equiv \underbrace{A A \cdots A}_k$$

と定義する。また、

$$A^0 \equiv E_n$$

とする。



n 次の正方行列同士を
乗じると、
また n 次の正方行列になる。

べき等行列

(定義): べき等行列

$AA = A$ となる行列をべき等行列という。

べき等行列は、

$$A^k = A \quad (k \geq 1)$$

も成り立つ。

例

$$(1) \quad \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 6 & 12 - 18 \\ -2 + 3 & -6 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 - 20 & -40 + 50 \\ 8 - 10 & -20 + 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

べき零行列

(定義): べき零行列

$A^k = O$ となる自然数 k が存在するような行列。

べき零行列は、

$$A^{k'} = O \quad (k' \geq k)$$

も成り立つ。

例

$$1. \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

$$2. \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

例2 次の一連の行列はべき零行列である。

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{J}_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{J}_3)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

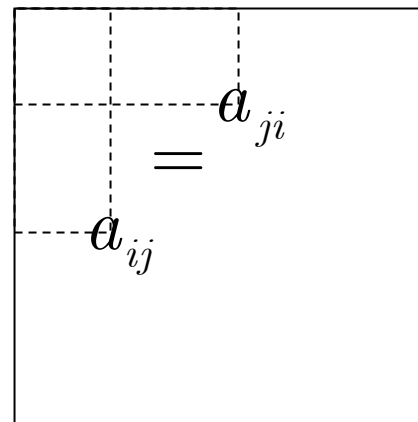
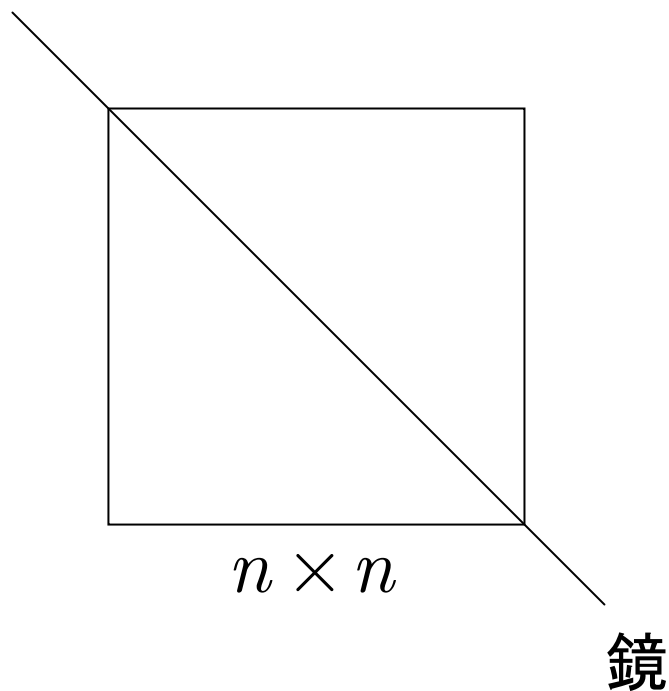
$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{J}_4)^4 = \mathbf{O}$$

対称行列

(定義): 対称行列

${}^tA = A$ なる n 次の正方行列を
(n 次の) 対称行列という。すなわち、

$$A = [a_{ij}] \text{ が対称行列} \iff a_{ij} = a_{ji}$$



対称行列の例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & a & b & c \\ a & y & d & e \\ b & d & z & f \\ c & e & f & w \end{bmatrix}$$

練習

以下の行列はすべて対称行列である。
このとき、 x , y , z を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & x \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 7 & y & 8 \\ 9 & -2 & -1 \\ 8 & x & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & x & 0 \\ y & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & z & 5 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & 1 & x & 2 \\ y & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ z & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

交代行列

(定義): 交代行列

${}^t A = -A$ なる n 次の正方行列を
(n 次の) **交代行列 (歪対称行列)** という。
すなわち、

$$A = [a_{ij}] \text{ が交代行列} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$n \times n$

対角成分は
すべて0

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

交代行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

練習

以下の行列はすべて交代行列である。
このとき、 x , y , z を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & x \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & x & -1 \\ y & z & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -2 \\ x & 0 & 4 & -6 \\ -5 & y & 0 & z \\ 2 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ x & 0 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & 0 & -4 \\ -1 & y & z & 0 \end{bmatrix}$$

対称行列と交代行列の性質1

(性質): 対称行列と交代行列の性質

任意の $n \times n$ 行列 A に対して、

$A + {}^t A$ は対称行列であり、

$A - {}^t A$ は交代行列である。

証明

$${}^t(A + {}^t A) = {}^t A + {}^t({}^t A) = {}^t A + A$$

$${}^t(A - {}^t A) = {}^t A - {}^t({}^t A) = {}^t A - A = -(A - {}^t A)$$

QED

対称行列と交代行列の性質2

(性質): 行列の対称行列と交代行列への分解

任意の正方行列 A は、対称行列と交代行列の和で表現できる。

証明

$A + {}^t A$ は対称行列であり、

$A - {}^t A$ は交代行列である。

よって、

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^t A) + \frac{1}{2}(A - {}^t A)$$

QED

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -6 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

