１０．固有値とその応用

固有値と固有ベクトル

行列による写像から固有ベクトルへ

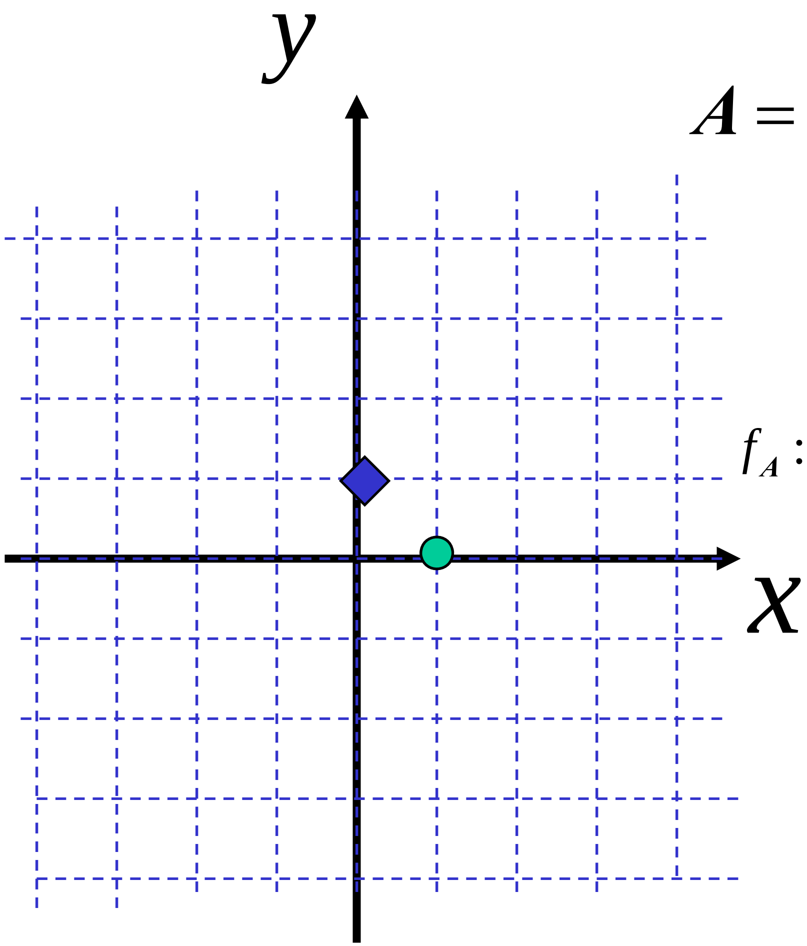
$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ によって線形写像 $f_A : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ が表せることを見てきた。ここでは、2次元平面の行列による写像を調べる。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ とし、写像 $f_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を考える。

まず、単位ベクトルの像を求める。

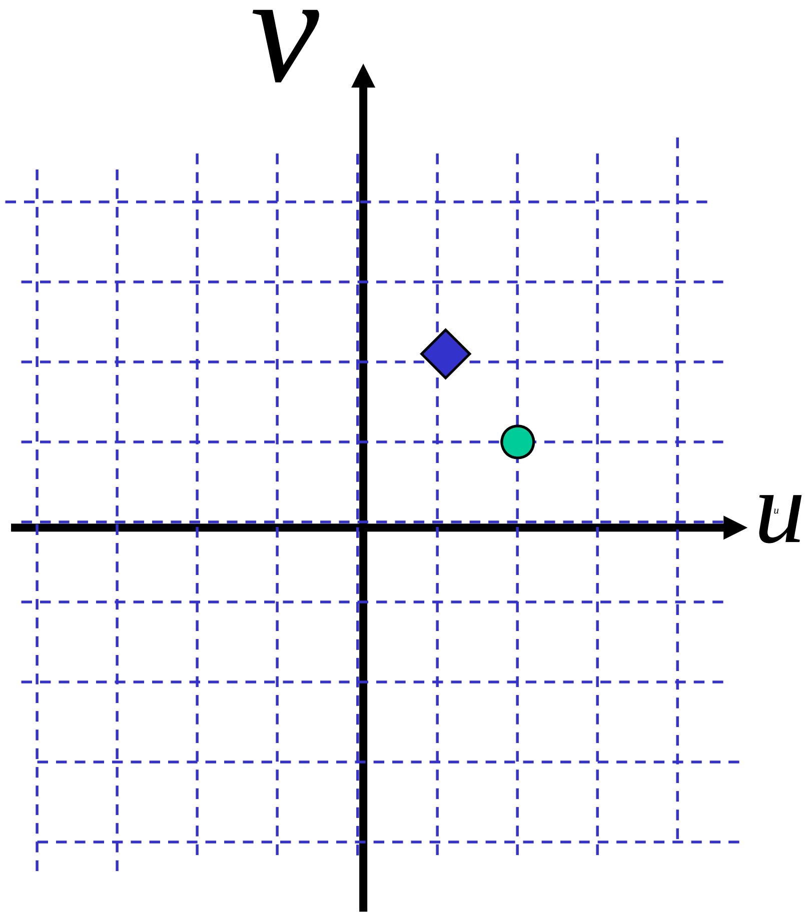
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



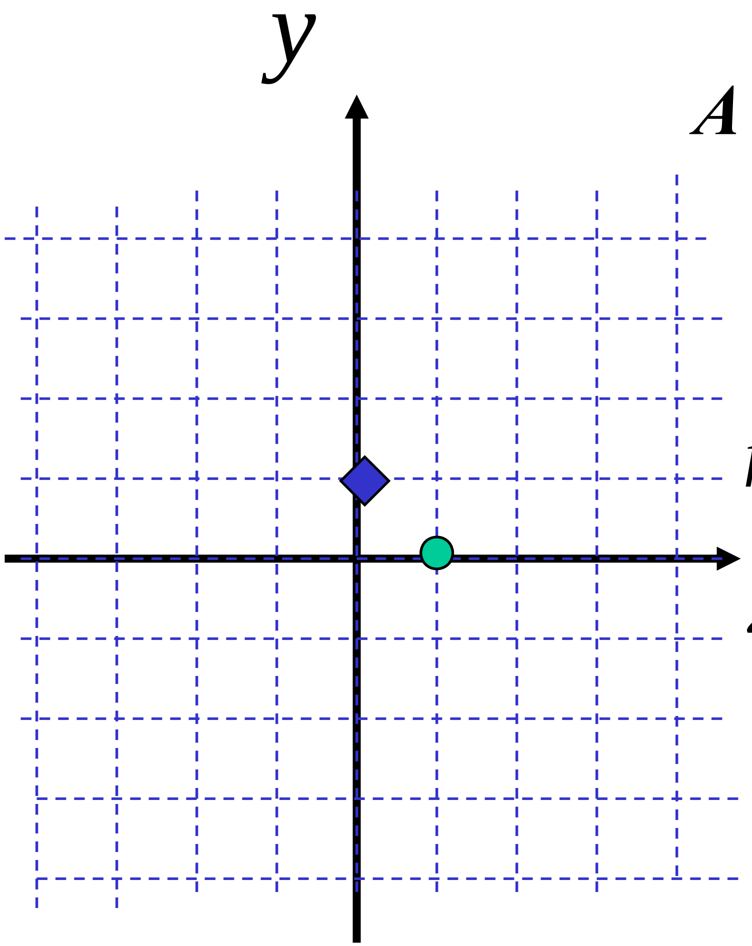
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_A : \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$$

