

0章 数学基础

大学では、高校より厳密に議論を行う。そのために、議論の対象を明確にする必要がある。

集合

(定義) 集合

物の集まりである集合 X に対して、 X を構成している物を X の要素または元という。

集合については、
3セメスタ開講の「離散数学」で詳しく扱う。

集合の表現

1. 要素を明示する表現。
(外延的表現)

中括弧で、囲う。

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

慣用的に、
英大文字を用いる。

カンマで区切る

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

自然数の集合

類推が容易なとき、
…で表す。

2. (必要十分)条件での表現。 (内包的表現)

$$Y = \{x \mid P(x)\}$$

代表元、
慣用的に英小文字

真偽が判定できる文(命題)、
すなわち必要十分条件

$$K = \{n \mid n \geq 100, n \text{ は偶数}\}$$

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ は整数}, q \neq 0 \right\}$$

空集合

(定義) 空集合

要素が一つもないようなものも集合と考え、
それを**空集合**といい、
 ϕ あるいは $\{\}$
と表す。

$$\phi = \{\}$$

要素が一つもないので、
括弧だけを記述する。

慣用的な集合の記号

$$\boldsymbol{N} = \{x \mid x \text{は自然数}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\boldsymbol{Z} = \{x \mid x \text{は整数}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\boldsymbol{Q} = \{x \mid x \text{は有理数}\}$$

$$\boldsymbol{R} = \{x \mid x \text{は実数}\}$$

$$\boldsymbol{C} = \{x \mid x \text{は複素数}\}$$

これらの記号は万国共通に用いられる。

集合の要素

(定義) 集合の要素

集合 X に対して、 x が X の要素であることを、

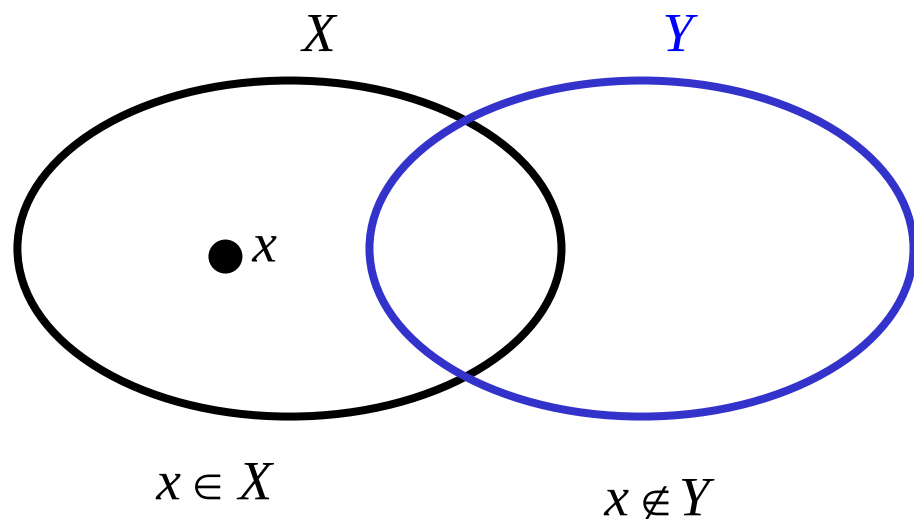
$$x \in X$$

と表し、

集合 X に対して、 x が X の要素で無いことを、

$$x \notin X$$

と表す。



例題

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

(1)

$$1 \in A$$

(2)

$$2 \in A$$

(3)

$$3 \notin A$$

(4)

$$4 \notin A$$

(5)

$$5 \in A$$

(6)

$$6 \in A$$

解

$$(1) \bigcirc (2) \times (3) \times$$

$$(4) \bigcirc (5) \bigcirc (6) \times$$

練習

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

(1)

$$10 \in N$$

(2)

$$-1 \in N$$

(3)

$$132124 \notin N$$

(4)

$$3.4 \notin N$$

(5)

$$10 \times 4 + 3 \in N$$

(6)

$$10 \div 4 + 3 \in N$$

部分集合

(定義) 部分集合

2つの集合 X, Y について、

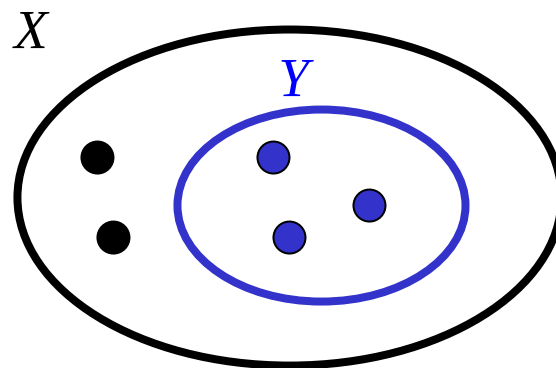
$$y \in Y \Rightarrow y \in X$$

が成り立つとき、

Y は X の部分集合であるといい、

$$Y \subset X \text{ または } Y \subseteq X$$

と表す。



$$Y \subseteq X$$

例題

次の集合において、
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{3, 5\}$$

$$D = \{2, 3, 5, 7\}$$

解

$$A \subseteq A, \quad B \subseteq A, \quad C \subseteq A$$

$$B \subseteq B, \quad C \subseteq B$$

$$C \subseteq C$$

$$C \subseteq D, \quad D \subseteq D$$

練習

次の集合において、
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$N$$

$$A = \{x \mid x \text{は} x^2 - 5x + 6 = 0 \text{の解}\}$$

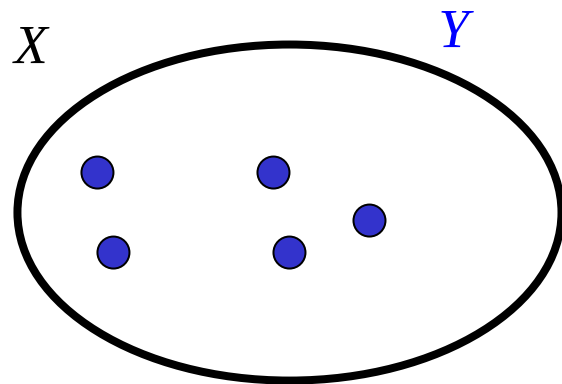
$$B = \{x \mid x \text{は素数}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{は奇数}\}$$

集合の相等

(定義) 集合の相等

2つの集合 X, Y について、
 $Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq Y$
が成り立つとき、
 X と Y は「等しい」といい、
 $X = Y$
と表す。