練習

次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

正則行列(重要)

(定義): 正則行列

$n \times n$ 行列 A に対して、

$$AX = XA = E$$

を満たす正方行列 X があるとき、
 A を **正則行列** という。また、このとき、
 X を A の **逆行列** といい、

A^{-1}
と書く。

逆行列が存在する行列が正則行列である。
正則行列の逆行列もまた正則行列である。

正則行列の性質1

(性質): 逆行列の一意性

正則な行列 A の逆行列は唯一つ存在する。

証明) 背理法による。

2つの逆行列 $X_1, X_2 (\neq X_1)$ が存在すると仮定する。(背理法の仮定)

定義より、 $AX_1 = X_1A = E \quad \dots(1)$

$$AX_2 = X_2A = E \quad \dots(2)$$

が成り立つ。ここで、(1)の両辺に X_2 を左から乗じる。

$$AX_1 = E$$

$$\therefore X_2(AX_1) = X_2E$$

$$\therefore (X_2A)X_1 = X_2$$

$$\therefore EX_1 = X_2$$

$$\therefore X_1 = X_2$$

これは矛盾である。

QED 37

正則行列の性質2

(性質): 正則行列と演算

A, B を $n \times n$ の正則行列とする。
このとき、次式が成り立つ。

(1) A^{-1} も正則行列であり、 $(A^{-1})^{-1} = A$ 。

(2) AB も正則行列であり、 $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$ 。

(3) ${}^t A$ も正則行列であり、 $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$ 。

証明

$$(1) \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$C \equiv A^{-1} \quad \text{とおく。}$$

$$CA = A^{-1}A = E$$

$$AC = AA^{-1} = E$$

よって、定義より A は C の逆行列。

$$\therefore A = C^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

$$(2) \quad (AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$$

$C \equiv AB$ とおく。

$$C(B^{-1}A^{-1}) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})C = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BEB^{-1} = BB^{-1} = E$$

よって、定義より $(B^{-1}A^{-1})$ は C の逆行列。

$$(B^{-1})(A^{-1}) = C^{-1} = (AB)^{-1}$$

$$(3) \quad \left({}^t \mathbf{A}\right)^{-1} = {}^t \left(\mathbf{A}^{-1}\right)$$

$$\mathbf{C} \equiv {}^t \mathbf{A} \text{ とおく。}$$

$$\mathbf{C} {}^t \left(\mathbf{A}^{-1}\right) = {}^t \mathbf{A} {}^t \left(\mathbf{A}^{-1}\right) = {}^t \left(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}\right) = {}^t \mathbf{E} = \mathbf{E}$$

$${}^t \left(\mathbf{A}^{-1}\right) \mathbf{C} = {}^t \left(\mathbf{A}^{-1}\right) {}^t \mathbf{A} = {}^t \left(\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}\right) = {}^t \mathbf{E} = \mathbf{E}$$

よって、定義より ${}^t \left(\mathbf{A}^{-1}\right)$ は $\mathbf{C}$ の逆行列。

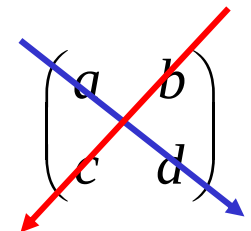
$${}^t \left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{C}^{-1} = \left({}^t \mathbf{A}\right)^{-1}$$

QED

2次の逆行列(復習)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$|A|$ の求め方

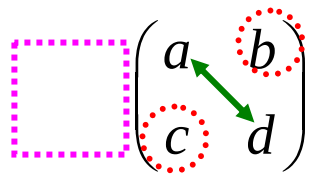


乗算する符号が正
乗算して符号が負

$|A| = ad - bc$

A^{-1} の求め方

$|A| \neq 0$ を確認して、



交換
乗算して符号が負

$\frac{1}{|A|}$ 倍

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

に対して、次式が成り立つことを確かめよ。

$$(1) (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \quad (2) (\mathbf{AB})^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})(\mathbf{A}^{-1}) \quad (3) ({}^t\mathbf{A})^{-1} = {}^t(\mathbf{A}^{-1})$$

解)

$$(1) \quad |\mathbf{A}| = 7 \times (-2) - 5 \times (-3) = 1$$

$$\therefore \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}^{-1}| = 1$$

$$\therefore (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) (\mathbf{AB})^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})(\mathbf{A}^{-1})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{AB}| = 17 \times 2 - (-5)(-7) = -1$$

$$\therefore (\mathbf{AB})^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -7 & -17 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = 1 \times (-1) - 0 = -1$$

$$\therefore \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -7 & -17 \end{bmatrix}$$

$$(3) \left({}^t\mathbf{A}\right)^{-1} = {}^t\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left|{}^t\mathbf{A}\right| = 7 \times (-2) - (-3) \times 5 = 1$$

$$\therefore \left({}^t\mathbf{A}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore {}^t\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

n 次の逆行列について

- 一般の n 次の逆行列は、
2次の逆行列を求める時のように、
簡単に求めることはできない。

2次

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{公式}} A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

n 次

$$A \longleftrightarrow A' \longleftrightarrow A'' \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow A^{-1}$$

行列の行基本変形