2009 年度　情報理論㊂試験解答例

1. 情報量（２１点）

　次の無記憶情報源

$$A=\begin{Bmatrix} a & , & b & , & c \\ \frac{1}{3} & , & \frac{1}{3} & , & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}、B=\begin{Bmatrix} a & , & b & , & c \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}、B=\begin{Bmatrix} a & , & b & , & c \\ \frac{1}{8} & , & \frac{2}{8} & , & \frac{5}{8} \end{Bmatrix}$$

について問いに答えよ。必要なら次の値を用いよ。$\log_2 3 \simeq 1.585$、$\log_2 5 \simeq 2.322$

(1)次の文字列 $w_i,(i=1,2)$ が各情報源 $X,(X=A,B,C)$ から生成されたときの自己情報量 $I_X(w_i)$ をそれぞれ求めよ。

自己情報量は $I(w)=-\log P(w)$ で求められる。無記憶情報源から記号列 w が生成される確率は $P(w)=\prod_{\alpha\in w} P(\alpha)$ であるので、自己情報量は $I(w)=-\sum_{\alpha\in w}\log P(\alpha)$ である。

① $w_1 = aba$

$I_A(aba)=-\log P_A(a)-\log P_A(b)-\log P_A(a)$
$=\log 3+\log 3+\log 3$
$=3\log 3$
$\simeq 4.755\quad [bit]$

$I_B(aba)=-\log P_B(a)-\log P_B(b)-\log P_B(a)$
$=\log 2+\log 4+\log 2$
$=1+2+1$
$\simeq 4.0\quad [bit]$

$I_C(aba)=-\log P_C(a)-\log P_C(b)-\log P_C(a)$
$=\log 8+\log 4+\log\frac{8}{5}$
$=3+2+(3-\log 5)$
$\simeq 5.678\quad [bit]$

② $w_2 = abbccc$

$I_A(abbccc)=-\log P_A(a)-2\log P_A(b)-3\log P_A(c)$
$=6\log 3$
$\simeq 9.510\quad [bit]$

$I_B(abbccc)=-\log P_B(a)-2\log P_B(b)-3\log P_B(c)$
$=\log 2+2\times\log 4+3\times\log 4$
$=11.0\quad [bit]$

$$I_C(abbccc) = -\log P_C(a) - 2\log P_C(b) - 3\log P_C(c)$$
$$= \log 8 + 2\times\log 4 + 3\times(\log 8 - \log 5)$$
$$= 16 - 3\log 5$$
$$\simeq 9.034 \quad [bit]$$

(2)平均情報量（エントロピー） $H(A), H(B), H(C)$ を求めよ。

$$H(A) = -\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}$$
$$= \log 3$$
$$\simeq 1.585 \quad [bit/\text{記号}]$$

$$H(B) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 2$$
$$= \frac{3}{2}$$
$$= 1.50 \quad [bit/\text{記号}]$$

$$H(C) = -\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{2}{8}\log\frac{2}{8} - \frac{5}{8}\log\frac{5}{8}$$
$$= \log 8 - \frac{2}{8}\log 2 - \frac{5}{8}\log 5$$
$$= \frac{22 - 5\log 5}{8}$$
$$\simeq 1.299 \quad [bit/\text{記号}]$$

2.ハフマン符号（情報源符号化法）（２９点）

無記憶情報源 $S = \begin{Bmatrix} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ \frac{20}{36} & , & \frac{5}{36} & , & \frac{5}{36} & , & \frac{3}{36} & , & \frac{3}{36} \end{Bmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