$$X = Y$$

和集合

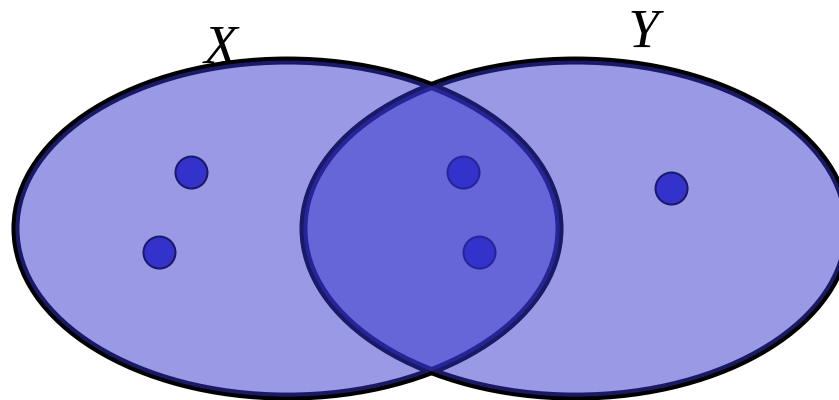
(定義)和集合

2つの集合 X, Y について、
 X または Y の要素全体からなる集合を
 X と Y の和集合といい、

$X \cup Y$
と表す。すなわち、

$$X \cup Y \equiv \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$$

左辺を右辺で
定義している。



$X \cup Y$

共通部分

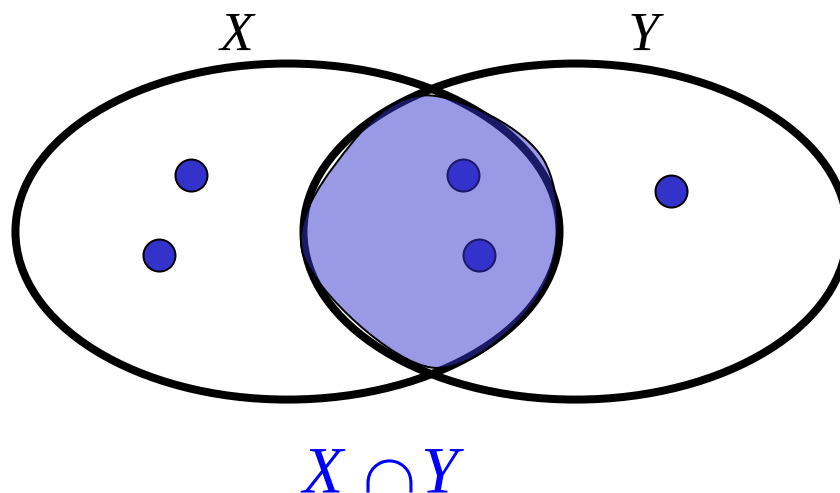
(定義) 共通部分

2つの集合 X, Y について、

X と Y のどちらにも含まれる要素全体からなる集合を
 X と Y の**共通部分(積集合)**といい、

$X \cap Y$
と表す。すなわち、

$$X \cap Y \equiv \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$$



例題

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{3, 5\} \quad D = \{2, 3, 5, 7\}$$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

$$(1) A \cup D \quad (2) A \cap B \quad (3) B \cup D \quad (4) A \cap B \cap C$$

解

$$(1) A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$(2) A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

$$(3) B \cup D = \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$(4) A \cap B \cap C = \{3, 5\}$$

練習

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{3, 6, 9\}$$

$$D = \{5, 7, 8, 9\}$$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

$$(1) \quad A \cup B$$

$$(2) \quad A \cap B$$

$$(3) \quad B \cup D$$

$$(4) \quad A \cap D$$

$$(5) \quad A \cup B \cup C$$

$$(6) \quad B \cup C \cup D$$

直積集合

(定義) 直積

n 個の集合 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に対して、

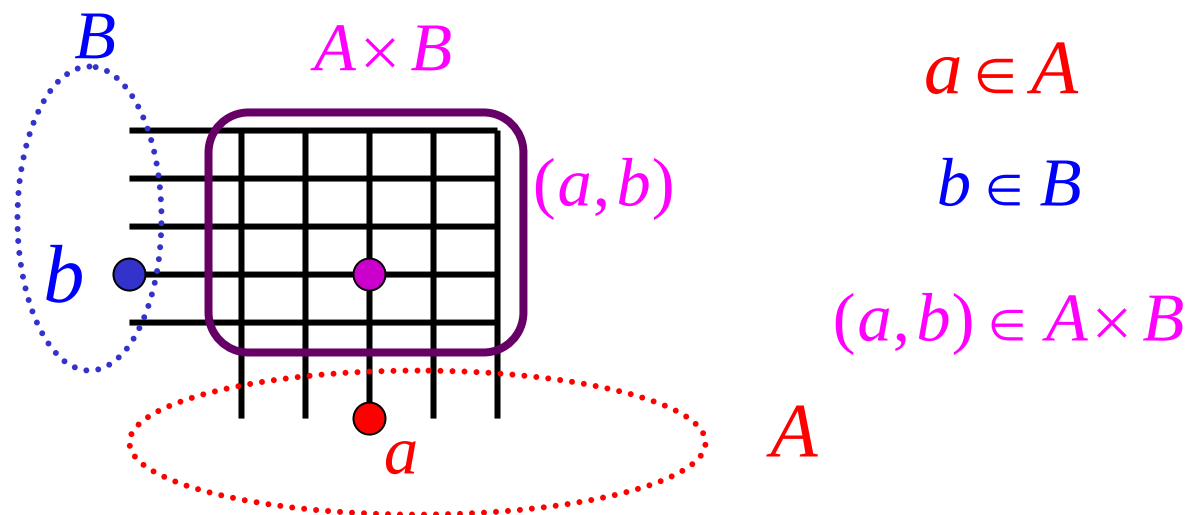
次の集合

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

を $X_1, X_2, \dots, X_n$ の **直積 (直積集合)** といい、

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

と表す。



例題

$$A = \{3, 4, 5\} \quad B = \{2, 3\}$$

とする。このとき、 $A \times B$ と $B \times A$ を求めよ。

解

$$A \times B = \{(3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}$$

$$B \times A = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

練習

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{3, 6\} \quad C = \{k, l\}$$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

