

2009 年度 情報理論定期試験解答例

1. 情報量 (21点)

次の無記憶情報源

$$A = \left\{ \begin{matrix} a & b & c & d \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{matrix} a & b & c & d \\ \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{matrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{matrix} a & b & c & d \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & \frac{12}{16} \end{matrix} \right\}$$

について問いに答えよ。必要なら次の値を用いよ。 $\log_2 3 \approx 1.585$

(1) 次の文字列 $w_i, (i=1,2)$ が各情報源 $X, (X=A, B, C)$ から生成されたときの自己情報量 $I_X(w_i)$ をそれぞれ求めよ。(各 $2 \times 6 = 12$ 点)

自己情報量 $I(w) = -\log P(w)$ で求められる。無記憶情報源から記号列 w が生成される確率は

$$P(w) = \prod_{\alpha \in w} P(\alpha) \text{ であるので、自己情報量は } I(w) = -\sum_{\alpha \in w} \log P(\alpha) \text{ である。}$$

$$\textcircled{1} w_1 = abcd$$

$$\begin{aligned} I_A(abcd) &= -\log P_A(a) - \log P_A(b) - \log P_A(c) - \log P_A(d) \\ &= \log 4 + \log 4 + \log 4 + \log 4 \\ &= 8 \text{ [bit]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_B(abcd) &= -\log P_B(a) - \log P_B(b) - \log P_B(c) - \log P_B(d) \\ &= \log 2 + \log 4 + \log 8 + \log 8 \\ &= 9 \text{ [bit]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_C(abcd) &= -\log P_C(a) - \log P_C(b) - \log P_C(c) - \log P_C(d) \\ &= \log 16 + \log 16 + \log 8 + \log \frac{4}{3} \\ &= 13 - \log 3 \\ &= 11.415 \text{ [bit]} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} w_2 = dddcccbabbcccd$$

$$\begin{aligned} I_A(dddcccbbabbcccd) &= -\log P_A(a) - 4\log P_A(b) - 6\log P_A(c) - 8\log P_A(d) \\ &= 19 \times \log 4 \\ &= 38 \text{ [bit]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_B(dddcccbbabbcccd) &= -\log P_B(a) - 4\log P_B(b) - 6\log P_B(c) - 8\log P_B(d) \\ &= \log 2 + 4 \times \log 4 + 6 \times \log 8 + 8 \times \log 8 \\ &= 1 + 8 + 18 + 24 \\ &= 51 \text{ [bit]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_c(\text{dddddccbbabbcccd}) &= -\log P_c(a) - 4\log P_c(b) - 6\log P_c(c) - 8\log P_c(d) \\
&= \log 16 + 4 \times \log 16 + 6 \times \log 8 + 8 \times (\log 4 - \log 3) \\
&\approx 4 + 16 + 18 + 16 - 8 \times (1.585) \\
&= 54 - 12.68 \\
&= 41.32 \text{ [bit]}
\end{aligned}$$

(2) 平均情報量 (エントロピー) $H(A), H(B), H(C)$ を求めよ。(各 3 点 $\times$ 3 = 9 点)

無記憶情報源 X の平均情報量は、 $H(X) = -\sum_{\alpha \in X} P(\alpha) \log P(\alpha)$ で求められる。

$$\begin{aligned}
H(A) &= -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \\
&= \log 4 \\
&= 2 \text{ [bit / 記号]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(B) &= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{8} \times 3 \\
&= \frac{4 + 4 + 3 + 3}{8} \\
&= \frac{14}{8} \\
&= 1.75 \text{ [bit / 記号]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(C) &= -\frac{1}{16} \log \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \log \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \log \frac{3}{4} \\
&\approx \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{3}{4} \times (2 - 1.585) \\
&= \frac{2 + 2 + 3 + 12 - 9.51}{8} \\
&= \frac{9.49}{8} \\
&= 1.19 \text{ [bit / 記号]}
\end{aligned}$$

2. ハフマン符号 (情報源符号化法) (29 点)