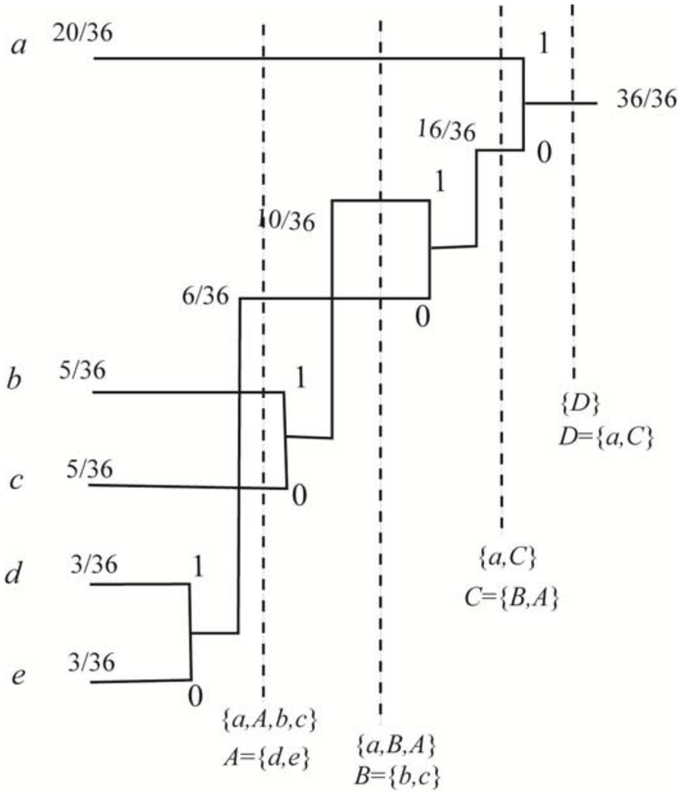
必要なら以下の値を用いよ。

$\log_2 3 \simeq 1.585$ 、 $\log_2 5 \simeq 2.322$

(1)情報源 S のエントロピー $H(S)$ を求めよ。（５点）

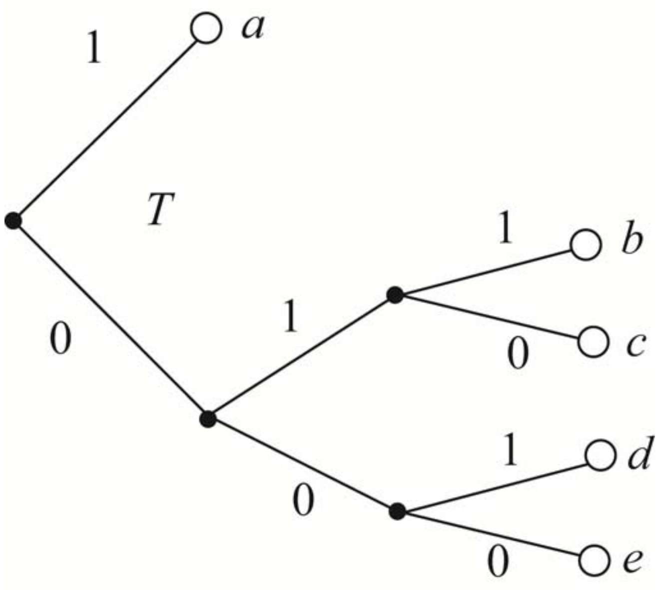
$$H(S) = -\frac{20}{36}\log\frac{20}{36} - \frac{5}{36}\log\frac{5}{36} - \frac{5}{36}\log\frac{5}{36} - \frac{3}{36}\log\frac{3}{36} - \frac{3}{36}\log\frac{3}{36}$$
$$= \log 36 - \frac{20}{36}\log 20 - 2\times\frac{5}{36}\log 5 - 2\times\frac{3}{36}\log 3$$
$$= (2\log 3 + 2) - \frac{40 + 20\log 5 + 10\log 5 + 6\log 3}{36}$$
$$\simeq 5.170 - 3.310$$
$$\simeq 1.860 \quad [bit/\text{記号}]$$

⑵ハフマン符号化法により情報源Sの符号ϕを求めよ。（１０点）
符号の木を葉から順に構成していく。



上図より、次のように符号が求められる。

$\phi = \{a \mapsto 1, b \mapsto 011, c \mapsto 010, d \mapsto 001, e \mapsto 000\}$
（なお、0,1 を交換して得られる$\phi' = \{a \mapsto 0, b \mapsto 100, c \mapsto 101, d \mapsto 110, e \mapsto 111\}$も正解。）
⑶符号ϕの符号の木Tを示せ。（４点）



(4)符号ϕの平均符号語長$\overline{L}$を求めよ。（５点）

$\overline{L}=\sum_{\alpha\in S}P(\alpha)\bullet l_{\alpha}$より求める。

$$\overline{L}=1\times\frac{20}{36}+3\times\frac{5}{36}+3\times\frac{5}{36}+3\times\frac{3}{36}+3\times\frac{3}{36}$$
$$=\frac{20+15+15+9+9}{36}$$
$$=\frac{68}{36}$$
$$\simeq 1.889\quad[bit/\text{記号}]$$

