

0章 数学基礎

1

大学では、高校より厳密に議論を行う。そのために、議論の対象を明確にする必要がある。

集合

(定義)集合

物の集まりである集合Xに対して、Xを構成している物をXの要素または元という。

集合については、
3セメスタ開講の「離散数学」で詳しく扱う。

2

集合の表現

1. 要素を明示する表現。
(外延的表現)

中括弧で、囲う。

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

慣用的に、
英大文字を用いる。

カンマで区切る

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

自然数の集合

類推が容易なとき、
...で表す。

3

2. (必要十分)条件での表現。
(内包的表現)

$$Y = \{x \mid P(x)\}$$

代表元、
慣用的に英小文字

真偽が判定できる文(命題)、
すなわち必要十分条件

$$K = \{n \mid n \geq 100, n \text{ は偶数}\}$$

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ は整数}, q \neq 0 \right\}$$

4

空集合

(定義)空集合

要素が一つも無いようなものも集合と考え、
それを**空集合**といい、
 ϕ あるいは $\{\}$
と表す。

$$\phi = \{\}$$

要素が一つも無いので、
括弧だけを記述する。

5

慣用的な集合の記号

$$N = \{x \mid x \text{ は自然数}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z = \{x \mid x \text{ は整数}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Q = \{x \mid x \text{ は有理数}\}$$

$$R = \{x \mid x \text{ は実数}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ は複素数}\}$$

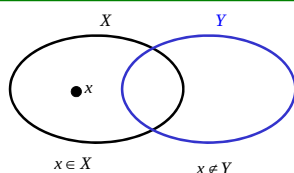
これらの記号は万国共通に用いられる。

6

集合の要素

(定義)集合の要素

集合 X に対して、 x が X の要素であることを、
 $x \in X$
 と表し、
 集合 X に対して、 x が X の要素でないことを、
 $x \notin X$
 と表す。



7

例題

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

- (1) $1 \in A$ (2) $2 \in A$ (3) $3 \notin A$
 (4) $4 \notin A$ (5) $5 \in A$ (6) $6 \in A$

解

(1) ○ (2) × (3) ×
 (4) ○ (5) ○ (6) ×

8

練習

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

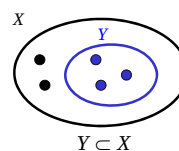
- (1) $10 \in N$ (2) $-1 \in N$ (3) $132124 \notin N$
 (4) $3.4 \notin N$ (5) $10 \times 4 + 3 \in N$ (6) $10 \div 4 + 3 \in N$

9

部分集合

(定義)部分集合

2つの集合 X, Y について、
 $y \in Y \Rightarrow y \in X$
 が成り立つとき、
 Y は X の部分集合であるといい、
 $Y \subset X$ または $Y \subseteq X$
 と表す。



10

例題

次の集合において、
 部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{3, 5\}$$

$$D = \{2, 3, 5, 7\}$$

解

$$A \subseteq A, B \subseteq A, C \subseteq A$$

$$B \subseteq B, C \subseteq B$$

$$C \subseteq C$$

$$C \subseteq D, D \subseteq D$$

11

練習

次の集合において、
 部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$N$$

$$A = \{x \mid x \text{ は } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ の解}\}$$

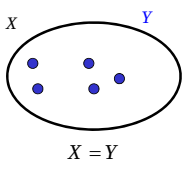
$$B = \{x \mid x \text{ は素数}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ は奇数}\}$$

12

集合の相等

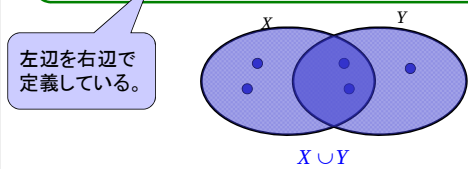
(定義) 集合の相等
2つの集合 X, Y について、
 $Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq Y$
が成り立つとき、
 X と Y は「等しい」といい、
 $X = Y$
と表す。