無記憶情報源 $S = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ \frac{10}{24} & , & \frac{6}{24} & , & \frac{5}{24} & , & \frac{2}{24} & , & \frac{1}{24} \end{matrix} \right\}$ に対して、以下の問いに答えよ。

必要なら以下の値を用いよ。

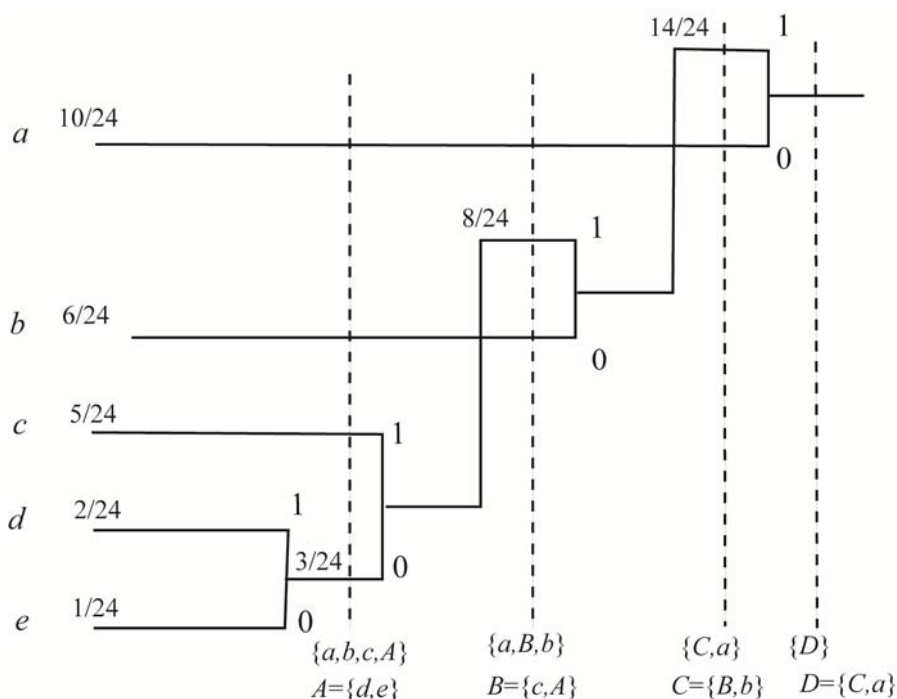
$$\log_2 3 \approx 1.585, \quad \log_2 5 \approx 2.322$$

(1) 情報源 S のエントロピー $H(S)$ を求めよ。(5 点)

$$\begin{aligned}
H(S) &= \frac{10}{24} \log \frac{24}{10} + \frac{6}{24} \log \frac{24}{6} + \frac{5}{24} \log \frac{24}{5} + \frac{2}{24} \log \frac{24}{2} + \frac{1}{24} \log 24 \\
&= \log 24 - \frac{5}{12} \log 10 - \frac{1}{4} \log 6 - \frac{5}{24} \log 5 - \frac{1}{24} \log 2 \\
&= \log 8 + \log 3 - \frac{5}{12} (\log 5 + \log 2) - \frac{1}{4} (\log 3 + \log 2) - \frac{5}{24} \log 5 - \frac{1}{24} \log 2 \\
&= \frac{72-10-6-1}{24} + \frac{12-3}{12} \log 3 + \frac{-10-5}{24} \log 5 \\
&= \frac{54}{24} + \frac{3}{4} \times 1.585 - \frac{5}{8} \times 2.322 \\
&= \frac{9}{4} + 1.189 - 1.451 \\
&\approx 1.988 \text{ [bit / 記号]}
\end{aligned}$$

(2) ハフマン符号化法により情報源 S の符号 ϕ を求めよ。(10点)

