H20 年度　情報理論定期試験解答例

１．各種情報量（30 点）

A 社の 2 人 a_1, a_2 、 B 社の 2 人 b_1, b_2 が会合を行うことになった。開催日を候補日集合 $D = \{d_1, d_2\}$ から希望調査で定めることになった。希望人数が一番多い日に開催するとことし、d_1 と d_2 で希望人数が同じ場合には d_1 に開催することにする。このような状況で、以下のような　事象系を考えることにより各種情報量を求めることを考える。

A 社の希望調査結果について、d_1 日に 0 人、d_2 日に 2 人である事象を $A(0,2)$ のように表す。希望調査結果の他の事象も同様に表す。このとき、A 社の希望調査結果の事象系 A および B 社の希望調査結果の事象系 B は、それぞれ以下のような確率分布に従うとする。

$$A = \begin{Bmatrix} A(2,0) & , & A(1,1) & , & A(0,2) \\ \frac{1}{4} & , & \frac{2}{4} & , & \frac{1}{4} \end{Bmatrix} \qquad B = \begin{Bmatrix} B(2,0) & , & B(1,1) & , & B(0,2) \\ \frac{1}{3} & , & \frac{1}{3} & , & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}$$

また、開催日に関する事象系を $D = \begin{Bmatrix} d_1 & , & d_2 \\ P(d_1) & , & P(d_2) \end{Bmatrix}$ とする。

このとき、以下の問に答えよ。

(1) 確率 $P(d_1), P(d_2)$ を求めよ。（4 点、各 2 点）

事象系 A と事象系 B の全ての事象の組み合わせと結合確率は以下の表のようになる。

	$A(2,0)$ $1/4$	$A(1,1)$ $2/4$	$A(0,2)$ $1/4$
$B(2,0)$ $1/3$	d_1 $1/12$	d_1 $2/12$	d_1 $1/12$
$B(1,1)$ $1/3$	d_1 $1/12$	d_1 $2/12$	d_2 $1/12$
$B(0,2)$ $1/3$	d_1 $1/12$	d_2 $2/12$	d_2 $1/12$

ここで、全ての組み合わせは排反であるので、求める確率は対応する確率の和である。
よって、以下のように求められる。

$$P(d_1) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$P(d_2) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(2)自己情報量　$i\left(A(0,2)\right)$ 、$i\left(B(1,1)\right)$ 、$i\left(d_1\right)$ を求めよ。（6 点、各 2 点）

$$i\left(A(0,2)\right) = -\log P\left(A(0,2)\right) = -\log \frac{1}{4} = \log 4 = 2.00 \quad [bit]$$

$$i\left(B(1,1)\right)=-\log P\left(B(1,1)\right)=-\log\frac{1}{3}=\log 3\simeq 1.58\quad [bit]$$

$$i\left(d_1\right)=-\log P\left(d_1\right)=-\log\frac{2}{3}=\log 3-\log 2\simeq 0.58\quad [bit]$$

(3)エントロピー $H(A)$ 、 $H(D)$ を求めよ。（10 点、各 5 点）

$$H(A)=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2$$
$$=\frac{3}{2}$$
$$=1.50\quad [bit/\text{記号}]$$

$$H(D)=-\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\left(=\mathcal{H}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left(\log 3-\log 2\right)+\frac{1}{3}\log 3$$
$$=\log 3-\frac{2}{3}$$
$$\simeq 0.918\quad \left[bit/\text{記号}\right]$$

(4)条件付きエントロピー $H(D|A)$ を求めよ。（5 点）

まず、各事象 $\alpha\in A, \beta\in B$ に対して、条件付確率 $P(\beta|\alpha)$ を求める。

$P(D=\beta \mid A=\alpha)$	$A(2,0)$	$A(1,1)$	$A(0,2)$
d_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
d_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

よって、各事象 $\alpha\in A$ に対する条件付きエントロピー $H(D|\alpha)$ を求める。

$$H(D\mid A(2,0))=-1\log 1-0\log 0=\mathcal{H}\left(1\right)=0$$

$$H(D\mid A(1,1))=-\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}=\mathcal{H}\left(\frac{2}{3}\right)\simeq 0.918$$

$$H(D\mid A(0,2))=-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}=\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)\simeq 0.918$$