$$(1) \quad A \times B$$

$$(2) \quad B \times A$$

$$(3) \quad B \times C$$

$$(4) \quad A \times A$$

$$(5) \quad A \times B \times C$$

$$(6) \quad A \times C \times B$$

写像

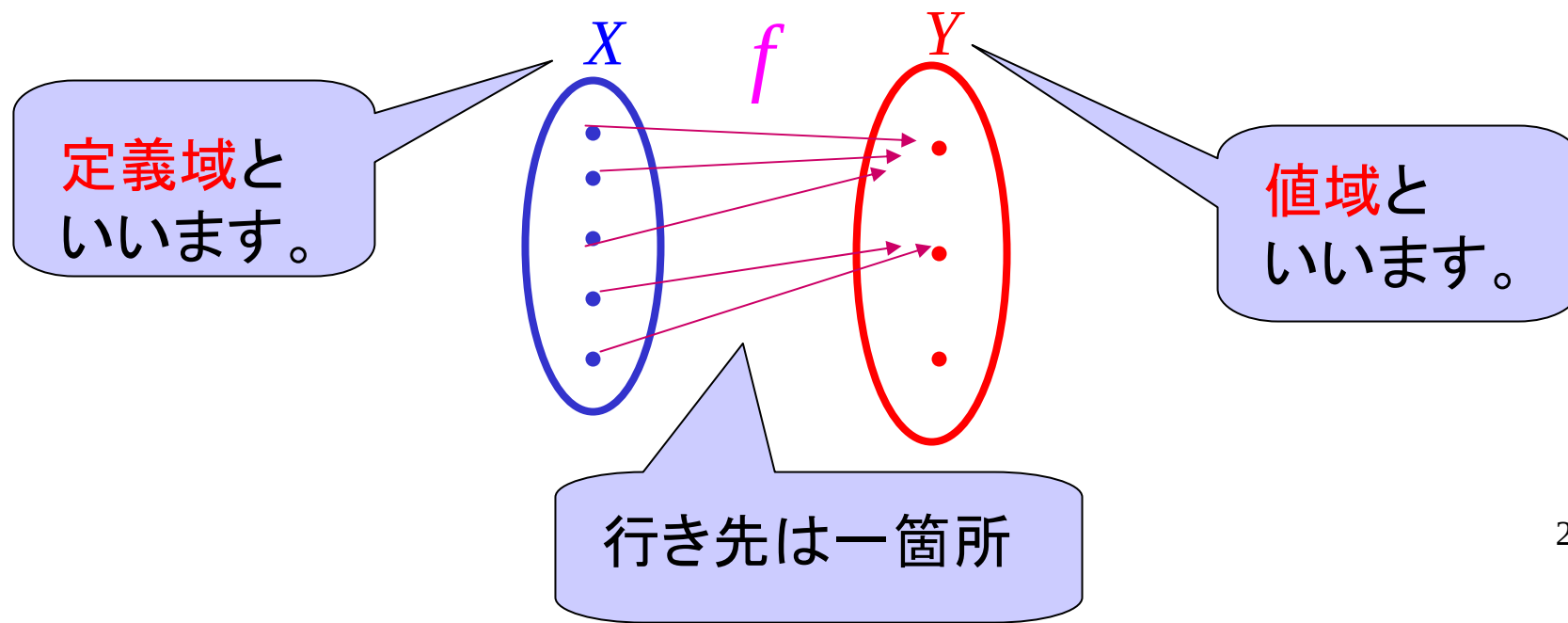
(定義) 写像

2つの集合 X, Y について、 X の各要素事に Y のある要素(1つ)が対応づけられているとき、この対応づけのことを X から Y への写像(関数)という。

f が X から Y への写像を

$$f : X \rightarrow Y$$

と表す。

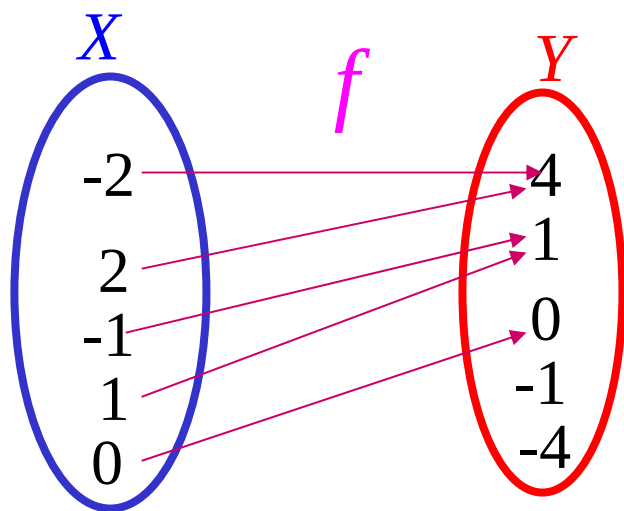


(定義)要素の像

2つの集合 X, Y に対する写像を $f : X \rightarrow Y$ とする。このとき、 X の要素 x ($x \in X$) に対応する Y の要素を

$f(x)$

と表す。(このときは、もちろん $f(x) \in Y$ である。)



$$f(-1) = 1$$

対応関係を式で定めることもあるが、式でなくても写像は定義できる。

$$x \in X \text{ に対して、 } f(x) = x^2 \in Y$$

代表元といいます。

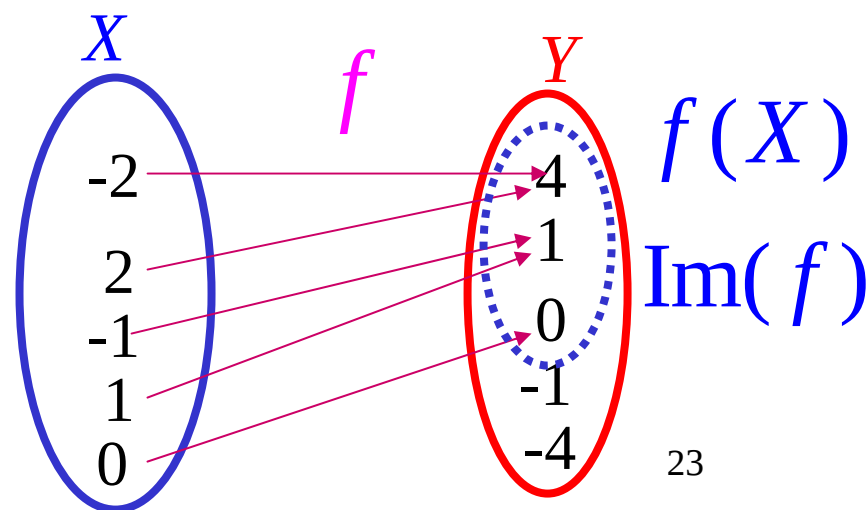
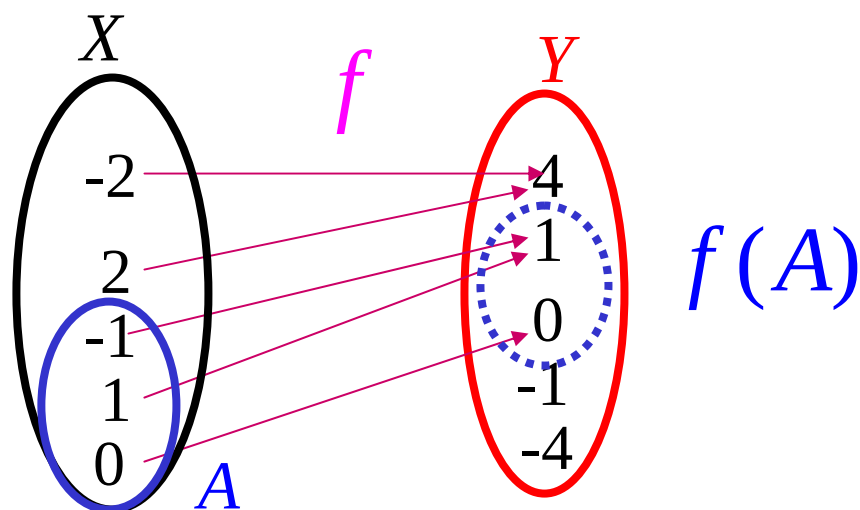
像

(定義) 定義域の像

写像 $f: X \rightarrow Y$ の定義域 X の部分集合 $A (A \subseteq X)$ に対して、
値域 Y の部分集合
 $\{f(x) \mid x \in A\}$