符号の木を葉から順に構成していく。

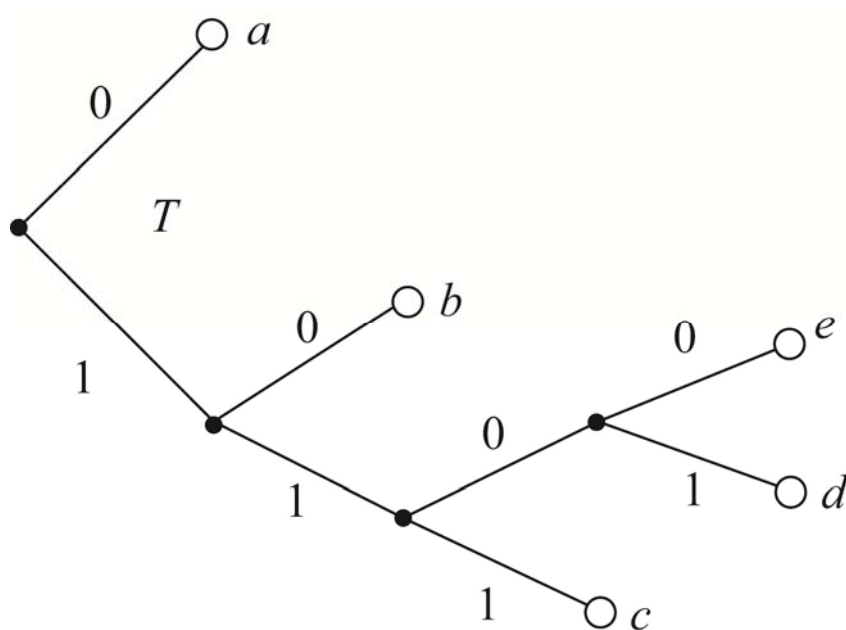


上図より、次のように符号が求められる。

$$\phi = \{a \mapsto 0, b \mapsto 10, c \mapsto 111, d \mapsto 1101, e \mapsto 1100\}$$

(なお、0,1 を交換して得られる $\phi' = \{a \mapsto 1, b \mapsto 01, c \mapsto 000, d \mapsto 0010, e \mapsto 0011\}$ も正解。)

(3) 符号 ϕ の符号の木 T を示せ。(4点)



(4)符号 ϕ の平均符号語長 $\bar{L}$ を求めよ。(5点)

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \frac{10}{24} \times 1 + \frac{6}{24} \times 2 + \frac{5}{24} \times 3 + \frac{2}{24} \times 4 + \frac{1}{24} \times 4 \\ &= \frac{10+12+15+8+4}{24} \\ &= \frac{49}{24} \\ &= 2.04 \quad [\text{bit} / \text{記号}]\end{aligned}$$

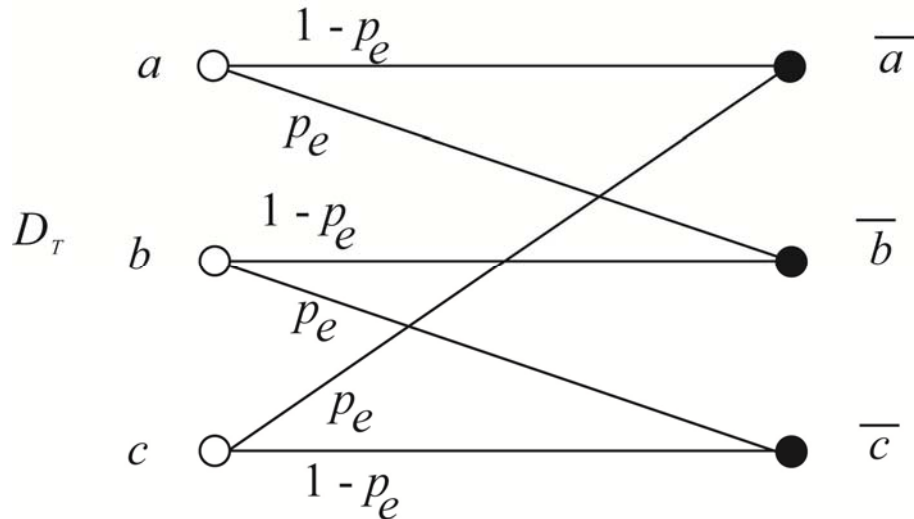
(5)符号 ϕ の効率 e を求めよ。(5点)

$$e = \frac{H(S)}{\bar{L}} = \frac{1.99}{2.04} \approx 0.97$$

3.通信路（29点）

次の通信路線図 D_T で表される通信路 T に、送信情報源 $A = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c \\ P(a) & , & P(b) & , & P(c) \end{matrix} \right\}$ を接続