以上より、

$$H(D|A)=\sum_{\alpha\in A}P(\alpha)H(D|\alpha)$$
$$=\frac{1}{4}\times H(D|A(2,0))+\frac{2}{4}\times H(D|A(1,1))+\frac{1}{4}\times H(D|A(0,2))$$
$$=\frac{2}{4}\mathcal{H}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{4}\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\mathcal{H}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\simeq 0.689 \qquad [bit/\text{記号}]$$

(5)相互情報量 $I(D;A)$ を求めよ。（5 点）

$$I(D;A)=H(D)-H(D|A)$$
$$=\mathcal{H}\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{4}\mathcal{H}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\mathcal{H}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\simeq 0.230 \quad [bit/\text{記号}]$$

（別解）

$$I(D;A)=H(D)-H(D|A)$$
$$=H(A)-H(A|D)$$
$$=H(A)+H(D)-H(A,D)$$
$$=\sum_{\alpha\in A,\beta\in D}P(\alpha,\beta)\log\frac{P(\alpha,\beta)}{P(\alpha)\bullet P(\beta)}$$

より求める。各結合確率 $P(A=\alpha,D=\beta)$ は次のように求められる。

$P(A=\alpha,D=\beta)$	$A(2,0)$	$A(1,1)$	$A(0,2)$
d_1	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$
d_2	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

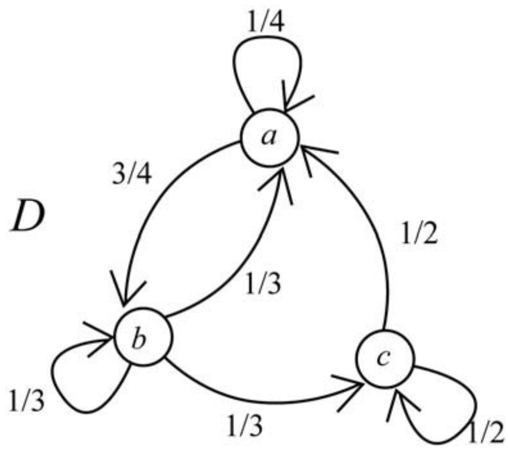
よって、次のように相互情報量が求められる。

$$
\begin{aligned}
I(D;A) &= \frac{3}{12}\log\frac{\frac{3}{12}}{\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{3}}+\frac{4}{12}\log\frac{\frac{4}{12}}{\frac{2}{4}\bullet\frac{2}{3}}+\frac{2}{12}\log\frac{\frac{2}{12}}{\frac{2}{4}\bullet\frac{1}{3}}+\frac{1}{12}\log\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{3}}+\frac{2}{12}\log\frac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{3}} \\
&= \frac{3}{12}\log\frac{3}{2}+\frac{4}{12}\log 1+\frac{2}{12}\log 1+\frac{1}{12}\log\frac{1}{2}+\frac{2}{12}\log 2 \\
&= \frac{3}{12}\log 3-\frac{2}{12} \\
&\simeq 0.230 \quad [bit/\text{記号}]
\end{aligned}
$$

より求める。

2.マルコフ情報源（20 点）

　情報源アルファベット $X=\{a,b,c\}$ 上で、次の状態遷移図 D で定められるマルコフ情報源 S について問に答えよ。



(1)マルコフ情報源 S の状態遷移確率行列 P を求めよ。（5 点）

$$P=\begin{bmatrix} P(a|a) & P(b|a) & P(c|a) \\ P(a|b) & P(b|b) & P(c|b) \\ P(a|c) & P(b|c) & P(c|c) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(2)マルコフ情報源 S の定常分布 $\mathbf{z}$ を求めて、S の随伴情報源 $\overline{S}$ を求めよ。（5 点）

$\mathbf{z}=\left(z_a,z_b,z_c\right)$ とする。

このとき、次式が成り立つ。

$$\begin{cases} z_a+z_b+z_c=1 \\ \mathbf{z}P=\mathbf{z} \end{cases}$$

よって、${}^tP\,{}^t\mathbf{z}={}^t\mathbf{z}$ より次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

係数行列を行基本変形する。

$$
\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\xrightarrow{(2)+(1)}
\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\xrightarrow{(1)+(2),(3)+(2)}
\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\frac{4}{3}\times(1),3\times(2)}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