を写像 f による A の像 (Image) といい、

$f(A)$
と表す。また、 $A = X$ のとき、 $f(X)$ を
 $\text{Im}(f)$
とも表す。



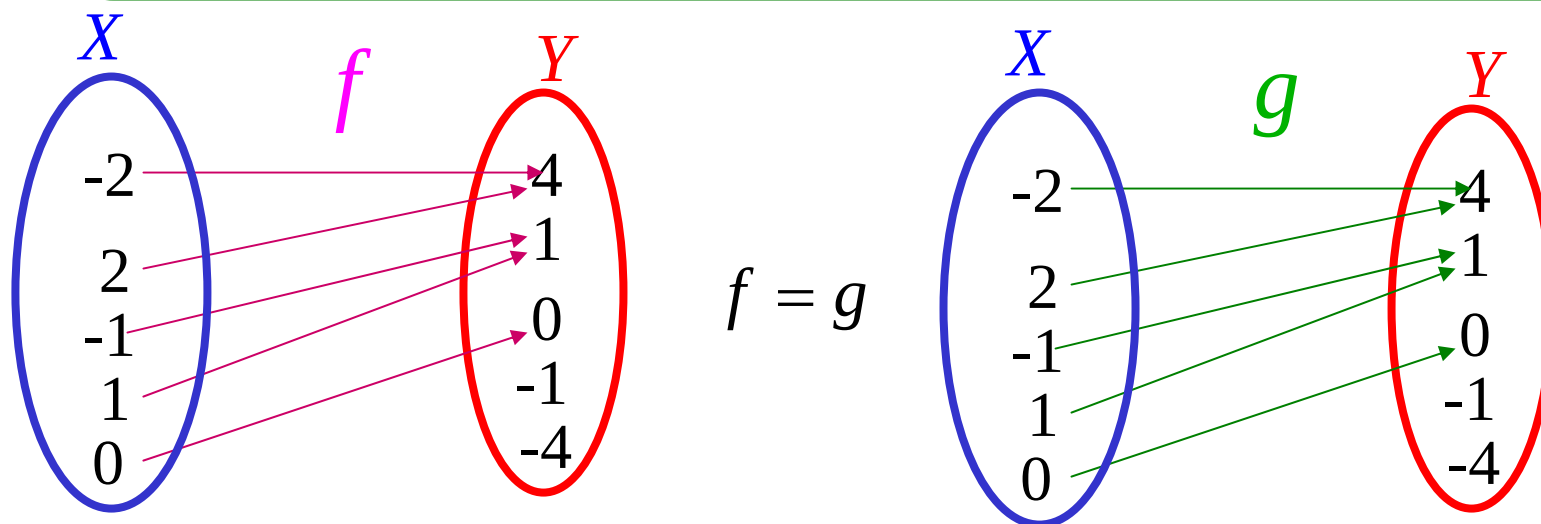
写像の相等

(定義) 写像の相等

集合 X から Y への2つの写像 f, g は、
($f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$)

任意の $x \in X$ に対して、 $f(x) = g(x)$

が成り立つときに「等しい」といい、
 $f = g$
と表す。



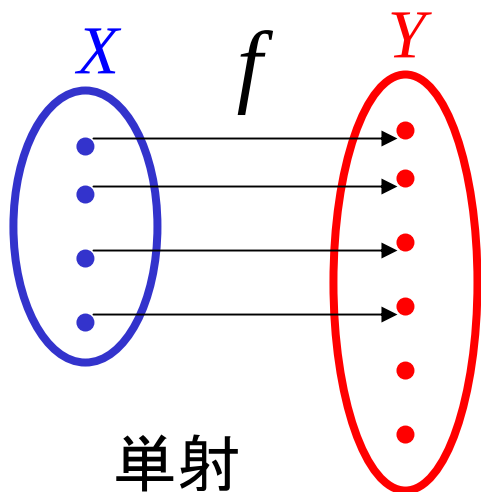
単射

(定義) 単射

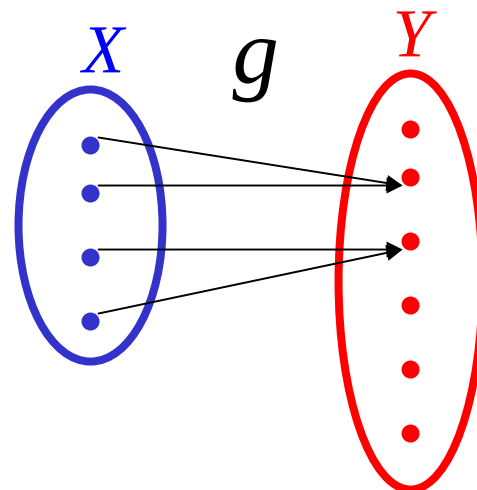
集合 X から Y への写像 $f : X \rightarrow Y$ が、

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

を満たすとき、 f は**単射(写像)**であるという。



対応元が1つ



単射でない

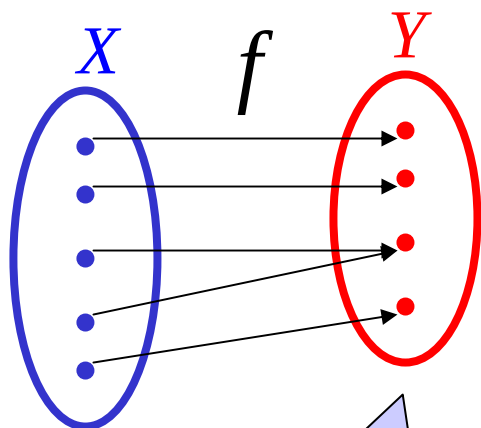
全射

(定義) 全射

集合 X から Y への写像 $f : X \rightarrow Y$ が、

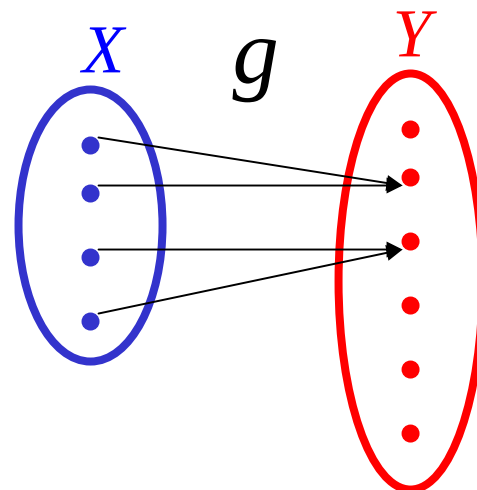
$$f(X) = Y$$

を満たすとき、 f は**全射(写像)**であるという。
または、**上への写像**ともいう。



全射

値域に“余り”がない。



全射でない

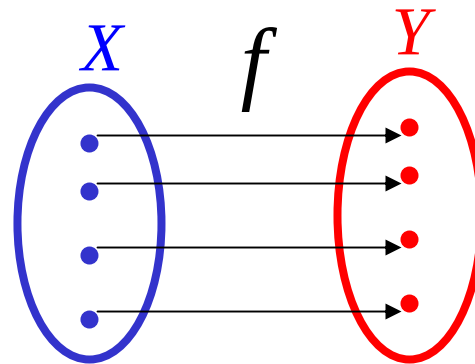
全単射

(定義) 全単射

単射かつ全射であるような写像を、

全単射(写像)という。

また、全単射は、**1対1上への写像**ともいう。



全単射

値域に“余り”がなく、
値域の各元がちょうどひとつの
定義域の元に対応している。

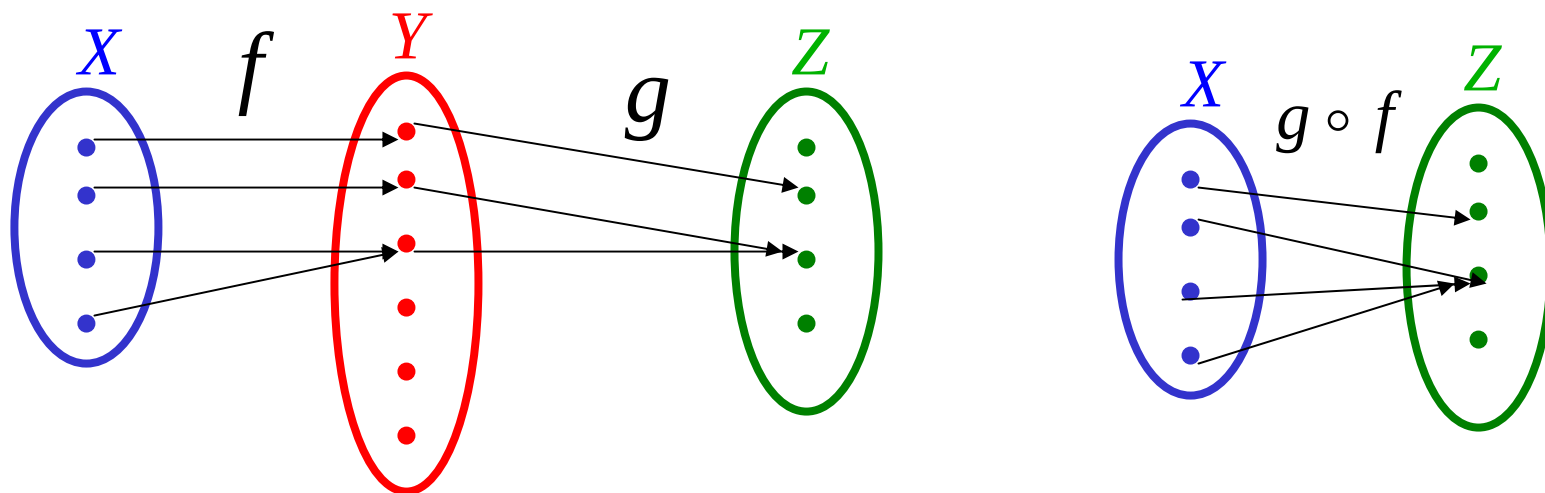
合成写像 (定義) 合成写像

集合 X, Y, Z に対して、2つの写像

$$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$$

があるとき、 X の各要素 x を Z の要素 $g(f(x))$ に対応させることにより X から Z への写像ができる。これを、 f, g の合成写像といい、