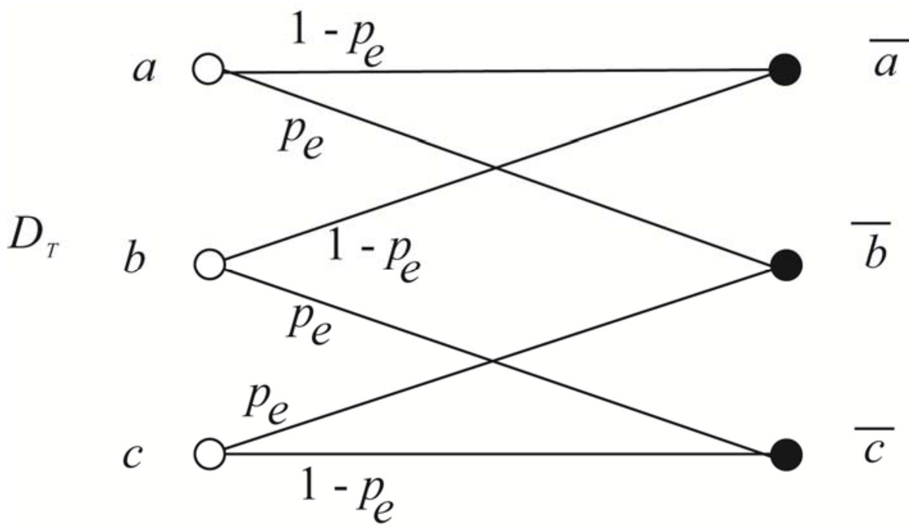
(5)符号ϕの効率eを求めよ。（５点）

$$e=\frac{H(s)}{\overline{L}}$$
$$\simeq\frac{1.860}{1.889}\frac{20+15+15+9+9}{36}$$
$$\simeq 0.985$$

3.通信路（２９点）

次の通信路線図 D_T で表される通信路 T に、送信情報源 $A=\left\{\begin{matrix} a & , & b & , & c \\ P(a) & , & P(b) & , & P(c) \end{matrix}\right\}$ を接続

したところ、受信情報源 $B=\left\{\begin{matrix} \bar{a} & , & \bar{b} & , & \bar{c} \\ P(\bar{a}) & , & P(\bar{b}) & , & P(\bar{c}) \end{matrix}\right\}$ が得られるとする。



このとき、以下の問いに答えよ。必要なら次の値を用いよ。$\log_2 3 \simeq 1.585$

(1) この通信路 T の通信路行列 M_T を示せ。(3 点)

$$M_T=\begin{bmatrix} 1-p_e & p_e & 0 \\ 1-p_e & 0 & p_e \\ 0 & p_e & 1-p_e \end{bmatrix}$$

(2)受信確率 $P(\bar{a}),P(\bar{b}),P(\bar{c})$ を送信確率 $P(a),P(b),P(c)$ および誤り確率 p_e で表せ。(各２点×３＝6 点)

$$\left(P(\bar{a}),P(\bar{b}),P(\bar{c})\right)=\left(P(a),P(b),P(c)\right)M_T$$
$$=\left(P(a),P(b),P(c)\right)\begin{bmatrix} 1-p_e & p_e & 0 \\ 1-p_e & 0 & p_e \\ 0 & p_e & 1-p_e \end{bmatrix}$$
$$=\left((1-p_e)\left(P(a)+P(b)\right),p_e\left(P(a)+P(c)\right),p_eP(b)+(1-p_e)P(c)\right)$$

(3) $p_e=\dfrac{1}{3}$ かつ $P(a)=\dfrac{1}{4},P(b)=\dfrac{1}{2},P(c)=\dfrac{1}{4}$ のとき、条件付きエントロピー $H(A|B)$、$H(B|A)$ および相互情報量 $I(A;B)$ を求めよ。(各５点×３＝１５点)

$$\left(P\left(\bar{a}\right), P\left(\bar{b}\right), P\left(\bar{c}\right)\right) = \left((1-p_e)\left(P(a)+P(b)\right), p_e\left(P(a)+P(c)\right), p_e P(b)+(1-p_e)P(c)\right)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right), \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right), \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

条件付き確率 $P(B=\beta \mid A=\alpha)$ は通信路行列より次表のように求められる。

$P(B=\beta \mid A=\alpha)$	$B=\bar{a}$	$B=\bar{b}$	$B=\bar{c}$
$A=a$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$A=b$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$A=c$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

結合確率 $P(A=\alpha, B=\beta)$ は $P(A=\alpha, B=\beta) = P\left(A=\alpha\right)P(B=\beta \mid A=\alpha)$ より次表のように求められる。