よって、

$$
\begin{cases} z_a = \frac{4}{3} z_c \\ z_b = \frac{3}{2} z_c \end{cases}
$$

第１式に代入し、各値を求める。

$$
\frac{4}{3} z_c + \frac{3}{2} z_c + z_c = 1
$$

$$
\therefore \frac{8+9+6}{6} z_c = 1
$$

$$
\therefore z_c = \frac{6}{23}
$$

$$
z_a = \frac{4}{3} z_c = \frac{8}{23}
$$

$$
z_b = \frac{3}{2} z_c = \frac{9}{23}
$$

よって、

$$
\bar{S} = \begin{Bmatrix} a & , & b & , & c \\ \frac{8}{23} & , & \frac{9}{23} & , & \frac{6}{23} \end{Bmatrix}
$$

（験算）

$$
\boldsymbol{z}P = \begin{pmatrix} \frac{8}{23} & \frac{9}{23} & \frac{6}{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{2+3+3}{23} & \frac{2\times3+3+0}{23} & \frac{0+3+3}{23} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{8}{23} & \frac{9}{23} & \frac{6}{23} \end{pmatrix}
$$

$$
= \boldsymbol{z}
$$

(3)随伴情報源のエントロピー$H(\bar{S})$およびマルコフ情報源のエントロピー$H(S\,|\,S)$を求め

よ。（10 点、各 5 点）

$$H\left(\bar{S}\right)=-\sum_{z\in Z}z\log z$$
$$=-\frac{8}{23}\log\frac{8}{23}-\frac{9}{23}\log\frac{9}{23}-\frac{6}{23}\log\frac{6}{23}$$
$$=\log 23-\frac{8}{23}\times\log 8-\frac{9}{23}\log 9-\frac{6}{23}\log 6$$
$$=\log 23-\frac{24+6}{23}-\frac{18+6}{23}\log 3$$
$$=\log 23-\frac{24}{23}\log 3-\frac{30}{23}$$
$$\simeq 1.57\quad [bit/\text{記号}]$$

各事象 $\alpha\in X$ に対する条件付きエントロピー $H(S\mid\alpha)$ を求める。

$$H(S\mid a)=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}$$
$$=\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\simeq 0.811\quad [bit/\text{記号}]$$

$$H(S\mid b)=-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}$$
$$=\log 3$$
$$\simeq 1.58\quad [bit/\text{記号}]$$

$$H(S\mid c)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$$
$$=\mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=1.00\quad [bit/\text{記号}]$$

よって、

$$H\left(S\mid S\right)=\sum_{\alpha\in X}P(\alpha)H(S\mid\alpha)$$
$$=\frac{8}{23}H(S\mid a)+\frac{9}{23}H(S\mid b)+\frac{6}{23}H(S\mid c)$$
$$\simeq 1.16\quad [bit/\text{記号}]$$

3.シャノンファノ符号化法（情報源符号化）（30 点）

無記憶情報源 $S=\begin{Bmatrix} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ 0.3 & , & 0.25 & , & 0.25 & , & 0.15 & , & 0.05 \end{Bmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

必要なら以下の値を用いよ。

$\log_2 0.3 \simeq -1.737$ 、 $\log_2 0.25 \simeq -2.000$ 、 $\log_2 0.15 \simeq -2.737$ 、 $\log_2 0.05 \simeq -4.322$

(1)情報源 S のエントロピー $H(S)$ を求めよ。（5 点）

$H(S) = -\sum_{\alpha \in S} P(\alpha) \log P(\alpha)$

$= -0.3\log 0.3 - 0.25\log 0.25 - 0.25\log 0.25 - 0.15\log 0.15 - 0.05\log 0.05$

$\simeq 2.15 \quad [bit/\text{記号}]$

(2)シャノンファノ符号化法により情報源 S の符号 ϕ を求めよ。（10 点）

各記号に対する符号語の長さを $L=(l_a, l_b, l_c, l_d, l_e)$ とし、累積確率を $(p^+{}_a, p^+{}_b, p^+{}_c, p^+{}_d, p^+{}_e)$ とする。以下のように求められる。