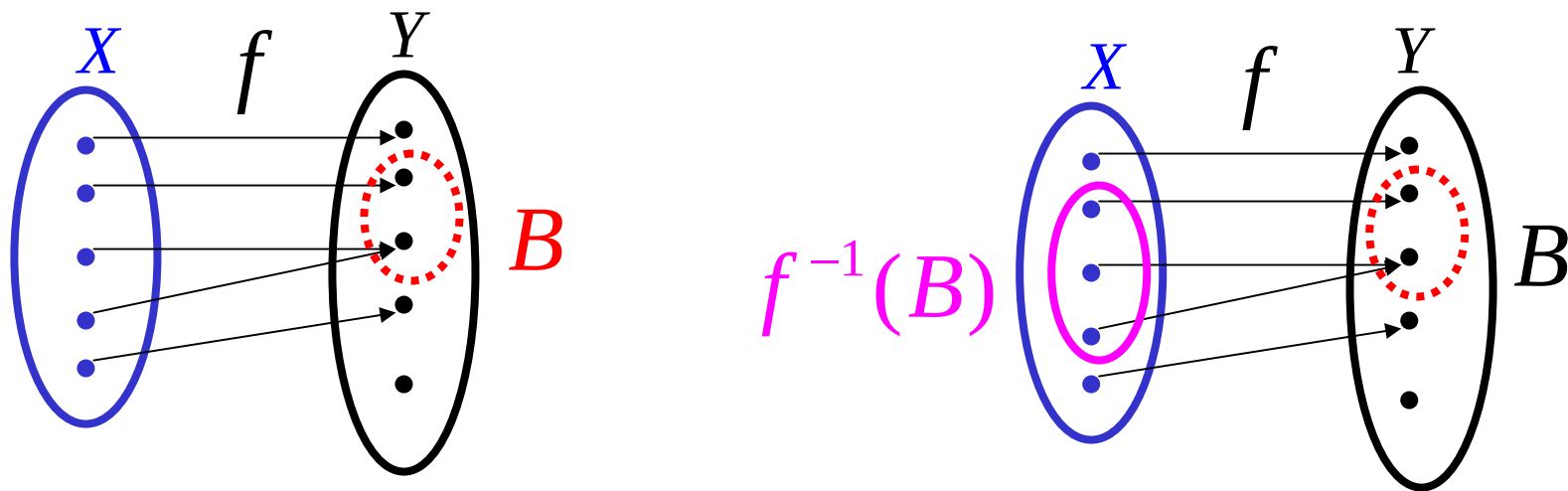
$g \circ f$
と表す。すなわち、
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
である。



逆像 (定義) 逆像

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、 Y の部分集合 B をとると、
 $\{x \mid f(x) \in B\}$
は X の部分集合である。これを、 f による B の逆像といい
 $f^{-1}(B)$
と表す。すなわち、

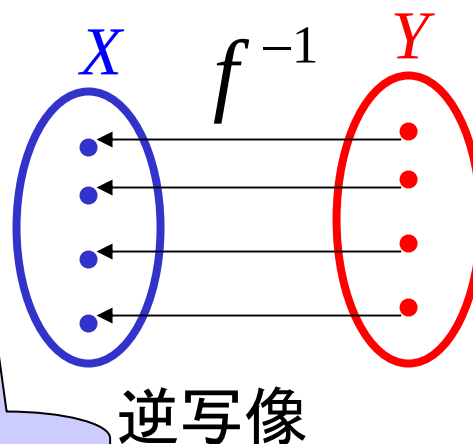
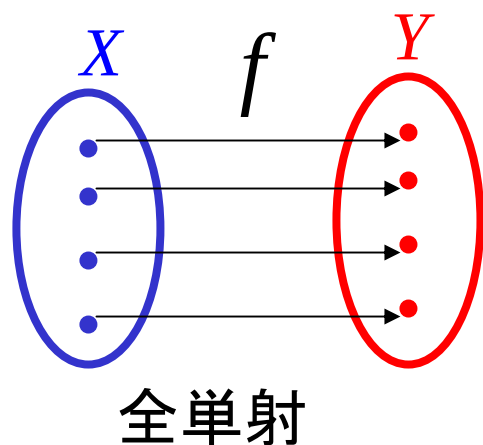
$$f^{-1}(B) \equiv \{x \mid f(x) \in B\}$$



逆写像

(定義) 逆写像

写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば、 Y の各要素 y に対して、 X の要素 $f^{-1}(y)$ を対応させる写像を定義できる。これを、 f の逆写像といい、 f^{-1} と表す。



矢印を反対にする。

1 章 行列と行列式

行列の定義

(定義) 行列

数(実数)を縦横をそろえて並べたもの。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

縦が m 行、横が n 列あるとき、
 $m \times n$ 行列という。

行列の型(大きさ)

(定義) 行列の型

行数 $\times$ 列数を行列の型あるいは大きさという。

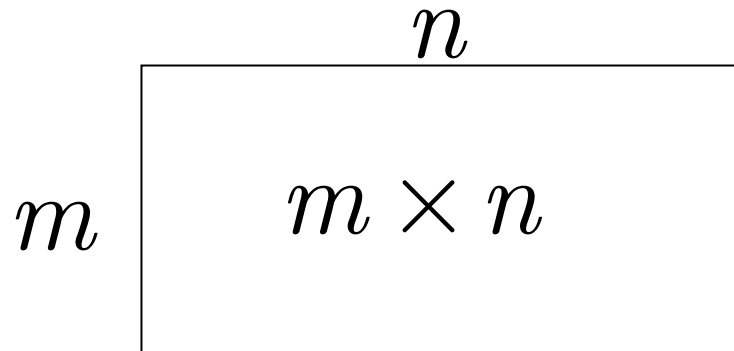
m 行 n 列の行列を、

$m \times n$ 行列

あるいは

(m, n) 型行列

という。



例

2行3列の行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(3, 3) 型行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

4 × 3 行列

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

練習

次の行列の型を答えよ。

$$(1) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) [4]$$

$$(4) \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

行列の成分

(定義) 行列の成分

i 行 j 列の要素 a_{ij} を (i, j) 要素 ((i, j) 成分) という。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

j 列

i 行

添字は、
行が先で、
列が後。

行列を (i, j) 成分だけに注目して、

$$A = [a_{ij}]$$

のように表すこともある。

ベクトル

(定義)ベクトル

大きさが、 $1 \times n$ あるいは、 $m \times 1$ の行列をベクトルという。

$1 \times n$ のベクトルを行ベクトル (row vector) という。

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

$m \times 1$ のベクトルを列ベクトル (column vector) という。

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

行列と行ベクトル

$m \times n$ 行列は、 m 個の n 次元行ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