$P(A=\alpha, B=\beta)$	$B=\bar{a}$	$B=\bar{b}$	$B=\bar{c}$
$A=a$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
$A=b$	$\frac{4}{12}$	0	$\frac{2}{12}$
$A=c$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

条件付き確率 $P(A=\alpha \mid B=\beta)$ は $P(A=\alpha \mid B=\beta) = P(A=\alpha, B=\beta)/P\left(B=\beta\right)$ より次のように求められる。

$P(A=\alpha \mid B=\beta)$	$B=\bar{a}$	$B=\bar{b}$	$B=\bar{c}$
$A=a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0
$A=b$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$
$A=c$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

条件付きエントロピー $H\left(B \mid A\right)$ は次のように求められる。

$$H(B\,|\,a) = H(B\,|\,b) = H(B\,|\,c) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore H(B\,|\,A) = P(a)H(B\,|\,a) + P(b)H(B\,|\,b) + P(c)H(B\,|\,c)$$

$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log\frac{2}{3}$$

$$\simeq 0.918 \quad [bit/記号]$$

条件付きエントロピー $H(A\,|\,B)$ は次のように求められる。

$$H(A\,|\,\bar{a}) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0.918,$$

$$H(A\,|\,\bar{b}) = H(A\,|\,\bar{c}) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) = 1.0$$

$$\therefore H(A\,|\,B) = P(\bar{a})H(B\,|\,\bar{a}) + P(\bar{b})H(A\,|\,\bar{b}) + P(\bar{c})H(A\,|\,\bar{c})$$

$$= \frac{1}{2}\times 0.918 + \frac{1}{6}\times 1.0 + \frac{1}{3}\times 1.0$$

$$\simeq 0.959 \quad [bit/記号]$$

相互情報量 $I(A;B)$ は $I(A;B) = H(A) - H(A\,|\,B) = H(B) - H(B\,|\,A)$ より次のように求められる。

$$H(A) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4$$

$$= \frac{2+2+2}{4}$$

$$= 1.5 \quad [bit/記号]$$

$$I(A;B) = H(A) - H(A\,|\,B)$$

$$\simeq 1.5 - 0.959$$

$$\simeq 0.54 \quad [bit/記号]$$

$$H(B) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\log\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}$$

$$\simeq 1.46 \quad [bit/記号]$$

$$\therefore I(A;B) = H(B) - H(B\,|\,A)$$

$$\simeq 1.46 - 0.918$$

$$\simeq 0.54 \quad [bit/記号]$$

(4)　$p_e = \frac{1}{3}$ のとき、この通信路 T の通信路容量 $C(T)$ および通信路容量 $C(T)$ を実現する送信確率 $P(a), P(b), P(c)$ を求めよ。（５点）

$$H(B|a)=H(B|b)=H(B|c)=\mathcal{H}\left(p_e\right)$$
$$\therefore H(B|A)=\mathcal{H}\left(p_e\right)$$
$$=\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$

よって、相互情報量は次のように求められる。

$$I(A;B)=H(B)-H(B|A)$$
$$=H(B)-\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)\quad [bit/\text{記号}]$$

よって、通信路容量 $C(T)$ は次のよぅに求められる。

$$C(T)=\max I(A;B)$$
$$=\left\{\max H(B)\right\}-\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$=\log 3-\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\simeq 1.585-0.918$$
$$\simeq 0.667\quad [bit/\text{記号}]$$

通信路容量 $C(T)$ は受信確率が $P\left(\bar{a}\right)=P\left(\bar{b}\right)=P\left(\bar{c}\right)=\frac{1}{3}$ のとき実現される。

$$\begin{cases}\left(P\left(\bar{a}\right),P\left(\bar{b}\right),P\left(\bar{c}\right)\right)=\left(P(a),P(b),P(c)\right)M_T\\ P(a)+P(b)+P(c)=1\end{cases}$$

より、

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(P(a),P(b),P(c)\right)\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\ \frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\\ P(a)+P(b)+P(c)=1\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\\ \frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P(a)\\ P(b)\\ P(c)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

拡大係数行列を行基本変形する。

より、

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{1\text{列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3\times(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{2\text{列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{2}\times(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3\text{列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

以上より、送信確率は$\left(P(a),P(b),P(c)\right)=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$と求められる。

4.ハミング符号（誤り訂正符号）（２１点）

$(7,4)$ のハミング符号を以下のように表す。

$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (x^1, x^2, x^3, x^4, p^1, p^2, p^3)$

ここで、 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ は情報ビットであり、 $\boldsymbol{p} = \left(p^1, p^2, p^3\right)$ は冗長ビットである。各冗長ビットは次式で定義する。