したところ、受信情報源 $B = \left\{ \begin{matrix} \bar{a} & , & \bar{b} & , & \bar{c} \\ P(\bar{a}) & , & P(\bar{b}) & , & P(\bar{c}) \end{matrix} \right\}$ が得られるとする。



このとき、以下の問いに答えよ。必要なら次の値を用いよ。 $\log_2 3 \approx 1.585$

(1) この通信路 T の通信路行列 M_T を示せ。（3点）

$$M_T = \begin{bmatrix} 1-p_e & p_e & 0 \\ 0 & 1-p_e & p_e \\ p_e & 0 & 1-p_e \end{bmatrix}$$

(2) 受信確率 $P(\bar{a}), P(\bar{b}), P(\bar{c})$ を送信確率 $P(a), P(b), P(c)$ および誤り確率 p_e で表せ。（各2点

$\times 3 = 6$ 点）

$$(P(\bar{a}), P(\bar{b}), P(\bar{c})) = (P(a), P(b), P(c)) M_T$$

$$= (P(a), P(b), P(c)) \begin{bmatrix} 1-p_e & p_e & 0 \\ 0 & 1-p_e & p_e \\ p_e & 0 & 1-p_e \end{bmatrix}$$

$$= (P(a)(1-p_e) + P(c)p_e, P(a)p_e + P(b)(1-p_e), P(b)p_e + P(c)(1-p_e))$$

(3) $p_e = \frac{1}{2}$ かつ $P(a) = \frac{1}{4}, P(b) = \frac{1}{2}, P(c) = \frac{1}{4}$ のとき、条件付きエントロピー $H(A|B)$ 、

$H(B|A)$ および相互情報量 $I(A; B)$ を求めよ。（各5点 $\times 3 = 15$ 点）

$$\begin{aligned}
(P(\bar{a}), P(\bar{b}), P(\bar{c})) &= (P(a)(1-p_e) + P(c)p_e, P(a)p_e + P(b)(1-p_e), P(b)p_e + P(c)(1-p_e)) \\
&= \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8} \right)
\end{aligned}$$

条件付き確率 $P(B = \beta | A = \alpha)$ は通信路行列より次表のように求められる。

$P(B = \beta A = \alpha)$	$B = \bar{a}$	$B = \bar{b}$	$B = \bar{c}$
$A = a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$A = b$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$A = c$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

結合確率 $P(A = \alpha, B = \beta)$ は $P(A = \alpha, B = \beta) = P(A = \alpha)P(B = \beta | A = \alpha)$ より次表のように求められる。

$P(A = \alpha, B = \beta)$	$B = \bar{a}$	$B = \bar{b}$	$B = \bar{c}$
$A = a$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
$A = b$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$A = c$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$

条件付き確率 $P(A = \alpha | B = \beta)$ は $P(A = \alpha | B = \beta) = P(A = \alpha, B = \beta) / P(B = \beta)$ より次のように求められる。

$P(A = \alpha B = \beta)$	$B = \bar{a}$	$B = \bar{b}$	$B = \bar{c}$
$A = a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
$A = b$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$A = c$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$

条件付きエントロピーは次のように求められる。

$$\begin{aligned}
H(B|a) &= H(B|b) = H(B|c) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\
\therefore H(B|A) &= P(a)H(B|a) + P(b)H(B|b) + P(c)H(B|c) \\
&= 1 \text{ [bit / 記号]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(A|\bar{a}) &= \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) = 1, H(A|\bar{b}) = H(A|\bar{c}) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.918 \\
\therefore H(A|B) &= P(\bar{a})H(B|\bar{a}) + P(\bar{b})H(A|\bar{b}) + P(\bar{c})H(A|\bar{c}) \\
&= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{8} \times \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8} \times \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 0.25 + \frac{3}{4} \times 0.918 \\
&= 0.25 + 0.6885 \\
&= 0.939 \quad [\text{bit / 記号}]
\end{aligned}$$