ただし、 $1 \leq i \leq m$ に対して、 $\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = (3, 2, 5)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (4, 1, -1)$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (2, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = (7, -3, -2)$$

行列と列ベクトル

$m \times n$ 行列は、 n 個の m 次元列ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$$

ただし、 $1 \leq j \leq n$ に対して、

$$\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3] \quad \text{とする。}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

例

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

このとき、

$$a_{11} = 3$$

$$a_{23} = -1$$

$$a_{41} = 7$$

例

$A = [a_{ij}]$ を 3×4 行列とし、 $a_{ij} = i + j$ とする。

このとき、

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

練習

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

次に答えよ。

(1) (1, 1)成分、(2, 3)成分、(5, 2)成分

(2) 値が11である成分、値が9である成分、
値が3である成分の集合

(3) a_{34}, a_{53}, a_{44}

(4) $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_5$

(5) $\mathbf{c}_3$

練習

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{r}_4 &= \begin{bmatrix} 9 & 0 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{とする。}$$

このとき、
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_4 \end{bmatrix}$$
を求めよ。

練習

$A = [a_{ij}]$ を 4×3 行列とし、 $a_{ij} = 10i + j$ とする。

このとき、 A を求めよ。

行列の相等

(定義) 行列の相等

2つの行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ が次の(1)、(2)を満たすとき、
「等しい」といい、

$$A = B$$

と書く。

(1) A と B の大きさが等しい。

(2) すべての (i, j) 成分について $a_{ij} = b_{ij}$ である。

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \color{red}{7} & \color{red}{-3} & \color{red}{-2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & \color{red}{5} \\ 4 & 1 & \color{red}{-1} \\ 2 & 1 & \color{red}{0} \\ 7 & -3 & \color{red}{-2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & \color{red}{-2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & \color{red}{2} \end{bmatrix}$$

練習

次の行列の集合から、等しい行列の組をすべて求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

行列の演算

行列の加法

(定義) 行列の加法

同じ型 ($m \times n$) の行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ に対し
て、その和 $A + B$ を

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 $A + B$ も $m \times n$ の型になることに注意する。

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

和が計算できない行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

行列の性質1

(性質) 行列の和に関する性質

A, B, C を全て同じ型の行列とする。このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{結合法則})$$

$$(2) \quad A + B = B + A \quad (\text{交換法則})$$

$$(3) \quad A + O = O + A = A \quad (\text{加法単位元})$$

$$(4) \quad A + (-A) = (-A) + A = O \quad (\text{加法逆元})$$

零行列

(定義) 零行列

すべての成分が0である行列を**零行列**といい、

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

で表す。特に、型にも注意する際には、

$$\mathbf{O}_{mn}$$

と書いて、 $m \times n$ 型の零行列を表す。

例

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加法逆元

(定義) 加法逆元

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、
 $m \times n$ 行列

$$-A = [-a_{ij}]$$

を**加法逆元**という。このとき、

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}$$

が成り立つ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

行列のスカラー倍

(定義) 行列のスカラー倍

スカラー $k \in R$ に対して、 $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ の k 倍を

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 kA の大きさも $m \times n$ になることに注意する。

例

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 12 & -3 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

行列の性質2

(性質) 行列のスカラー倍に関する性質

A, B を同じ型の行列とし、 $k, l \in \mathbf{R}$ とする。
このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad (k + l)A = kA + lA \quad (\text{行列のスカラーへの分配法則})$$

$$(2) \quad k(A + B) = kA + kB \quad (\text{スカラーの行列への分配法則})$$

$$(3) \quad (kl)A = k(lA) \quad (\text{結合法則})$$

$$(4) \quad 1A = A \quad (\text{公等法則})$$

$$(5) \quad 0A = O \quad (\text{零倍})$$

練習

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、行列演算の法則を用いることにより、次を計算せよ。

$$(1) \quad 2\mathbf{A} + \mathbf{B} - 2(\mathbf{B} + \mathbf{A})$$

$$(2) \quad 5\mathbf{A} + \mathbf{B} - 3(2\mathbf{B} + 2\mathbf{C}) + 6\mathbf{C}$$

$$(3) \quad 3((\mathbf{A} - \mathbf{B}) + (\mathbf{B} - \mathbf{C}) + (\mathbf{C} - \mathbf{A}))$$

行列の積

(定義) 行列の積

$l \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$ と $m \times n$ 行列 $B = [b_{ij}]$ に対して、
その積である $C = AB = [c_{ij}]$ を

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{i\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

$$(1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n)$$

となる行列とする。

ここで、 $C = AB$ の型は

$$l \times n$$

になる。

行列積の覚え方

$$\boxed{l \times m} \times \boxed{m \times n} = \boxed{l \times n}$$

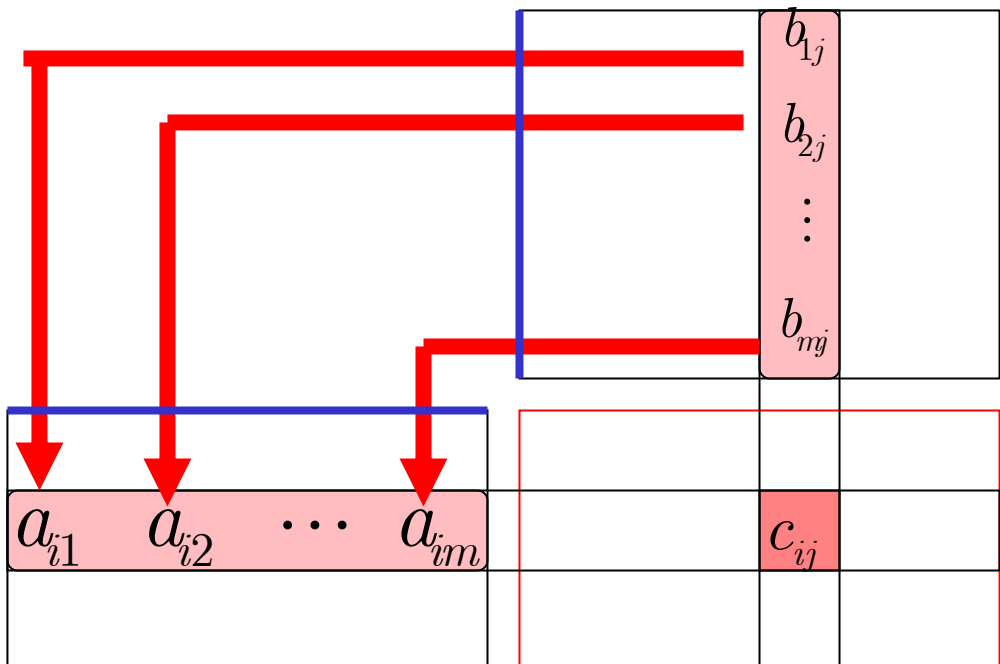
ここが同じでないと乗算できない。

(1)まず、出来上がる行列の型をきめる。

ここが同じでないと乗算できない。

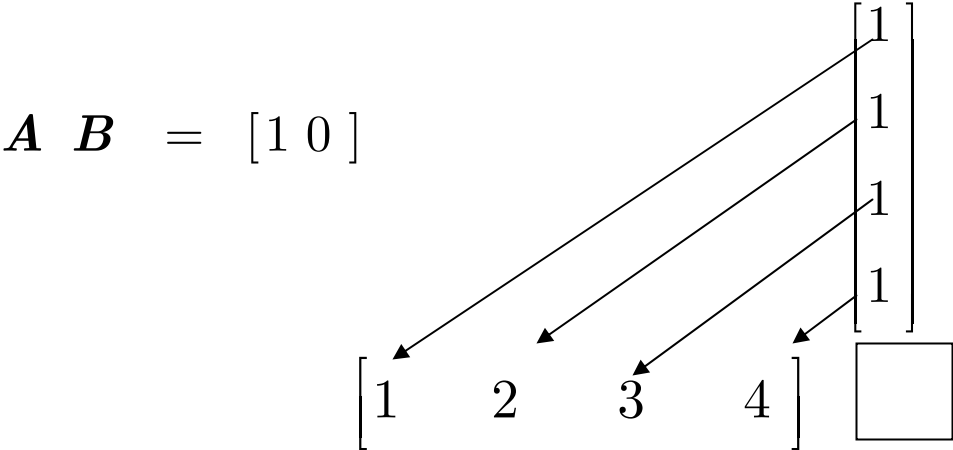
$$\boxed{l \times m} \quad \boxed{m \times n} \quad \boxed{l \times n}$$