13

和集合

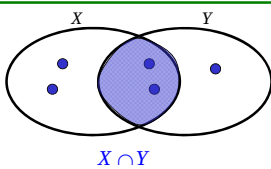
(定義) 和集合
2つの集合 X, Y について、
 X または Y の要素全体からなる集合を
 X と Y の和集合といい、
 $X \cup Y$
と表す。すなわち、
 $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$



14

共通部分

(定義) 共通部分
2つの集合 X, Y について、
 X と Y のどちらにも含まれる要素全体からなる集合を
 X と Y の共通部分(積集合)といい、
 $X \cap Y$
と表す。すなわち、
 $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$



15

例題

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 3, 5\}$
 $C = \{3, 5\}$ $D = \{2, 3, 5, 7\}$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

- (1) $A \cup D$ (2) $A \cap B$ (3) $B \cup D$ (4) $A \cap B \cap C$

解

- (1) $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
(2) $A \cap B = \{1, 3, 5\}$
(3) $B \cup D = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
(4) $A \cap B \cap C = \{3, 5\}$

16

練習

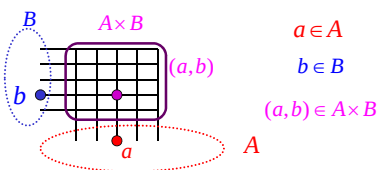
$A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 3, 5\}$
 $C = \{3, 6, 9\}$ $D = \{5, 7, 8, 9\}$
とする。このとき、以下の集合を求めよ。

- (1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$
(3) $B \cup D$ (4) $A \cap D$
(5) $A \cup B \cup C$ (6) $B \cup C \cup D$

17

直積集合

(定義) 直積
 n 個の集合 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に対して、
次の集合
 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i (i=1, 2, \dots, n)\}$
を $X_1, X_2, \dots, X_n$ の直積(直積集合)といい、
 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$
と表す。



18

例題

$A = \{3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$
とする。このとき、 $A \times B$ と $B \times A$ を求めよ。

解

$A \times B = \{(3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}$
 $B \times A = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$

$A \times B \neq B \times A$

19

練習

$A = \{1, 2\}$ $B = \{3, 6\}$ $C = \{k, l\}$
とする。このとき、以下の集合を求めよ。

- (1) $A \times B$

(3) $B \times C$

(5) $A \times B \times C$
- (2) $B \times A$

(4) $A \times A$

(6) $A \times C \times B$

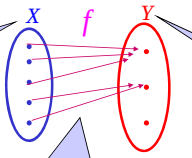
20

写像

(定義) 写像

2つの集合 X, Y について、 X の各要素に Y のある要素(1つ)が対応づけられているとき、この対応づけのことを X から Y への写像(関数)という。
 f が X から Y への写像を
 $f : X \rightarrow Y$
と表す。

定義域とい
います。



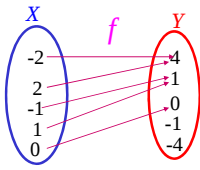
値域とい
います。

行き先は一箇所

21

(定義) 要素の像

2つの集合 X, Y に対する写像 $f : X \rightarrow Y$ とする。このとき、 X の要素 x ($x \in X$) に対応する Y の要素を $f(x)$ と表す。(このときは、もちろん $f(x) \in Y$ である。)



$f(-1) = 1$

対応関係を式で定めることもあるが、式でなくても写像は定義できる。
 $x \in X$ に対して、 $f(x) = x^2 \in Y$

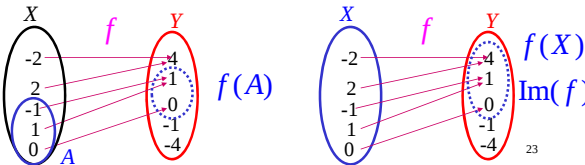
代表元とい
います。

22

像

(定義) 定義域の像

写像 $f : X \rightarrow Y$ の定義域 X の部分集合 A ($A \subseteq X$) に対して、値域 Y の部分集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ を写像 f による A の像(Image)といい、 $f(A)$ と表す。また、 $A = X$ のとき、 $f(X)$ を $\text{Im}(f)$ と表す。