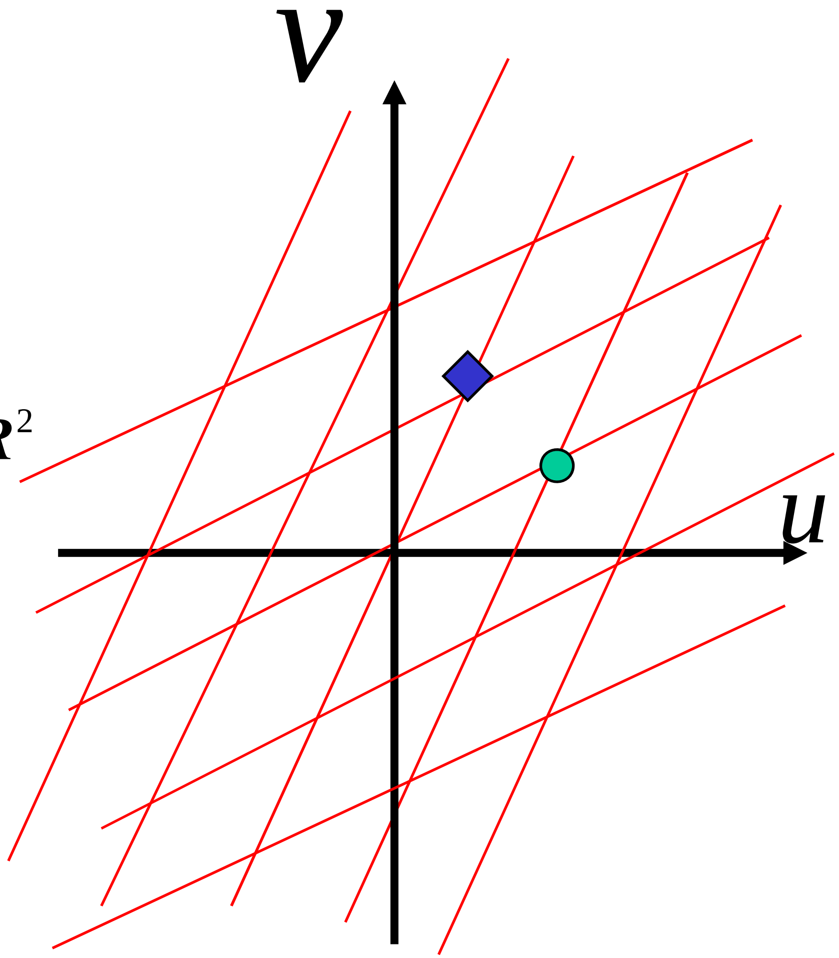


この事から、線形写像の性質を用いると、
次の格子上の点全ての写像先が求まる。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

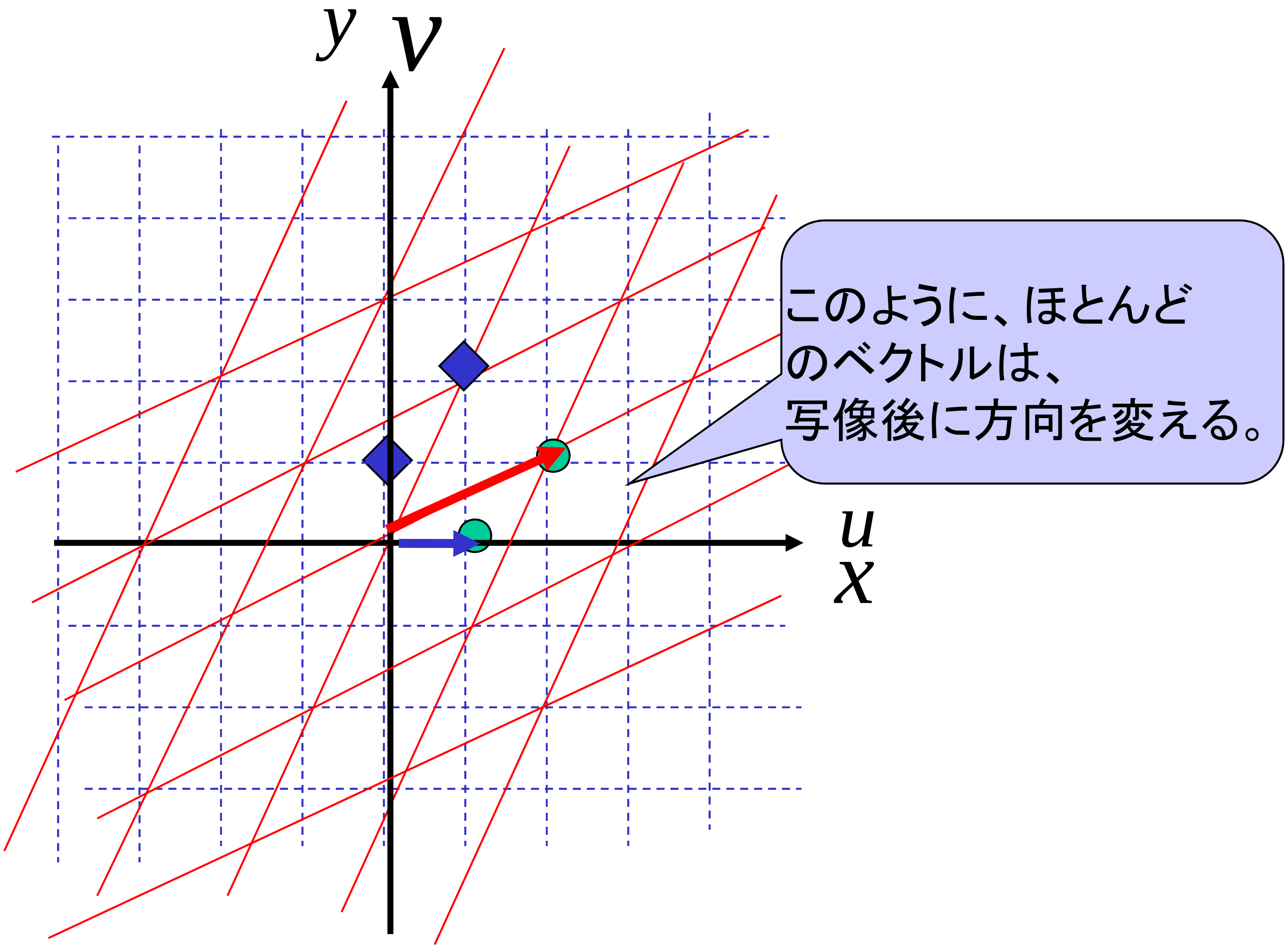


$$f_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$$



　このように、写像 f_A によって、基底 $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2\} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ の座標系が得られる。この座標系の事を、斜交座標系と呼ぶこともある。