$l_a = \lceil -\log 0.3 \rceil = 2,$

$l_b = \lceil -\log 0.25 \rceil = 2,$

$l_c = \lceil -\log 0.25 \rceil = 2,$

$l_d = \lceil -\log 0.15 \rceil = 3,$

$l_3 = \lceil -\log 0.05 \rceil = 5$

$p^+{}_a = 0.0$

$p^+{}_b = p^+{}_a + p_a = 0.0 + 0.3 = 0.3$

$p^+{}_c = p^+{}_b + p_b = 0.3 + 0.25 = 0.55$

$p^+{}_d = p^+{}_c + p_c = 0.55 + 0.25 = 0.80$

$p^+{}_e = p^+{}_d + p_d = 0.80 + 0.15 = 0.95$

累積確率を 2 進数化する。

$p^+{}_a = (0.0)_{10} \simeq (0.00)_2$

$p^+{}_b = (0.3)_{10} \simeq (0.01)_2$

$p^+{}_c = (0.55)_{10} \simeq (0.10)_2$

$p^+{}_d = (0.80)_{10} \simeq (0.110)_2$

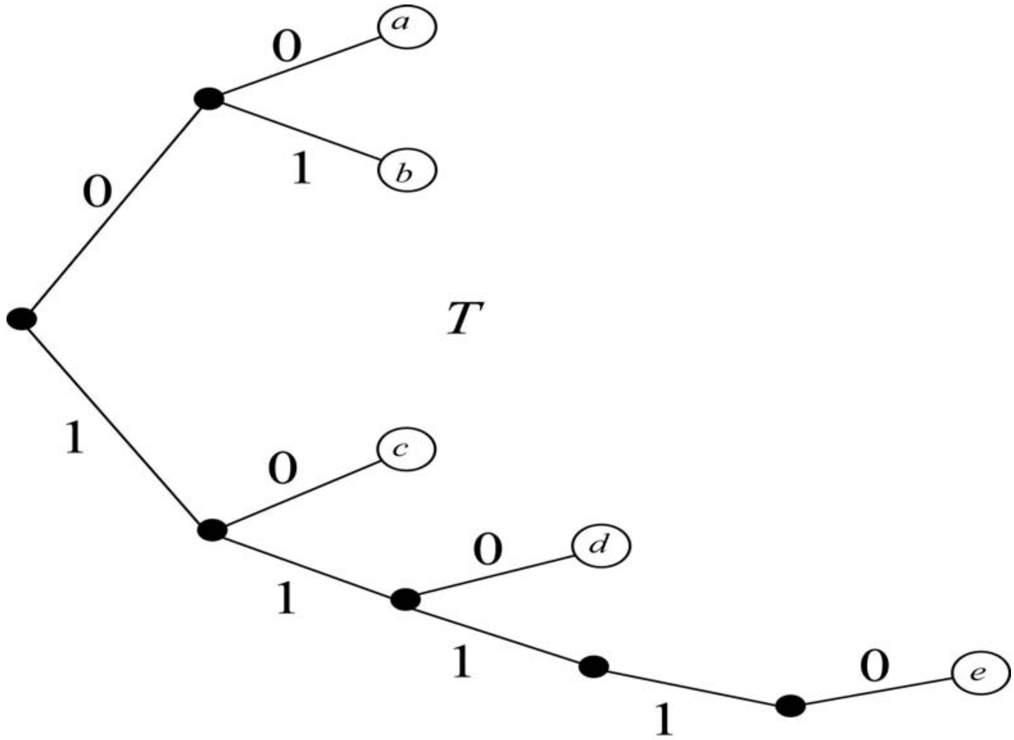
$p^+{}_e = (0.95)_{10} \simeq (0.11110)_2$

以上より、次のように符号が求められる。

$\phi = \{a \mapsto 00, b \mapsto 01, c \mapsto 10, d \mapsto 110, e \mapsto 11110\}$

(3)符号ϕの符号の木Tを示せ。（5 点）

(2)より以下のように表せる。



(4)符号ϕの平均符号語長$\overline{L}$を求めよ。（5 点）

$$
\begin{aligned}
\overline{L} &= \sum_{\alpha \in S} P(\alpha) l_\alpha \\
&= 0.3 \times 2 + 0.25 \times 2 + 0.25 \times 2 + 0.15 \times 3 + 0.05 \times 5 \\
&\simeq 2.3 \quad [\text{記号}]
\end{aligned}
$$