(2) 個々の成分を求める。



例

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする。



$B \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

練習

次の行列の中から、積が定義できるものに対して、積を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質1

積が定義できる行列に関して、次が成り立つ。

$$(1) \quad (AB)C = A(BC) \quad (\text{結合法則})$$

$$(2) \quad A(B + C) = AB + AC \quad (\text{左分配法則})$$

$$(3) \quad (A + B)C = AC + BC \quad (\text{右分配法則})$$

$$(4) \quad k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad (\text{スカラーの移動})$$

このような移動ができるのは、
スカラーに対してだけであることに、
注意すること。

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$$

$$(2) \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$$

$$(3) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$$

$$(4) \quad k(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

解) (1) $(AB)C = A(BC)$

左辺: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

右辺: $BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、左辺＝右辺

これより、 $(AB)C = A(BC) = ABC$

と書いても誤解が無い。

$$(2) \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

左辺: $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

右辺: $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

よって、左辺＝右辺

$$(3) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$$

左辺: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

右辺: $\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

$$(4) \ k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

$$k(\mathbf{AB}) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$k\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$k\mathbf{B} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、成り立つ。

練習

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = -1, \quad l = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

$$(2) \quad k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$$

$$(3) \quad l(\boldsymbol{BC}) = (l\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(l\boldsymbol{C})$$

練習

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix},$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad A(C + D) = AC + AD$$

$$(2) \quad B(C + D) = BC + BD$$

$$(3) \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$(4) \quad (A + B)D = AD + BD$$

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質2

$$AB \neq BA$$

となる行列 A 、行列 B がある。

行列の積では、交換法則は成り立たない。

例題

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{とする。}$$

$AB \neq BA$ を確かめよ。

解)

$$\text{左辺} = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 24 \\ -3 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 25 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \\ -6 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

よって、左辺 $\neq$ 右辺

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質3

$AB = O$ でも、

$$A = O \quad \text{または} \quad B = O$$

とは限らない。すなわち、

$$A \neq O \quad \text{かつ} \quad B \neq O$$

でも、

$$AB = O$$

となることがある。

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ を確かめよ。

解)

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

転置行列

(定義) 転置行列

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、 $n \times m$ 行列 $B = [b_{ij}]$ を

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

と定める。このとき、 B を A の転置行列といい、

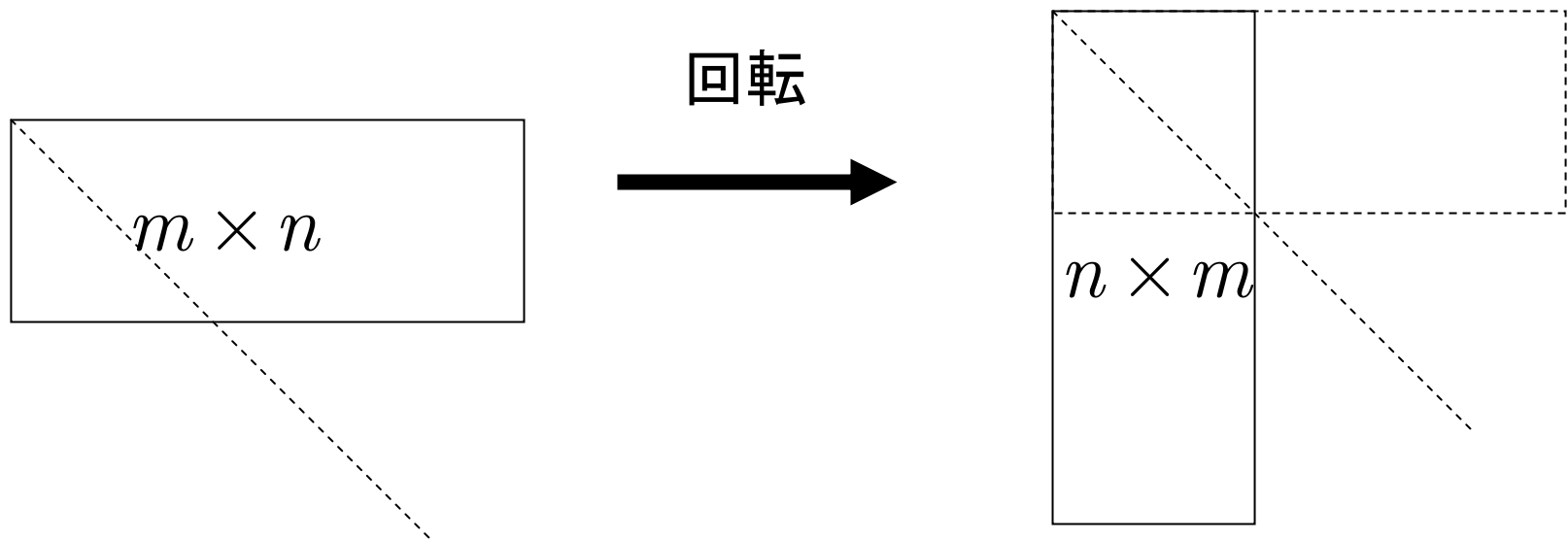
$${}^t A$$

と表す。すなわち、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad {}^t A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

転置行列のイメージ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{転置}} {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$



例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

練習

次の行列の転置行列を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

転置行列の性質

(性質) 転置行列の性質

A, B を $l \times m$ 行列とし、 C を $m \times n$ 行列とし、
 $k \in R$ とする。このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad (\text{和と転置の交換})$$

$$(2) \quad {}^t(kA) = k({}^tA) \quad (\text{スカラー倍と転置の交換})$$

$$(3) \quad {}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA) \quad (\text{積と転置の交換})$$

$$(4) \quad {}^t({}^t(A)) = A \quad (\text{転置の交代性})$$

証明

$\mathbf{A} = [a_{ij}], \mathbf{B} = [b_{ij}]$ を $l \times m$ 行列とする。

$$(1) \quad {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$$

$$\text{左辺} = {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$= {}^t([a_{ij}] + [b_{ij}])$$

$$= {}^t([a_{ij} + b_{ij}])$$

$$= [a_{ji} + b_{ji}]$$

$$\text{右辺} = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$$

$$= {}^t[a_{ij}] + {}^t[b_{ij}]$$

$$= [a_{ji}] + [b_{ji}]$$

$$= [a_{ji} + b_{ji}]$$

よって、左辺＝右辺

$$(2) \quad {}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$$

$$\text{左辺} = {}^t(k\mathbf{A})$$

$$= {}^t(k[a_{ij}])$$

$$= {}^t([ka_{ij}])$$

$$= [ka_{ji}]$$

$$\text{右辺} = k({}^t\mathbf{A})$$

$$= k({}^t[a_{ij}])$$

$$= k[a_{ji}]$$

$$= [ka_{ji}]$$

よって、左辺＝右辺

$\mathbf{C} = [c_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とする。

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

$D = [d_{ij}] = \mathbf{A}\mathbf{C}$ とする。すなわち、

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj}$$

$$\text{左辺} = {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C})$$

$$= {}^t([d_{ij}])$$

$$= [d_{ji}]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^m a_{jk} c_{ki} \right]$$