　ここで、これらの写像を重ねてみる。


y
v
u
x
このように、ほとんど
のベクトルは、
写像後に方向を変える。

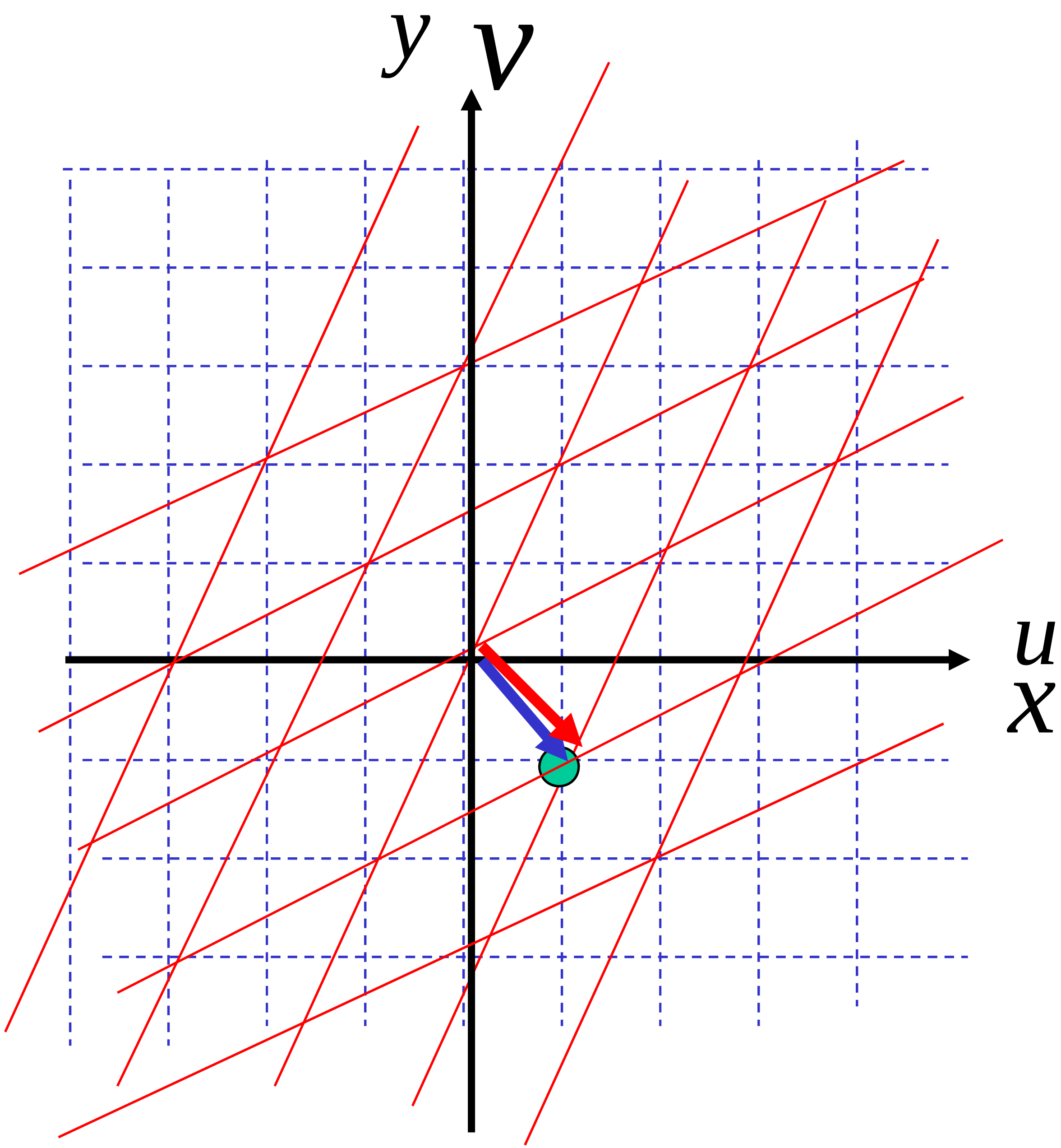
行列 A に対して、変換後もベクトルの方向を変えないものがある。そのようなベクトルを行列 A に対する固有ベクトルと言う。（正確な定義は後で与える。）

例えば、下の計算からわかるように、

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ に対しては、$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 等が固有ベクトルである。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

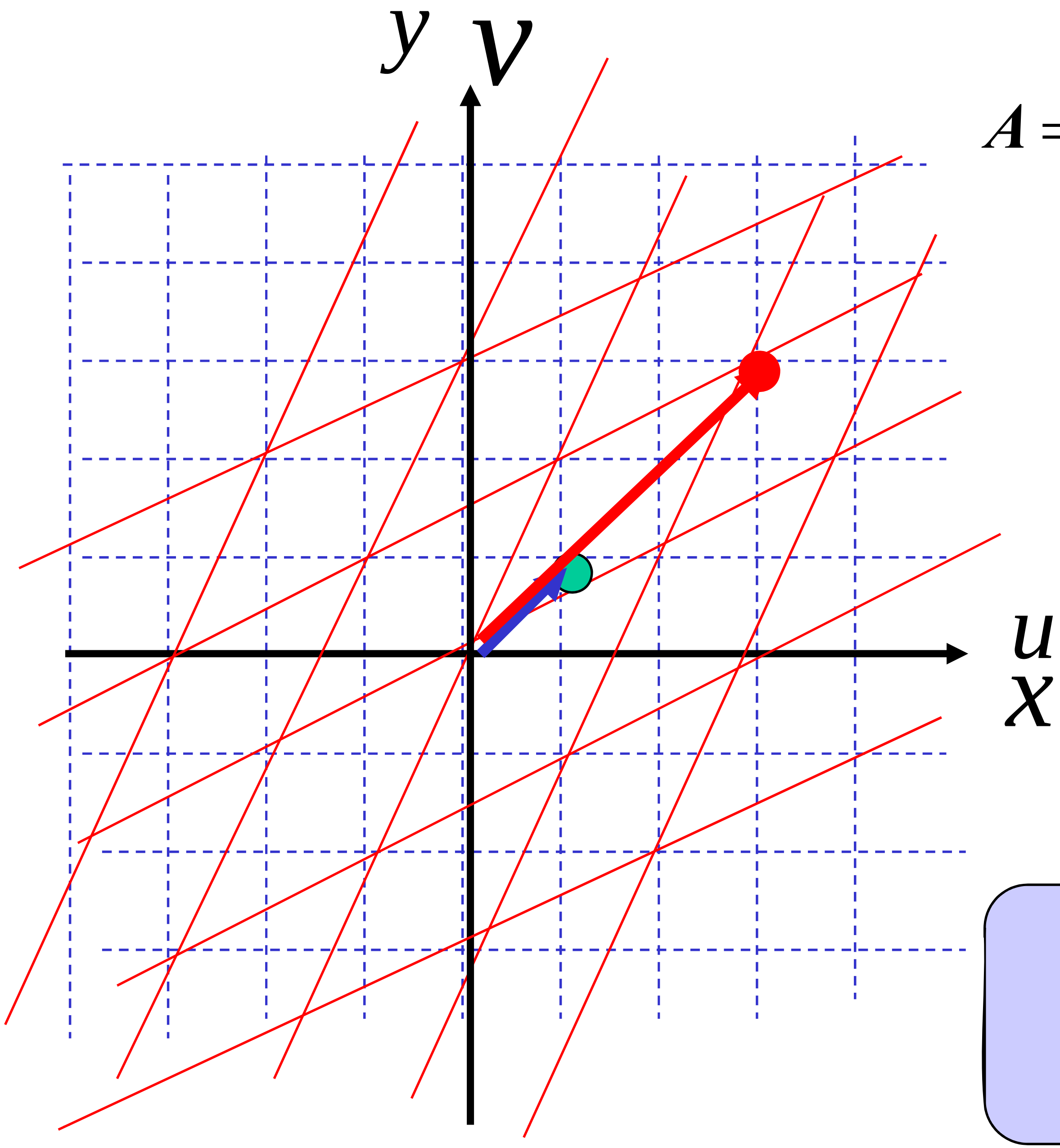
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

に対して、

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は写像元と写像先が同一。



$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ に対して、

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は写像元と写像先が同じ方向。

この場合は3倍だけ変化する

この倍率のことを**固有値**という。

固有関係式

ここでは、行列 $\boldsymbol{A}$ に対して固有ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が満たすべき関係を示す。