23

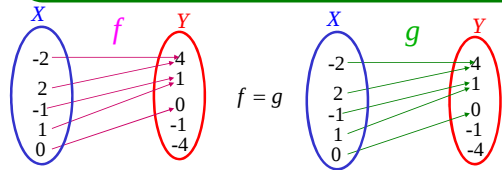
写像の相等

(定義) 写像の相等

集合 X から Y への2つの写像 f, g は、
 $(f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y)$

任意の $x \in X$ に対して、 $f(x) = g(x)$

が成り立つときに「等しい」といい、
 $f = g$
と表す。



24

単射

(定義) 単射

集合 X から Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ が、

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

を満たすとき、 f は**単射(写像)**であるという。

単射

単射でない

対応元が1つ

25

全射

(定義) 全射

集合 X から Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ が、

$$f(X) = Y$$

を満たすとき、 f は**全射(写像)**であるという。
または、**上への写像**ともいう。

全射

全射でない

値域に“余り”がない。

26

全単射

(定義) 全単射

単射かつ全射であるような写像を、**全単射(写像)**という。
また、全単射は、**1対1上への写像**ともいう。

全単射

値域に“余り”がなく、
値域の各元がちょうどひとつの
定義域の元に対応している。

27

合成写像

(定義) 合成写像

集合 X, Y, Z に対して、2つの写像
 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$
があるとき、 X の各要素 x を Z の要素 $g(f(x))$
に対応させることにより X から Z への写像ができる。
これを、 f, g の合成写像といい、
 $g \circ f$
と表す。すなわち、
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
である。

28

逆像

(定義) 逆像

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、 Y の部分集合 B をとると、
 $\{x \mid f(x) \in B\}$
は X の部分集合である。これを、 f による B の**逆像**といい
 $f^{-1}(B)$
と表す。すなわち、
 $f^{-1}(B) \equiv \{x \mid f(x) \in B\}$

29

逆写像

(定義) 逆写像

写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば、 Y の各要素 y に
対して、 X の要素 $f^{-1}(y)$ を対応させる写像を定義できる。
これを、 f の逆写像といい、 f^{-1} と表す。

全単射

逆写像

矢印を反対にする。

30

1章 行列と行列式

31

行列の定義

(定義) 行列
数(実数)を縦横をそろえて並べたもの。

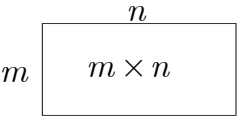
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

縦が m 行、横が n 列あるとき、
 $m \times n$ 行列という。

32

行列の型(大きさ)

(定義) 行列の型
行数 $\times$ 列数を行列の型あるいは大きさという。
 m 行 n 列の行列を、
 $m \times n$ 行列
あるいは
 (m, n) 型行列
という。



33

例

2行3列の行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(3, 3) 型行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

4 x 3 行列

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

34

練習

次の行列の型を答えよ。

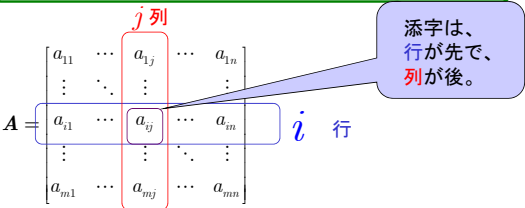
(1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $[4]$

(4) $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

35

行列の成分

(定義) 行列の成分
 i 行 j 列の要素 a_{ij} を (i, j) 要素 ((i, j) 成分) という。



行列を (i, j) 成分だけに注目して、

$$A = [a_{ij}]$$

のように表すこともある。

36

ベクトル

(定義)ベクトル

大きさが、 $1 \times n$ あるいは、 $m \times 1$ の行列をベクトルという。 $1 \times n$ のベクトルを行ベクトル(row vector)という。

$$\mathbf{r} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

 $m \times 1$ のベクトルを列ベクトル(column vector)という。

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

37

行列と行ベクトル

 $m \times n$ 行列は、 m 個の n 次元行ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

ただし、 $1 \leq i \leq m$ に対して、 $\mathbf{r}_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$

38

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$\mathbf{r}_1 = [3 \quad 2 \quad 5] = (3, 2, 5)$$

$$\mathbf{r}_2 = [4 \quad 1 \quad -1] = (4, 1, -1)$$

$$\mathbf{r}_3 = [2 \quad 1 \quad 0] = (2, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_4 = [7 \quad -3 \quad -2] = (7, -3, -2)$$