$$\text{右辺} = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

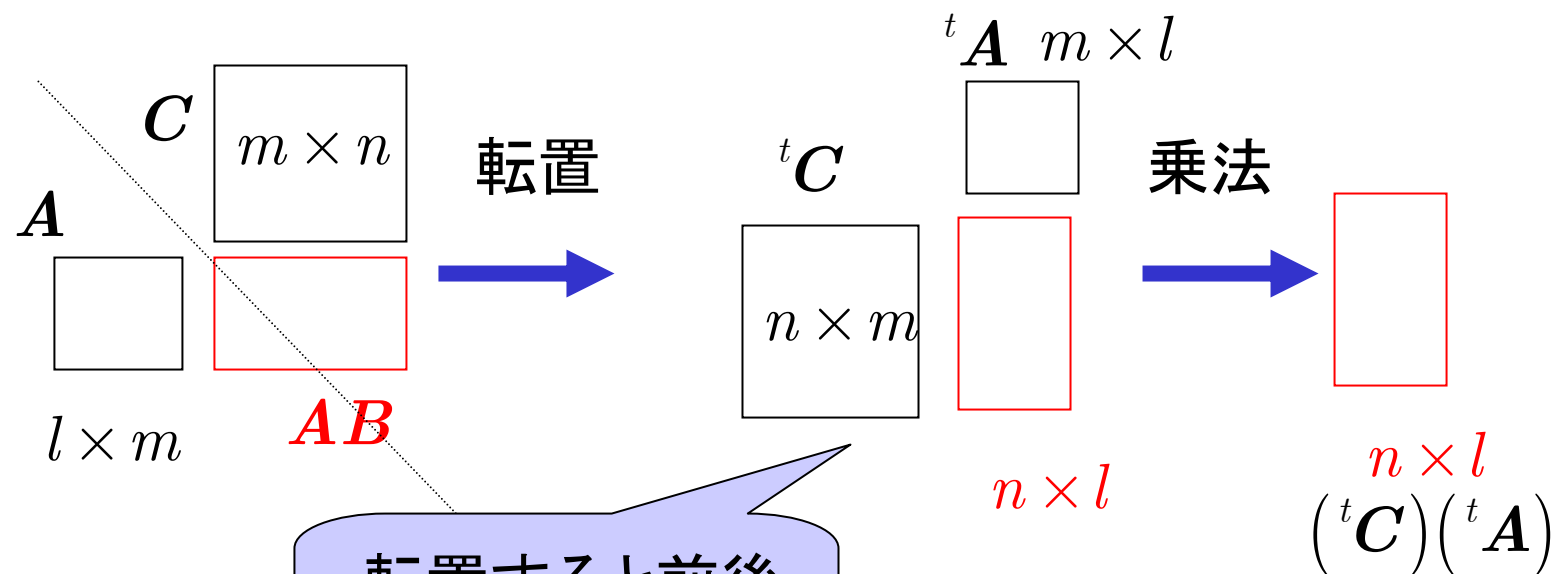
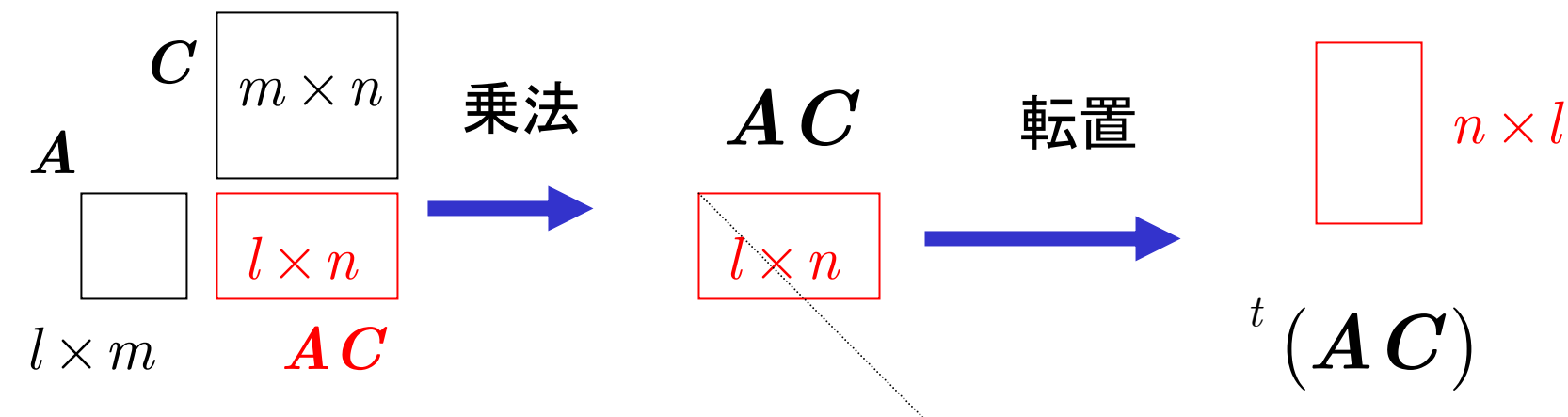
$$= {}^t[c_{kj}] {}^t[a_{ik}]$$

$$= [c_{jk}] [a_{ki}]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^m c_{jk} a_{ki} \right]$$

よって、左辺＝右辺

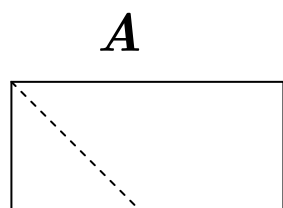
(3) のイメージ



$$(4) \quad {}^t({}^t(A)) = A$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= {}^t({}^t(A)) \\ &= {}^t({}^t[a_{ij}]) \\ &= {}^t[a_{ji}] \\ &= [a_{ij}] \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

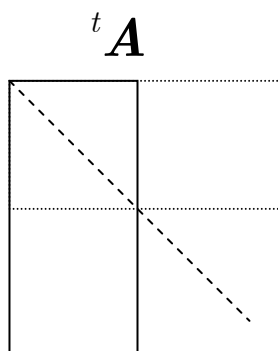
QED



$m \times n$



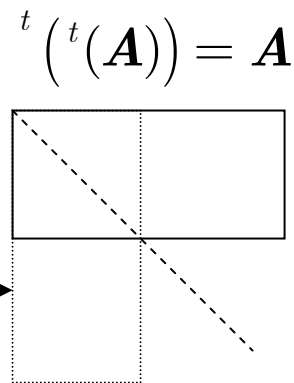
回転



$n \times m$



回転



$m \times n$

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$$

$$(2) \quad {}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$$

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

$$(4) \quad {}^t({}^t(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$$

解) (1) ${}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$

$$\text{左边} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 左边 = 右边

(2) ${}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$

$$\text{左边} = \begin{pmatrix} 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = 3 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 左边 = 右边

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

$$\text{左边} = {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = {}^t\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \text{左边} = \text{右边}$

$$(4) \quad {}^t\left({}^t(\mathbf{A})\right) = \mathbf{A}$$

$$\text{左边} = {}^t\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{右边}$$