ベクトルの方向が等しいことを意味する。

固有値には、慣用的に λ の文字が用いられる。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ によるベクトルの写像

ベクトルのスカラー倍

ここで、λ はスカラーであり、固有値と呼ばれる。

この式が、固有値と固有ベクトルにおける一番重要な関係式である。この関係式を本講義では、固有関係式と呼ぶ。

線形写像に対する固有値、固有ベクトル

定義（線形写像に対する固有値、固有ベクトル）

線形空間 V から V 自身への線形写像を

$f:V \to V$ とする。

スカラー λ に対して固有関係式、

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$$

を満たす $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ があるとき、
スカラー λ は写像 f の**固有値**であるといい、
ベクトル $\boldsymbol{x}$ は固有値 λ に属する（写像 f の）
固有ベクトルという。

1. 零ベクトル $\boldsymbol{0}$ は任意のスカラー λ に対して、
   固有関係式をみたすが、固有ベクトルではない。
2. 固有値は、一般には複数あるが、$\dim V$ 個以下である。
3. 一つの固有値に属する固有ベクトルは1つとは限らない。

行列に対する固有値と、固有ベクトル

λ　次正方行列 A は、線形写像 $f_A : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ を定めていた。ここで、線形写像 f に対する固有値と固有ベクトルと同様に、行列に対する固有値と固有ベクトルを定める。

定義（行列に対する固有値、固有ベクトル）

$n \times n$の正方行列を A とする。

スカラー λ（実数または複素数）に対して、

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$$

固有関係式

を満たす$\boldsymbol{0}$でないベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ があるとき、スカラーλ は行列 A の固有値であるといい、ベクトル $\boldsymbol{x}$ は固有値 λ に属する（行列A の）固有ベクトルという。

正方行列に対してしか、固有値や固有ベクトルは定義されないので注意すること。

固有空間

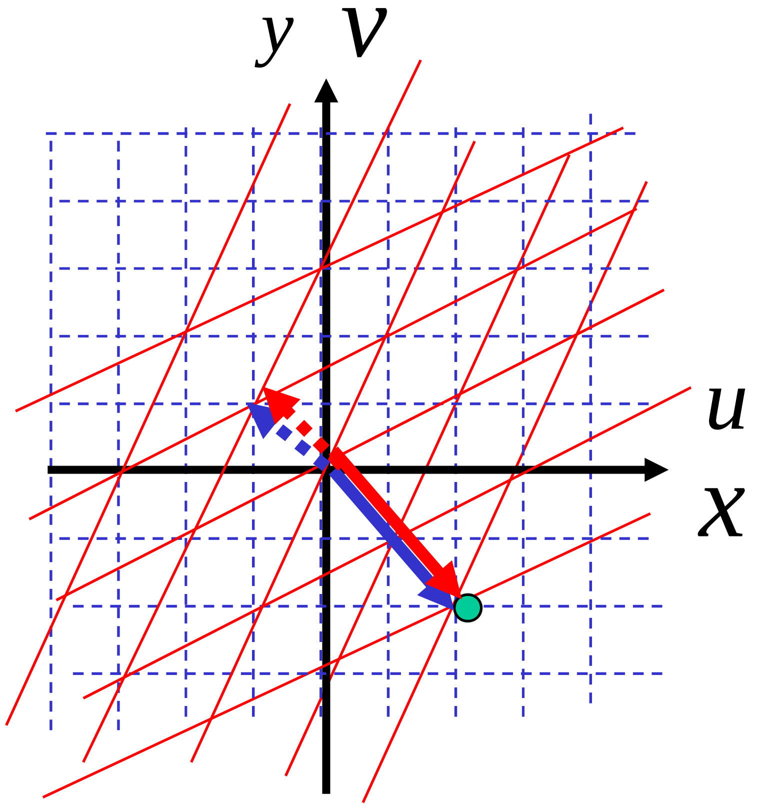
固有ベクトルから固有空間へ1

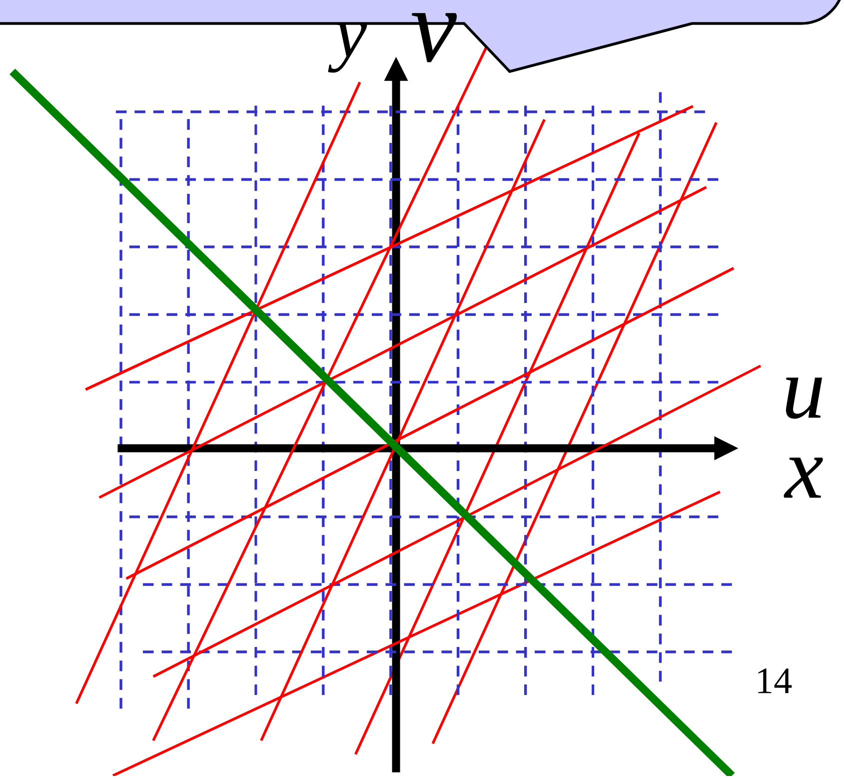
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$ の固有値に $\lambda=1$ がある。

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}$ を満たすベクトルとしては、$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ の他にも、