相互情報量 $I(A; B)$ は $I(A; B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A)$ より次のように求められる。

$$\begin{aligned}
H(A) &= -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \log 4 \\
&= \frac{2+2+2}{4} \\
&= 1.5 \quad [\text{bit / 記号}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(A; B) &= H(A) - H(A|B) \\
&\approx 1.5 - 0.939 \\
&\approx 0.561 \quad [\text{bit / 記号}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(B) &= -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \log \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \log \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{4} \times 2 + \frac{6}{8} (3 - \log 3) \\
&= 1.561 \quad [\text{bit / 記号}]
\end{aligned}$$

$$\therefore I(A; B) = H(B) - H(B|A) = 0.561 \quad [\text{bit / 記号}]$$

(4) $p_e = \frac{1}{2}$ のとき、この通信路 T の通信路容量 $C(T)$ および通信路容量 $C(T)$ を実現する送信

確率 $P(a), P(b), P(c)$ を求めよ。(5点)

$$\begin{aligned}
H(B|a) &= H(B|b) = H(B|c) = \mathcal{H}(p_e) \\
\therefore H(B|A) &= \mathcal{H}(p_e) \\
&= \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

よって、相互情報量は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
I(A; B) &= H(B) - H(B|A) \\
&= H(B) - 1 \quad [\text{bit / 記号}]
\end{aligned}$$

よって、通信路容量 $C(T)$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
C(T) &= \max I(A; B) \\
&= \{\max H(B)\} - 1 \\
&= \log 3 - 1 \\
&= 0.585 \quad [\text{bit} / \text{記号}]
\end{aligned}$$

通信路容量 $C(T)$ は受信確率が $P(\bar{a}) = P(\bar{b}) = P(\bar{c}) = \frac{1}{3}$ のとき実現される。

$$\begin{cases} (P(\bar{a}), P(\bar{b}), P(\bar{c})) = (P(a), P(b), P(c)) M_T \\ P(a) + P(b) + P(c) = 1 \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = (P(a), P(b), P(c)) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ P(a) + P(b) + P(c) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(a) \\ P(b) \\ P(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{-2 \times (2), -2 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \\
&\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

以上より、送信確率は $P(a) = P(b) = P(c) = \frac{1}{3}$ と求められる。

4.ハミング符号（誤り訂正符号）（21点）

(7,4)のハミング符号を以下のように表す。

$$\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x^1, x^2, x^3, x^4, p^1, p^2, p^3)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ は情報ビットであり、 $\mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3)$ は冗長ビットである。各冗長

ビットは次式で定義する。

$$p^1 = x^1 \oplus x^2 \oplus x^3, \quad p^2 = x^2 \oplus x^3 \oplus x^4, \quad p^3 = x^1 \oplus x^2 \oplus x^4$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1)次の系列 $\mathbf{x}_i, (i=1,2,3)$ を情報ビットとする (7,4)ハミング符号語 $\mathbf{w}_i$ および復号領域 Ω_i を求めよ。(符号語各2点×3=6点、復号領域各2点×3=6点)

各符号語 $\mathbf{w}_i$ は、定義式より冗長ビットを計算し求める。

復号領域は、誤りベクトルの集合 $E = \left\{ \begin{array}{l} 0000000, 0000001, 0000010, 0000100, \\ 0001000, 0010000, 0100000, 1000000 \end{array} \right\}$ の各要素を符号語

に排他的論理和することで得られる。

① $\mathbf{x}_1 = 0100$

$$p_1^1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$p_1^2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$p_1^3 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

よって、次のように求められる。

$$\mathbf{w}_1 = 0100111$$

$$\Omega_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0100111, 0100110, 0100101, 0100011, \\ 0101111, 0110111, 0000111, 1100111 \end{array} \right\}$$

② $\mathbf{x}_2 = 0110$

$$p_2^1 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$p_2^2 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$p_2^3 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