(5)符号ϕの効率eを求めよ。（5 点）

$$
e = \frac{H(S)}{\overline{L}} = \frac{2.15}{2.3} \simeq 0.934
$$

なお、効率eの満たすべき式$0 \le e \le 1$と、情報源符号化定理$H(S) \le \overline{L}$より分母と分子が一意に定まる。

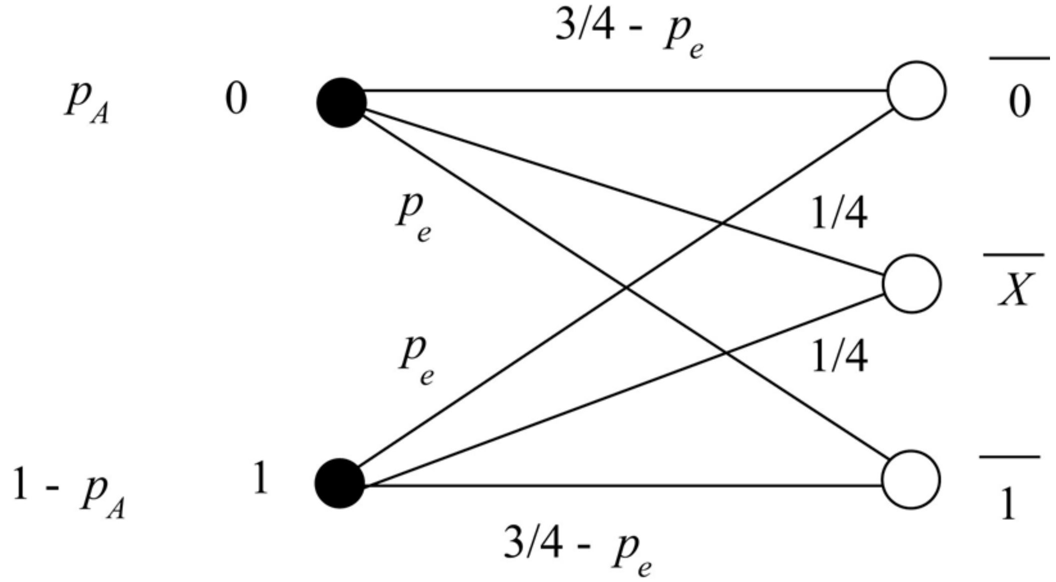
4.通信路（20 点）

送信情報源 $A=\begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ p_A & , & 1-p_A \end{Bmatrix}$ から生成される記号を、通信路行列 $T=\begin{bmatrix} \frac{3}{4}-p_e & \frac{1}{4} & p_e \\ p_e & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-p_e \end{bmatrix}$ で

定義される 2 元対称消失通信路で送信し、受信情報源 $B=\begin{Bmatrix} \bar{0} & , & \bar{X} & , & \bar{1} \\ P(\bar{0}) & , & P(\bar{X}) & , & P(\bar{1}) \end{Bmatrix}$ が得ら

れるとする。

(1) この 2 元対称消失通信路 T の通信路線図を示せ。（4 点）



(2)各受信記号の受信確率 $P(\bar{0}),P(\bar{X}),P(\bar{1})$ を 0 送信確率 p_A および誤り確率 p_e でそれぞれ

表せ。（6 点、各 2 点）

次式が成り立つ。

$$\left(P\left(\overline{0}\right), P\left(\overline{X}\right), P\left(\overline{1}\right)\right) = \left(P(0), P(1)\right)T$$

$$= \left(p_A, 1-p_A\right)\begin{bmatrix} \frac{3}{4}-p_e & \frac{1}{4} & p_e \\ p_e & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-p_e \end{bmatrix}$$

$$\therefore P\left(\overline{0}\right) = p_A\left(\frac{3}{4}-p_e\right)+\left(1-p_A\right)p_e = \frac{3}{4}p_A + p_e - 2p_A p_e,$$

$$P\left(\overline{X}\right) = p_A\frac{1}{4}+\left(1-p_A\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P\left(\overline{1}\right) = p_A p_e + \left(1-p_A\right)\left(\frac{3}{4}-p_e\right) = \frac{3}{4}+2p_A p_e - p_e - \frac{3}{4}p_A$$

(3) $p_A = \frac{1}{2}$、 $p_e = \frac{1}{4}$ のとき、この通信路で伝送される相互情報量 $I(A;B)$ を求めよ。（5 点）

$p_A = \frac{1}{2}$ のとき、受信確率は以下のようになる。

$$\therefore P\left(\overline{0}\right) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+p_e - 2\times\frac{1}{2}p_e = \frac{3}{8},$$

$$P\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{4},$$

$$P\left(\overline{1}\right) = \frac{3}{4}+2\times\frac{1}{2}p_e - p_e - \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

よって、受信情報源 B のエントロピー $H(B)$ は次のようになる。

$$H(B) = -\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}$$

$$= \log 8 - \frac{3}{8}\log 3 - \frac{2}{8}\log 2 - \frac{3}{8}\log 3$$

$$= 3 - \frac{3}{4}\log 3 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{11}{4} - \frac{3}{4}\log 3$$

$$\simeq 1.56 \quad [bit/\text{記号}]$$

次に、各 $\alpha \in A$ に対する条件付きエントロピー $H(B\,|\,\alpha)$ を求める。

$$H(B\,|\,0) = -\left(\frac{3}{4}-p_e\right)\log\left(\frac{3}{4}-p_e\right)-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-p_e\log p_e$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$= 1.5 \quad [bit/\text{記号}]$$