$\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 等がある。

実は、1次元空間(直線上)の全てのベクトルが固有ベクトルになる。





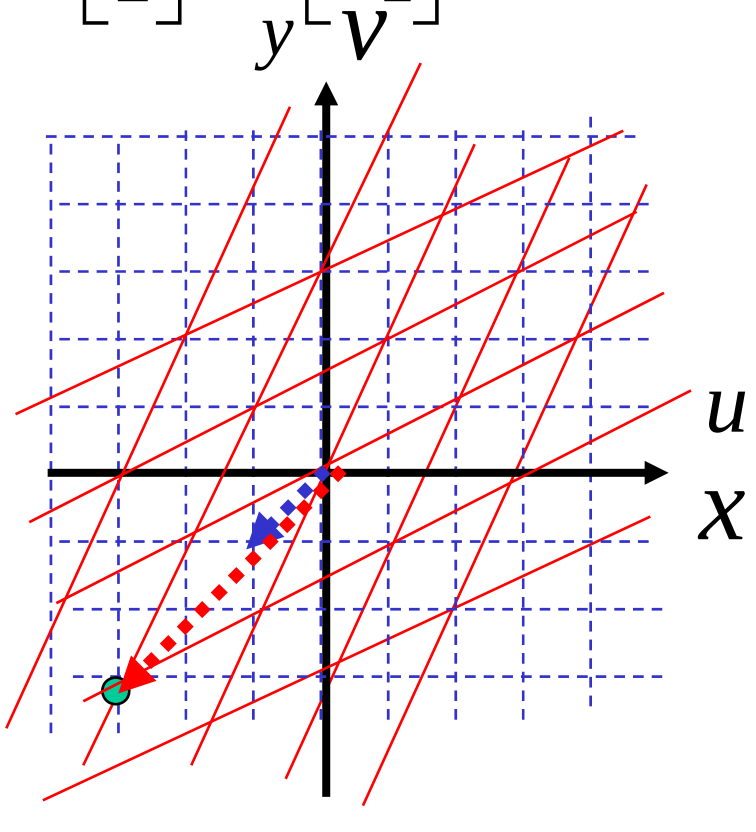
固有ベクトルから固有空間へ2

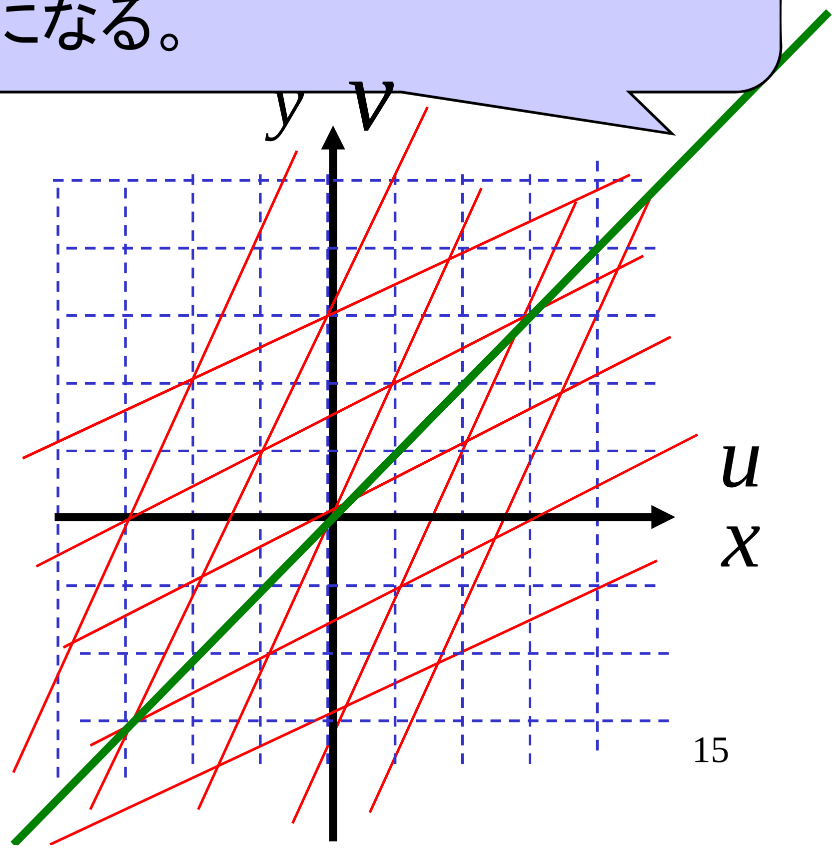
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とし、$\lambda = 3$ とする。

$\boldsymbol{Ax} = 3\boldsymbol{x}$ を満たすベクトルとしては、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の他にも、

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 等がある。

実は、1次元空間（直線上）の全てのベクトルが固有ベクトルになる。





固有空間

定義（線形写像の固有空間）

λ が線形写像 $f:V \to V$ の固有値であるとき、

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

を写像 f の固有値 λ の固有空間という。
言い換えると、固有空間 V_λ は λ の固有値に属する固有ベクトル全体に零ベクトル $\boldsymbol{0}$ を加えた集合のことである。

行列の固有空間

定義(行列の固有空間)

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を λ とするとき、

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in C^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

を行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ の固有空間という。
言い換えると、固有空間 V_λ は λ の固有値に属する固有ベクトル全体に零ベクトル $\boldsymbol{0}$ を加えた集合のことである。

例 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ に対する固有空間 V_{λ_1} V_{λ_2} は、次のようになる。

$$V_{\lambda_1} = \left\{ k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid k \in \boldsymbol{R} \right\} \quad V_{\lambda_2} = \left\{ k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k \in \boldsymbol{R} \right\}$$

固有空間の性質

（固有空間の性質）

線形写像 $f:V \to V$ の固有値 λ の固有空間 V_λ は V の部分空間である。

証明略

固有ベクトルの一次独立性

（固有ベクトルの一次独立性）

線形写像 $f: V \to V$ の相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ に対して、各固有値 λ_i に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする。このとき、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ は一次独立である。

証明

固有値の数 r に関する帰納法で示す。

基礎 $r=1$ のとき。

このときには、$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ であるから命題が成り立つ。

帰納　$r > 1$ とする。

$r-1$ 個の固有ベクトル $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-1}\}$ が一次独立と仮定する。（帰納法の仮定）

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0} \qquad \cdots(1)$$

とおいて、係数の組 $\{k_1, k_2, \cdots, k_r\}$ を調べる。

線形性と固有値の定義より、

$$\begin{aligned} f(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r) &= f(k_1\boldsymbol{x}_1) + f(k_2\boldsymbol{x}_2) + \cdots + f(k_r\boldsymbol{x}_r) \\ &= k_1 f(\boldsymbol{x}_1) + k_2 f(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + k_r f(\boldsymbol{x}) \\ &= k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\lambda_r\boldsymbol{x}_r \end{aligned}$$

また線形性より、

$$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

よって、(1)の両辺に線形写像 f を適用すると、次式が得られる。

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\lambda_r\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}\quad\cdots(2)$$

一方、(1)によって得られる式

$$k_r\boldsymbol{x}_r=-k_1\boldsymbol{x}_1-k_2\boldsymbol{x}_2-\cdots-k_{r-1}\boldsymbol{x}_{r-1}\quad\cdots(1)'$$

を(2)に代入する。

$$k_1(\lambda_1-\lambda_r)\boldsymbol{x}_1+k_2(\lambda_2-\lambda_r)\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_{r-1}(\lambda_{r-1}-\lambda_r)\boldsymbol{x}_{r-1}=\boldsymbol{0}$$

帰納法の仮定より、$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{r-1}\}$は一次独立なので、

$$k_1(\lambda_1-\lambda_r)=k_2(\lambda_2-\lambda_r)=\cdots=k_{r-1}(\lambda_{r-1}-\lambda_r)=0$$

また、$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ は相異なるスカラーであったので、

$$\lambda_i-\lambda_r\neq 0$$

よって、

$$k_1=k_2=\cdots=k_{r-1}=0\quad\cdots(3)$$

よって、 $(1)'$ より

$$k_r \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore k_r = 0 \quad (\because \boldsymbol{x}_r \neq \boldsymbol{0})$$

以上より、（３）と合わせて、

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

であり、 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ は一次独立。

QED

固有値の求め方

固有値の求め方(重要)

ここでは、固有値の求め方を示す。なお、固有ベクトルは、固有値を求めた後で求められる。固有値を求めるためには、**固有多項式**と**固有方程式**の概念が重要である。

固有多項式の定義を与える前に、慣用的な単位ベクトルの表記を与える。(主に工学系では、Iを用いる。)

(単位行列)

n 次元の単位行列は、

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{bmatrix}$$

とも表す。

固有多項式と固有方程式
(特性多項式と特性方程式)