よって、次のように求められる。

$$\mathbf{w}_2 = 0110001$$

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0110001, 0110000, 0110011, 0110101, \\ 0111001, 0100001, 0010001, 1110001 \end{array} \right\}$$

③ $\mathbf{x}_3 = 1111$

$$p_3^1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$p_3^2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$p_3^3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

よって、次のように求められる。

$$\mathbf{w}_3 = 1111111$$

$$\Omega_3 = \left\{ \begin{array}{l} 1111111, 1111110, 1111101, 1111011, \\ 1110111, 1101111, 1011111, 0111111 \end{array} \right\}$$

(2) 次の系列 $\mathbf{y}_j, (j = 4, 5, 6)$ は、(7,4)ハミング符号として送信された符号語 $\mathbf{w}_j$ の受信符号語 $\mathbf{y}_j$ である。各受信符号 $\mathbf{y}_j$ に対して混入した誤りベクトル $\mathbf{e}_j$ および正しい送信符号語 $\mathbf{w}_j$ を求めよ。(各3点×3=9点)

誤りベクトルとシンδροームの一覧表を作成する。

$$p^1 = x^1 \oplus x^2 \oplus x^3, p^2 = x^2 \oplus x^3 \oplus x^4, p^3 = x^1 \oplus x^2 \oplus x^4 \quad (\text{冗長ビットの定義式}) \text{ より、}$$

$$\begin{cases} s^1 = y^1 \oplus y^2 \oplus y^3 \oplus y^5 \\ s^2 = y^2 \oplus y^3 \oplus y^4 \oplus y^6 \\ s^3 = y^1 \oplus y^2 \oplus y^4 \oplus y^7 \end{cases}$$

とシンδροームの定義式が得られる。これより、誤りベクトルとシンδροームの一覧表を作成する。

		s^1	s^2	s^3
$\mathbf{e}_1$	1 0 0 0 0 0 0	1	0	1
$\mathbf{e}_2$	0 1 0 0 0 0 0	1	1	1
$\mathbf{e}_3$	0 0 1 0 0 0 0	1	1	0
$\mathbf{e}_4$	0 0 0 1 0 0 0	0	1	1
$\mathbf{e}_5$	0 0 0 0 1 0 0	1	0	0
$\mathbf{e}_6$	0 0 0 0 0 1 0	0	1	0
$\mathbf{e}_7$	0 0 0 0 0 0 1	0	0	1
$\mathbf{e}_0$	0 0 0 0 0 0 0	0	0	0

各受信符号語からシンδροームを計算し誤りベクトルを特定する。

$$\textcircled{4} \mathbf{y}_4 = 1111000$$

$$s_4^1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1,$$

$$s_4^2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1,$$

$$s_4^3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$\mathbf{s}_4 = (s_4^1, s_4^2, s_4^3) = 111 \text{ より、混入した誤りベクトルは } \mathbf{e}_2 = 0100000 \text{ である。}$$

よって、次のように求められる。

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{y}_4 \oplus \mathbf{e}_2 = 1111000 \oplus 0100000 = 1011000$$

$$\textcircled{5} \mathbf{y}_5 = 0011111$$

$$s_5^1 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0,$$

$$s_5^2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$

$$s_5^3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$s_5 = (s_5^1, s_5^2, s_5^3) = 010$ より、混入した誤りベクトルは $e_6 = 0000010$ である。

よって、次のように求められる。

$$\mathbf{w}_5 = \mathbf{y}_5 \oplus e_6 = 0011111 \oplus 0000010 = 0011101$$

$$\textcircled{6} \mathbf{y}_6 = 1100\ 000$$

$$s_6^1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0,$$

$$s_6^2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1,$$

$$s_6^3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$s_6 = (s_6^1, s_6^2, s_6^3) = 010$ より、混入した誤りベクトルは $e_6 = 0000010$ である。

よって、次のように求められる。

$$\mathbf{w}_6 = \mathbf{y}_6 \oplus e_6 = 1100000 \oplus 0000010 = 1100010$$