39

行列と列ベクトル

 $m \times n$ 行列は、 n 個の m 次元列ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{c}_n]$$

$$\text{ただし、} 1 \leq j \leq n \text{ に対して、} \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

40

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3] \text{ とする。}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

41

例

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

このとき、

$$a_{11} = 3$$

$$a_{23} = -1$$

$$a_{41} = 7$$

42

例

$A = [a_{ij}]$ を 3×4 行列とし、 $a_{ij} = i + j$ とする。

このとき、

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

43

練習

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]$$
 とする。

次に答えよ。

(1) $(1, 1)$ 成分、 $(2, 3)$ 成分、 $(5, 2)$ 成分

(2) 値が11である成分、値が9である成分、
値が3である成分の集合

(3) a_{34}, a_{53}, a_{44}

(4) r_2, r_5

(5) c_3

44

練習

$r_1 = [-2 \ 6 \ 3], r_2 = [2 \ 3 \ -1], r_3 = [-3 \ 8 \ 2],$
 $r_4 = [9 \ 0 \ -5]$ とする。

このとき、 $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$ を求めよ。

45

練習

$A = [a_{ij}]$ を 4×3 行列とし $a_{ij} = 10i + j$ とする。

このとき、 A を求めよ。

46

行列の相等

(定義) 行列の相等

2つの行列 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ が次の(1)、(2)を満たすとき、
「等しい」といい、
 $A = B$
と書く。

(1) A と B の大きさが等しい。

(2) すべての (i, j) 成分について $a_{ij} = b_{ij}$ である。

47

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

48

練習

次の行列の集合から、等しい行列の組をすべて求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

49

行列の演算

行列の加法

(定義) 行列の加法

同じ型 ($m \times n$) の行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ に対して、その和 $A + B$ を

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 $A + B$ も $m \times n$ の型になることに注意する。

50

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

51

和が計算できない行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

52

行列の性質1

(性質) 行列の和に関する性質

A, B, C を全て同じ型の行列とする。このとき、次が成り立つ。

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (結合法則)

(2) $A + B = B + A$ (交換法則)

(3) $A + O = O + A = A$ (加法単位元)

(4) $A + (-A) = (-A) + A = O$ (加法逆元)

53

零行列

(定義) 零行列

すべての成分が0である行列を零行列といい、

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

で表す。特に、型にも注意する際には、

$$O_{mn}$$

と書いて、 $m \times n$ 型の零行列を表す。

54

例

$$O = O_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O = O_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = O_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

55

加法逆元

(定義) 加法逆元

 $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、
 $m \times n$ 行列

$$-A = [-a_{ij}]$$

を加法逆元という。このとき、

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}$$

が成り立つ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

56

行列のスカラー倍

(定義) 行列のスカラー倍

スカラー $k \in R$ に対して、 $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ の k 倍を

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 kA の大きさも $m \times n$ になることに注意する。

57

例

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 12 & -3 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

58

行列の性質2

(性質) 行列のスカラー倍に関する性質

 A, B を同じ型の行列とし、 $k, l \in R$ とする。
このとき、次が成り立つ。

- (1) $(k+l)A = kA + lA$ (行列のスカラー倍への分配法則)
- (2) $k(A+B) = kA + kB$ (スカラーの行列への分配法則)
- (3) $(kl)A = k(lA)$ (結合法則)
- (4) $1A = A$ (公等法則)
- (5) $0A = O$ (零倍)

59

練習

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、行列演算の法則を用いることにより、
次を計算せよ。

- (1) $2A + B - 2(B + A)$
- (2) $5A + B - 3(2B + 2C) + 6C$
- (3) $3((A - B) + (B - C) + (C - A))$

60

行列の積

(定義) 行列の積

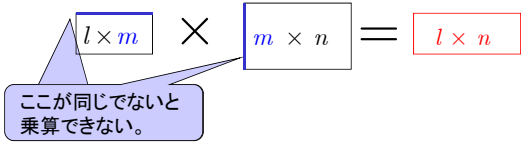
$l \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$ と $m \times n$ 行列 $B = [b_{ij}]$ に対して、その積である $C = AB = [c_{ij}]$ を