$H(B|1) = -p_e \log p_e - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - p_e\right)\log\left(\frac{3}{4} - p_e\right)$

$= 1.5 \quad [bit/\text{記号}]$

よって、

$H(B|A) = p_A H(B|0) + (1 - p_A)H(B|1)$

$= 1.5 \quad [bit/\text{記号}]$

以上より、

$I(A;B) = H(B) - H(B|A)$

$\simeq 0.06 \quad [bit/\text{記号}]$

（別解）

$I(A;B) = \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha,\beta) \log \frac{P(\alpha,\beta)}{P(\alpha) \cdot P(\beta)}$ より求める。

$P(A=\alpha, B=\beta)$	$\bar{0}$	$\bar{X}$	$\bar{1}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

$I(A;B) = \frac{1}{4}\log\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}} + \frac{1}{8}\log\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} + \frac{1}{8}\log\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}} + \frac{1}{8}\log\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}} + \frac{1}{8}\log\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\log\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}}$

$= \frac{1}{4}\log\frac{4}{3} + \frac{1}{8}\log 1 + \frac{1}{8}\log\frac{2}{3} + \frac{1}{8}\log\frac{2}{3} + \frac{1}{8}\log 1 + \frac{1}{4}\log\frac{4}{3}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\log\frac{2}{3}$

$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log 3$

$\simeq 0.06 \quad [bit/\text{記号}]$

(4)　$p_e = 0$ のとき、この通信路の通信路容量 $C(T)$ を求めよ。（5 点）

$p_e = 0$ のとき、

$\therefore P(\bar{0}) = \frac{3}{4}p_A,$

$P(\bar{X}) = \frac{1}{4}$

$P(\bar{1}) = \frac{3}{4}(1 - p_A)$

となる。

よって、受信情報源のエントロピー $H(B)$ は次のように求められる。

$$H(B) = -\frac{3}{4}p_A\log\frac{3}{4}p_A - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{3}{4}(1-p_A)\log\frac{3}{4}(1-p_A)$$
$$= -\frac{3}{4}p_A\log p_A - \frac{3}{4}(1-p_A)\log(1-p_A) - \frac{3}{4}p_A\log\frac{3}{4} - \frac{3}{4}(1-p_A)\log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4}\mathcal{H}(p_A) - \frac{3}{4}\log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4}\mathcal{H}(p_A) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

また、条件付きエントロピーは次のように $H(B|A)$ 求められる。

$$H(B|0) = H(B|1) = -\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$$
$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\therefore H(B|A) = p_A\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) + (1-p_A)\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

以上より、次のように通信路容量が求められる。

$$I(A;B)$$
$$= H(B) - H(B|A)$$
$$= \left\{\frac{3}{4}\mathcal{H}(p_A) + \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)\right\} - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\mathcal{H}(p_A)$$
$$C(T) = \max_{p_A} I(A;B)$$
$$= \max_{p_A}\frac{3}{4}\mathcal{H}(p_A)$$
$$= \frac{3}{4} \quad [bit/\text{通信路記号}]$$
$$\left(\because p_A = \frac{1}{2}\text{のとき}\mathcal{H}(p_A) = 1\right)$$

（別解）

対称性より、$p_A = \frac{1}{2}$ のときに相互情報量 $I(A;B)$ は最大となる。

このとき、$P(\overline{0}) = \frac{3}{8}, P(\overline{X}) = \frac{1}{4}, P(\overline{1}) = \frac{3}{8}$ であるので、

$$H(B)=-\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}$$

また、条件付きエントロピーは次のように求められる。

$$H(B\,|\,0)=H(B\,|\,1)=-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}$$

$$=\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore H(B\,|\,A)=p_A\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)+\left(1-p_A\right)\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

よって、

$$C\left(T\right)=\max_{p_A} I(A;B)$$

$$=\max_{p_A}\left\{H(B)-H(B\,|\,A)\right\}$$

$$=\left(-\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\frac{3}{4}\log\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{4}\log 8-\frac{3}{4}\log 4$$

$$=\frac{3}{4}\times 3-\frac{3}{4}\times 2$$

$$=\frac{3}{4}\quad [bit\,/\,\text{通信路記号}]$$