定義(固有多項式と固有方程式)

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列とする。
スカラー λ の n 次の多項式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

を行列 $\boldsymbol{A}$ の固有多項式(あるいは特性多項式)という。
また、方程式

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda I) = 0$$

を行列 $\boldsymbol{A}$ の固有方程式(あるいは特性方程式)という。

固有値と固有方程式

（固有値と固有方程式）

λ が行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値であるための必要十分条件は、λ が固有方程式 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda I)=0$ の解であることである。

証明

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ が自明でない解 $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{0})$ を持つ。

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明でない解 $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{0})$ を持つ。

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明でない解 $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{0})$ を持つ。

$\Leftrightarrow (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明でない解 $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{0})$ を持つ。

$\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$

スカラー

$\mathcal{QED}$

例１

（１）次の行列の固有値を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解）
この行列に対する固有多項式は、

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \\ &= 3 - 4\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

と表せる。

よって、固有方程式

$$3 - 4\lambda + \lambda^2 = 0$$

を解く。

$$(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\therefore \lambda = 1, 3$$

以上より、行列 A の固有値は、

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

である。

例２

（２）次の行列の固有値を求めよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

解）

この行列に対する固有多項式は、

$$\begin{aligned} \varphi_{\boldsymbol{A}} &= \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 \\ &= -2 - 5\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

と表せる。

よって、固有方程式

$$-2 - 5\lambda + \lambda^2 = 0$$

を解く。

$$\therefore \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

以上より、行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は、

$$\lambda_1 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}, \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$$

である。

例3

（3）次の行列の固有値を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解）

この行列に対する固有多項式は、

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda) \\ &= 4 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

と表せる。

よって、固有方程式

$$4 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

を解く。

$$\therefore (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

$$\therefore \lambda = 1, 4$$

以上より、行列 A の固有値は、

$$\lambda_1 = 1\,(2\text{重根}),$$

$$\lambda_2 = 4\,(\text{単純根})$$

である。

固有方程式の解 λ_i が m_i 重根であるとき、固有値 λ_i の**代数的重複度**が m_i であるという。

練習

次の行列に対して、固有方程式を解き、固有値を求めよ。

（１）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

（２）

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

固有ベクトルの求め方(重要)

固有値がわかれば、各固有値に属する固有ベクトルを定義に基づいて求めることができる。

具体的には、固有値 λ_i に対する固有ベクトルは、
同次連立一次方程式

$$\left(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$

の非自明解を求めればよい。
(実は、この方法によって、固有空間も求まる。)

例１

次の行列の固有ベクトルを求めよ。

（１）

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

解）

この行列の固有値は、

$\lambda_1=1, \lambda_2=3$

である。

$\lambda_1=1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}$ を求める。

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix}2-1 & 1\\ 1 & 2-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_{11}+x_{21}=0$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}=x_{21}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

よって、任意定数 k_1 を用いて

$$\boldsymbol{x}_1=k_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

と表せる。よって、例えば

$$\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

が $\lambda_1=1$　の固有ベクトル。

$\lambda_2 = 3$に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$
を求める。

$$\left(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x_{12} + x_{22} = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = x_{22}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって、任意定数 k_2を
用いて

$$\boldsymbol{x}_2 = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表せる。よって、例えば

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が $\lambda_2 = 3$ の固有ベクトル。

例2

次の行列の固有ベクトルを求めよ。

（３） $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

解）この行列の固有値は、

$\lambda_1 = 1$ (2重根),

$\lambda_2 = 4$ (単純根)

である。

$\lambda_2 = 4$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{bmatrix}$ を求める。

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix}2-4 & 1 & 1\\ 1 & 2-4 & 1\\ 1 & 1 & 2-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12} - x_{32} = 0 \\ x_{22} - x_{32} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{32} \\ x_{32} \\ x_{32} \end{bmatrix} = x_{32} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ただし、 k_2 は任意定数。

$\lambda_1 = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$ を求める。

$$\left(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow x_{11}+x_{21}+x_{31}=0$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{21}-x_{31} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = x_{21}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{31}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = k_{11}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_{12}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ただし、k_{11}, k_{12} は任意定数。

このことより、$\lambda_1 = 1$ に対する固有空間は、

$$V_{\lambda_1} = \left\{ k_{11}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_{12}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, k_{11}, k_{12} \in \boldsymbol{R} \right\}$$

であり、その次元は、$\dim V_{\lambda_1} = 2$ である。

固有空間の次元を、
幾何的重複度という。

練習

次の行列に対して、固有ベクトル、固有空間を求めよ。

（１）

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}
$$

（２）

$$
\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}
$$

固有値の性質

固有値の性質1（複素数の固有値）

（複素数の固有値）

行列の要素がすべて実数であっても、固有値は複素数になることがある。

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ の固有値を求める。

固有多項式は、

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

よって、固有方程式$\lambda^2 + 1 = 0$ より、

$$\lambda = i, -i$$

固有値の個数

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対する固有方程式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

は n 次の代数方程式だから、代数的重複度まで含めると複素数の範囲で丁度 n 個の解がある。

練習

次の行列の固有値を求めよ。

（1）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

（3）

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

固有値とトレース、固有値と行列式

固有値とトレース、固有値と行列式には次のような関係がある。

（固有値とトレース、固有値と行列式）

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を $\boldsymbol{A}$ の固有値とする。
このとき、次が成り立つ。

(I)
$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

(II)
$$\lambda_1 \bullet \lambda_2 \bullet \cdots \bullet \lambda_n = |\boldsymbol{A}|$$

この関係があるので、トレースのことを
固有和ということもある。

これら2つの式は、固有値の値のチェックに利用することができる。

証明

固有多項式を計算する。

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \bullet \lambda^n + (-1)^{n-1} \bullet tr(\boldsymbol{A}) \bullet \lambda^{n-1} + \cdots + |\boldsymbol{A}|$$

定数項は、
行列式そのもの
になることに注
意する。

行列式の定義より、λ^n 、λ^{n-1} の部分は、

$$\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda) = (a_{11}-\lambda)\bullet(a_{22}-\lambda)\bullet\cdots\bullet(a_{nn}-\lambda)$$

の展開からしか生成できないことがわかる。

一方、固有値は固有方程式の根だから、固有多項式は、
次のようにも表現できる。

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(-1)^n\bullet(\lambda-\lambda_1)\bullet(\lambda-\lambda_2)\bullet\cdots\bullet(\lambda-\lambda_n)$$

$$=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\left(\lambda_1+\cdots+\lambda_n\right)\lambda^{n-1}+\cdots+\left(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\right)\lambda^0$$

よって、 λ^{n-1} の項の係数と、定数項を比較して次式を得る。

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$$

$$\lambda_1\bullet\lambda_2\bullet\cdots\bullet\lambda_n=\left|\boldsymbol{A}\right|$$

$\mathcal{QED}$

例１

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値は、$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ である。

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = 2 + 2 = 4 (= \lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\left| \boldsymbol{A} \right| = 4 - 1 = 3 (= \lambda_1 \lambda_2)$$

例２

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ の固有値は、$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ である。

代数的重複度を考えて、同じ値を持つ
固有値を2つにしている。

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{B} = 2 + 2 + 2 = 6 (= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$|\boldsymbol{B}| = 8 + 1 + 1 - (2 + 2 + 2) = 4 (= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$$

例3

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$ の固有値は、$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$ である。