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}$$
$$(1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n)$$

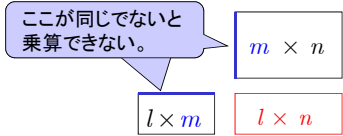
となる行列とする。
ここで、 $C = AB$ の型は
 $l \times n$
になる。

61

行列積の覚え方

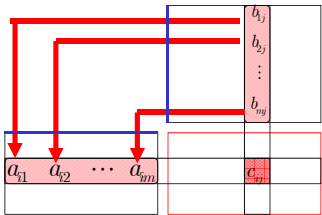


(1) まず、出来上がる行列の型をきめる。



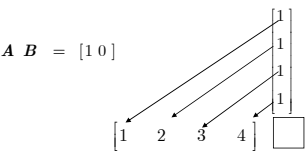
62

(2) 個々の成分を求める。



63

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする。



$$AB = [1 \ 0]$$
$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

64

練習

次の行列の中から、積が定義できるものに対して、積を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

65

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質 1

積が定義できる行列に関して、次が成り立つ。

- (1) $(AB)C = A(BC)$ (結合法則)
- (2) $A(B + C) = AB + AC$ (左分配法則)
- (3) $(A + B)C = AC + BC$ (右分配法則)
- (4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (スカラーの移動)

このような移動ができるのは、スカラーに対してだけであることに、注意すること。

66

例題

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

- (1) $(AB)C = A(BC)$
- (2) $A(B+C) = AB+AC$
- (3) $(A+B)C = AC+BC$
- (4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

67

解) (1) $(AB)C = A(BC)$

$$\text{左辺: } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{右辺: } BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

$$\text{これより、} (AB)C = A(BC) = ABC$$

と書いても誤解が無い。

68

$$(2) A(B+C) = AB+AC$$

$$\text{左辺: } B+C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{右辺: } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AB+AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

69

$$(3) (A+B)C = AC+BC$$

$$\text{左辺: } A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(A+B)C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{右辺: } AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AC+BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

70

$$(4) k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

$$k(AB) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$kA = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (kA)B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$kB = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(kB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、成り立つ。

71

練習

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = -1, \quad l = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

- (1) $(AB)C = A(BC)$
- (2) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- (3) $l(BC) = (lB)C = B(lC)$

72

練習

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix},$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) A(C + D) = AC + AD$$

$$(2) B(C + D) = BC + BD$$

$$(3) (A + B)C = AC + BC$$

$$(4) (A + B)D = AD + BD$$

73

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質2

$$AB \neq BA$$

となる行列A、行列Bがある。

行列の積では、交換法則は成り立たない。

74

例題

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{とする。}$$

$AB \neq BA$ を確かめよ。

$$\text{解) 左辺} = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 24 \\ -3 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 25 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \\ -6 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

よって、左辺 $\neq$ 右辺

75

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質3

$AB = O$ でも、

$$A = O \quad \text{または} \quad B = O$$

とは限らない。すなわち、

$$A \neq O \quad \text{かつ} \quad B \neq O$$

でも、

$$AB = O$$

となることがある。

76

例題

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

$AB = O$ を確かめよ。

解)

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

77

転置行列

(定義) 転置行列

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、 $n \times m$ 行列 $B = [b_{ij}]$ を

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

と定める。このとき、 B を A の転置行列といい、

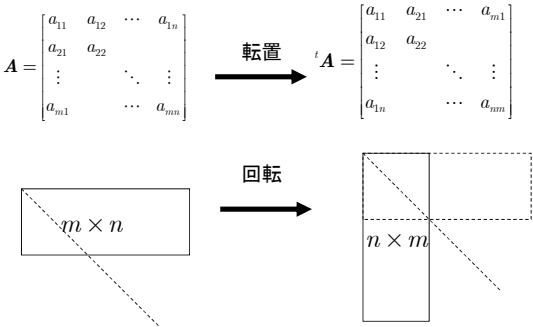
$${}^t A$$

と表す。すなわち、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad {}^t A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