$p^1 = x^1 \oplus x^2 \oplus x^3, \quad p^2 = x^2 \oplus x^3 \oplus x^4, \quad p^3 = x^1 \oplus x^2 \oplus x^4$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1)次の系列 $\boldsymbol{x}_i, (i = 1,2,3)$ を情報ビットとする $(7,4)$ ハミング符号語 $\boldsymbol{w}_i$ および復号領域 Ω_i を求めよ。符号語各２点×３＝６点、復号領域各２点×３＝６点）

① $\boldsymbol{x}_1 = 1011$

$p_1^1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$p_1^2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$

$p_1^3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

よって、次のように求められる。

$\boldsymbol{w}_1 = 1011\,000$

$$\Omega_1 = \left\{ \begin{matrix} 1011\,000, 0011\,000, 1111\,000, 1001\,000, \\ 1010\,000, 1011\,100, 1011\,010, 1011\,001 \end{matrix} \right\}$$

② $\boldsymbol{x}_2 = 0010$

$p_2^1 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

$p_2^2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$

$p_2^3 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

よって、次のように求められる。

$\boldsymbol{w}_2 = 0010\,110$

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{matrix} 0010\,110, 1010\,110, 0110\,110, 0000\,110, \\ 0011\,110, 0010\,010, 0010\,100, 0010\,111 \end{matrix} \right\}$$

③ $\boldsymbol{x}_3 = 0011$

$p_3^1 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

$p_3^2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$

$p_3^3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

よって、次のように求められる。

$\boldsymbol{w}_3 = 0011\,101$

$$\Omega_3 = \left\{ \begin{matrix} 0011\,101, 1011\,101, 0111\,101, 0001\,101, \\ 0010\,101, 0011\,001, 0011\,111, 0011\,100 \end{matrix} \right\}$$

(2)次の系列$\boldsymbol{y}_j, (j=4,5,6)$は、　(7,4)ハミング符号として送信された符号語$\boldsymbol{w}_j$の受信符号語$\boldsymbol{y}_j$である。各受信符号$\boldsymbol{y}_j$に対して混入した誤りベクトルe_jおよび正しい送信符号語$\boldsymbol{w}_j$を求めよ。（各３点×３＝９点）

誤りベクトルとシンドロームの一覧表を作成する。

$p^1 = x^1 \oplus x^2 \oplus x^3, p^2 = x^2 \oplus x^3 \oplus x^4, p^3 = x^1 \oplus x^2 \oplus x^4$ （冗長ビットの定義式）より、

$$\begin{cases} s^1 = y^1 \oplus y^2 \oplus y^3 \oplus y^5 \\ s^2 = y^2 \oplus y^3 \oplus y^4 \oplus y^6 \\ s^3 = y^1 \oplus y^2 \oplus y^4 \oplus y^7 \end{cases}$$

とシンドロームの定義式が得られる。これより、誤りベクトルとシンドロームの一覧表を作成する。

								s^1	s^2	s^3
e_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
e_2	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
e_3	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
e_4	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
e_5	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e_6	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
e_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
e_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

各受信符号語からシンドロームを計算し誤りベクトルを特定する。

④ $\boldsymbol{y}_4 = 1111100$

$s_4^1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$
$s_4^2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1,$
$s_4^3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$

$s_4 = (s_4^1, s_4^2, s_4^3) = 011$ より、混入した誤りベクトルは$e_4 = 0001000$である。

よって、次のように求められる。
$\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{y}_4 \oplus e_4 = 1111100 \oplus 0001000 = 1110100$

⑤ $\boldsymbol{y}_5 = 0010110$

$s_5^1 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$
$s_5^2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$
$s_5^3 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

$s_5 = \left(s_5^1, s_5^2, s_5^3\right) = 000$ より、混入した誤りベクトルは $e_0 = 0000000$ である。

よって、次のように求められる。

$\boldsymbol{w}_5 = \boldsymbol{y}_5 \oplus e_0 = 0010110 \oplus 0000000 = 0010110$

⑥ $\boldsymbol{y}_6 = 0001111$

$s_6^1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1,$
$s_6^2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$
$s_6^3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$

$s_6 = \left(s_6^1, s_6^2, s_6^3\right) = 100$ より、混入した誤りベクトルは $e_5 = 0000100$ である。

よって、次のように求められる。

$\boldsymbol{w}_6 = \boldsymbol{y}_6 \oplus e_5 = 0001111 \oplus 0000100 = 0001011$