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{C}=0+0=0(=\lambda_1+\lambda_2)$$

$$|\boldsymbol{C}|=0-(-1)=1(=\lambda_1\lambda_2)$$

固有値と正則行列

（固有値と正則行列）

行列 $\boldsymbol{A}$ が正則であるための必要十分条件は、
0を固有値として持たないことである。

証明

$\boldsymbol{A}$ が0を固有値として持つ。$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax} = 0\boldsymbol{x}$ となる固有ベクトル$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在する。

$\Leftrightarrow$ 同次連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ が非自明解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を持つ。

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ は正則でない。

よって、対偶をとることによって、

$\boldsymbol{A}$ は正則 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ が0を固有値として持たない。

$\mathcal{QED}$

相似な行列

相似な行列

定義（相似な行列）

n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、n 次の正則行列 $\boldsymbol{P}$ とその逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて

$$\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

と表した行列 $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{A}$ と相似な行列という。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

正則行列と、
その逆行列で
サンドイッチ状にする。

相似な行列の性質１

（相似な行列間の行列式の相等）

相似な行列は行列式が等しい。
すなわち、 $\boldsymbol{A}$ を正方行列、 $\boldsymbol{P}$ を正則行列とすると、

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|$$

証明

$$|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|$$

スカラーなので交換可

$$= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}|$$

$$= |\boldsymbol{A}|$$

$|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1$ に注意する。

$\mathcal{QED}$

相似な行列の性質２

（相似な行列間のトレースの相等）

相似な行列はトレースが等しい。
すなわち、 $\boldsymbol{A}$ を正方行列、 $\boldsymbol{P}$ を正則行列とすると、

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})$$

証明

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \mathrm{tr}((\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{P}))$$

$$= \mathrm{tr}((\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}))$$

$$= \mathrm{tr}((\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{A}))$$

$$= \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{A})$$

$$= \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$$

トレースの性質で、
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$
を思い出す。

$\mathcal{QED}$

相似な行列の性質3

（相似な行列間の固有多項式の相等）

相似な行列は固有多項式が等しい。
すなわち、$\boldsymbol{A}$ を正方行列、 $\boldsymbol{P}$ を正則行列とすると、

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \varphi_{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}(\lambda)$$

証明

$$\begin{aligned}
\varphi_{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}(\lambda) &= \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \lambda \boldsymbol{I}) \\
&= \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \lambda \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}) \\
&= \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}\lambda \boldsymbol{I}\boldsymbol{P}) \\
&= \det(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}) \\
&= \left|\boldsymbol{P}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \lambda \boldsymbol{I}\right|\left|\boldsymbol{P}\right| \\
&= \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \\
&= \varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)
\end{aligned}$$

$\mathcal{QED}$

相似な行列の性質4

（相似な行列間の固有値の相等）

相似な行列は固有値が等しい。

証明

固有多項式（固有方程式）が等しいので、明らかに成り立つ。

QED

例

正方行列を $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ とし、正則行列を $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ とする。

まず、 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求める。

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -7 & 3\end{bmatrix}$$

次に相似な行列 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ を求めておく。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 17 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 21 \\ -40 & -27 \end{bmatrix}$$

まず、行列式について、

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$\left|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\right| = \begin{vmatrix} 31 & 21 \\ -40 & -27 \end{vmatrix} = -837 - (-840) = 3$$

次にトレースについて,

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = \mathrm{tr}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 + 2 = 4$$

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\right) = \mathrm{tr}\begin{bmatrix} 31 & 21 \\ -40 & -27 \end{bmatrix} = 31 - 27 = 4$$

最後に、固有多項式と固有値について。

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\varphi_{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}}(\lambda) = \det\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} - \lambda \boldsymbol{I}\right) = \begin{vmatrix} 31-\lambda & 21 \\ -40 & -27-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

よって、 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ の両方ともに、
固有値は $\lambda = 1, 3$

固有値の応用（行列の対角化）

正則行列による対角化

　固有値や固有ベクトルを利用すると、正方行列を対角化することができる。まず、必要な記法や概念を説明する。そのあとで、行列 $\boldsymbol{A}$ に対する固有値や固有ベクトルをから行列 $\boldsymbol{A}$ を対角行列に変換する方法を与える。また、対角化された行列による応用をいくつか示す。

対角行列(重要)

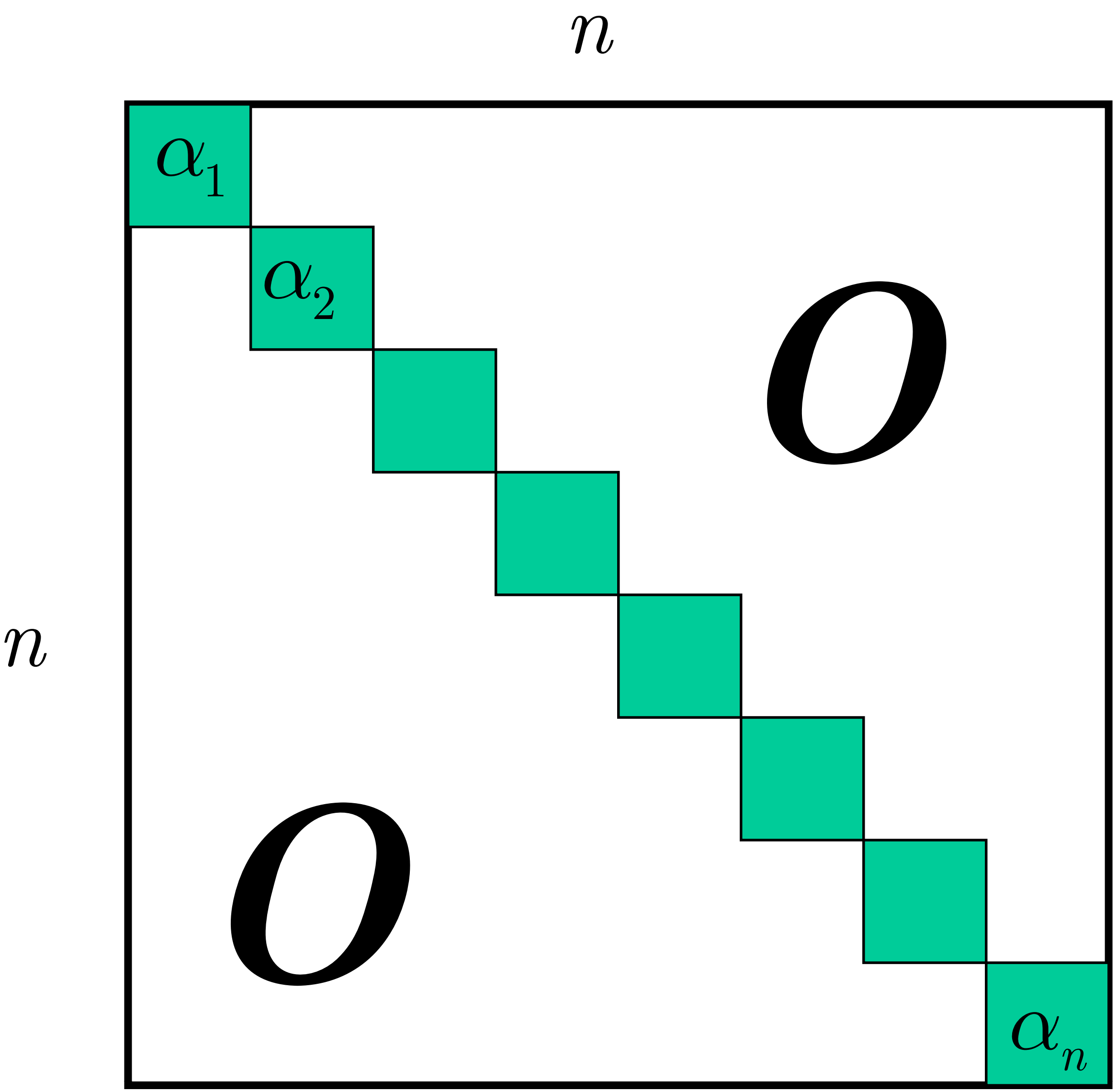
定義(対角行列)

n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、対角成分以外が全て0である行列を**対角行列**という。
すなわち、