78

転置行列のイメージ



79

例

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^tA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^tB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^tC = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

80

練習

次の行列の転置行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

81

転置行列の性質

- (性質) 転置行列の性質
- A, B を $l \times m$ 行列とし、 C を $m \times n$ 行列とし、 $k \in R$ とする。このとき、次が成り立つ。
- (1) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ (和と転置の交換)
 - (2) ${}^t(kA) = k({}^tA)$ (スカラー倍と転置の交換)
 - (3) ${}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA)$ (積と転置の交換)
 - (4) ${}^t({}^t(A)) = A$ (転置の交代性)

82

証明

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ を $l \times m$ 行列とする。

(1) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

左辺	$= {}^t(A + B)$	右辺	$= {}^tA + {}^tB$
	$= {}^t([a_{ij}] + [b_{ij}])$		$= {}^t[a_{ij}] + {}^t[b_{ij}]$
	$= {}^t([a_{ji} + b_{ji}])$		$= [a_{ji}] + [b_{ji}]$
	$= [a_{ji} + b_{ji}]$		$= [a_{ji} + b_{ji}]$

よって、左辺=右辺

83

(2) ${}^t(kA) = k({}^tA)$

左辺	$= {}^t(kA)$	右辺	$= k({}^tA)$
	$= {}^t(k[a_{ij}])$		$= k({}^t[a_{ij}])$
	$= {}^t([ka_{ij}])$		$= k[a_{ji}]$
	$= [ka_{ji}]$		$= [ka_{ji}]$

よって、左辺=右辺

84

$C = [c_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とする。

$$(3) \quad {}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA)$$

$D = [d_{ij}] = AC$ とする。すなわち、

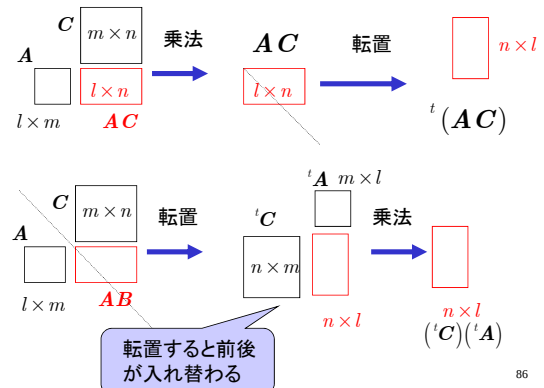
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= {}^t(AC) & \text{右辺} &= ({}^tC)({}^tA) \\ &= {}^t([d_{ij}]) & &= [{}^t c_{kj}] [{}^t a_{ik}] \\ &= [d_{ji}] & &= [c_{jk}] [a_{ki}] \\ &= \left[\sum_{k=1}^m a_{jk} c_{ki} \right] & &= \left[\sum_{k=1}^m c_{jk} a_{ki} \right] \end{aligned}$$

よって、左辺=右辺

85

(3)のイメージ

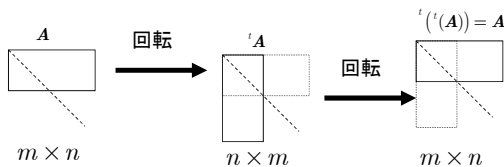


86

$$(4) \quad {}^t({}^t(A)) = A$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= {}^t({}^tA) \\ &= {}^t({}^t[a_{ij}]) \\ &= {}^t[a_{ji}] \\ &= [a_{ij}] \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

QED



87

例題

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

- (1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- (2) ${}^t(kA) = k({}^tA)$
- (3) ${}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA)$
- (4) ${}^t({}^t(A)) = A$

88

解) (1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

$$\text{左辺} = {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

∴ 左辺=右辺

$$(2) \quad {}^t(kA) = k({}^tA)$$

$$\text{左辺} = {}^t\left(3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = 3\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

∴ 左辺=右辺

89

$$(3) \quad {}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA)$$

$$\text{左辺} = {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = {}^t\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ 左辺=右辺

$$(4) \quad {}^t({}^t(A)) = A$$

$$\text{左辺} = {}^t\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{右辺}$$

90