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ここで、$\alpha_i \in C$ である。

対角行列のイメージ



対角化可能

定義(対角化可能)

A を n 次の正方行列とする。
A に相似な対角行列 D が存在するとき、
すなわち、正則行列 P によって、

$$D = P^{-1}AP$$

が対角行列になるとき、
行列 A は正則行列 P で**対角化可能**であるという。

逆行列と、正則行列でサンドイッチ
にすることで、対角化する。
実は、P としては、固有ベクトルを
並べたものにすればよい。
このとき、対角成分として、固有値
が並ぶ。

幾何学的重複度と代数的重複度

定義(幾何学的重複度と代数的重複度)

n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ の全ての異なる固有値を
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とする。

(1)固有値 λ_i に対する、固有空間 $V_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}\}$
の次元 $\dim V_{\lambda_i}$ を固有値 λ_i に対する
幾何学的重複度(geometric multicilicity)といい

$$m_g(\lambda_i)$$

とかく。

(2)固有値を用いることで、固有多項式 は

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n \bullet (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \bullet (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \bullet \cdots \bullet (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

と表せる。このとき、m_i を各固有値 λ_i に対する
代数的重複度(algebric multicilicity)といい

$$m_a(\lambda_i)$$

とかく。

幾何的重複度と代数的重複度の関係

（幾何的重複度と代数的重複度）

n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を λ とする。
また、固有値 λ に関する幾何的重複度を $m_g(\lambda)$ とし、代数的重複度を $m_a(\lambda)$ とする。このとき、次の式が成り立つ。

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

証明略

この式より、幾何的重複度を、固有値全てに対して総和をとっても、 n にならないことがあるということがわかる。（なお、代数的重複度を固有値全てに対して総和をとれば n である。）

対角化の判定法

（対角化可能性）

n 次の正方行列を $\boldsymbol{A}$ とし、$\boldsymbol{A}$ の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とする。このとき、$\boldsymbol{A}$ が対角化可能であるための必要十分条件は、次式を満たすことである。

$$m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

証明略

対角化手順の概略(重要)

これまでの議論より、n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$の対角化手順が構成できる。

（1）　$\boldsymbol{A}$の固有方程式 $\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=0$ 　を解き、
固有値 λ_i 　を求める。

（2）各固有値 λ_i 毎に、固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ を求める。

（3）全ての固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ 　を順番に並べて行列

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n\end{bmatrix}$$

を定義する。

（4）（3）の行列 $\boldsymbol{P}$ 　の逆行列$\boldsymbol{P}^{-1}$ を求める。

（5）　$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算すると対角行列 $\boldsymbol{D}_A$ 　となる。

対角化手順中の注意1（固有値の代数的重複度）

（1）　$\boldsymbol{A}$の固有多項式$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ を求め、n 次の固有多項方程式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = 0$$

を解く。

もし、実数で対角化を行いたいにもかかわらず、固有方程式の解に実数でなもの（複素数）が現れたら、実数では対角化できない。

各固有値 λ_i とその代数的重複度 $m_a(\lambda_i)$ を求める。

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_a(\lambda_1)} \bullet (\lambda_2 - \lambda)^{m_a(\lambda_2)} \bullet \cdots \bullet (\lambda_k - \lambda)^{m_a(\lambda_k)}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) = n$$

が成り立つ。

対角化手順中の注意2（固有空間と幾何学的重複度）

（2）各固有値 λ_i 毎に、固有空間 $V_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i\}$ を求める。

固有空間は、同次連立一次方程式 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ の解空間であるので、連立一次方程式を解くことで、求められる。

幾何的重複度 $m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$ も求める。

すべての固有値 λ_i に対して、

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$$

であれば対角化可能。さもなければ、対角化不可能。

対角化可能ならば、固有空間の要素である固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i \in V_{\lambda_i}$ を求める。

対角化手順の注意3(対角行列と固有値）

（3）〜(5）
固有値がすべて非零なら、
変換の行列 $\boldsymbol{P}$ は正則行列であり、逆行列が存在する。

対角行列の各成分は、対応する固有値となる。
すなわち、固有値 λ_i の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とし、変換行列を
$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_k\end{bmatrix}$ とすると、次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{D}_A=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k\end{bmatrix}$$

例

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$ の固有値は、$\lambda_1=1, \lambda_2=3$ である。

（各固有値の代数重複度はそれぞれ1）

また、$\lambda_1=1$ に対する固有空間 V_{λ_1} は、

$$V_{\lambda_1}=\left\{k\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \mid k\in\boldsymbol{R}\right\} \qquad \dim V_{\lambda_1}=1$$

また、$\lambda_2=3$ に対する固有空間 V_{λ_2} は、

$$V_{\lambda_2}=\left\{k\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \mid k\in\boldsymbol{R}\right\} \qquad \dim V_{\lambda_2}=1$$

よって、全ての固有値で、代数的重複度と幾何的重複度が等しい。
よって、対角化可能。

固有ベクトルをならべて正則行列 $\boldsymbol{P}$ を作る。

ここでは、

$$\boldsymbol{P} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、$\boldsymbol{P}^{-1}$は

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ と相似な行列　$P^{-1}AP$　を求める。

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

固有値が並んでいることに注意する。
変換の行列　P　における固有ベクトルの順序が対角行列中の固有値の順序として現れる。

練習

次の行列を対角化せよ。

（１） $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

（２） $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

対角行列の累乗

$\boldsymbol{D}$ を n 次の対角行列とする。すなわち、

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

とする。また、k を自然数とする。このとき、行列 $\boldsymbol{D}$ の k 乗 $\boldsymbol{D}^k$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{D}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}$$

同値な行列の累乗

（1）　$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{k}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{P}$$

（2）　$$\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{k}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{P}^{-1}$$

証明

（1）
$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{k}=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\cdots\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)$$
$$=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\right)\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\cdots\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$
$$=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$
$$=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

（2）も同様。

$\mathcal{QED}$

行列の累乗

　これまでの議論より、対角化可能な行列では以下の手順で累乗を求めることができる。

（1）行列$\boldsymbol{A}$ を対角化して、対角行列

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

を求める。

（2）両辺の k 乗を求める。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P} = \left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^k = \boldsymbol{D}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}$$

(3) 両辺の左から $\boldsymbol{P}$ を右から $\boldsymbol{P}^{-1}$ を掛ける。

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^{k}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}^{k} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

例

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$ とし、$\boldsymbol{A}^k$ を求めてみる。

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$ とする。

このとき、

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

よって、

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^k=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}^k$$

$$\therefore \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^k\end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3^k & 3^k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^k+1 & 3^k-1 \\ 3^k-1 & 3^k+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{3^k+1}{2} & \dfrac{3^k-1}{2} \\ \dfrac{3^k-1}{2} & \dfrac{3^k+1}{2} \end{bmatrix}$$

練習

次の行列を求めよ。

（1）
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k$$

（2）
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$