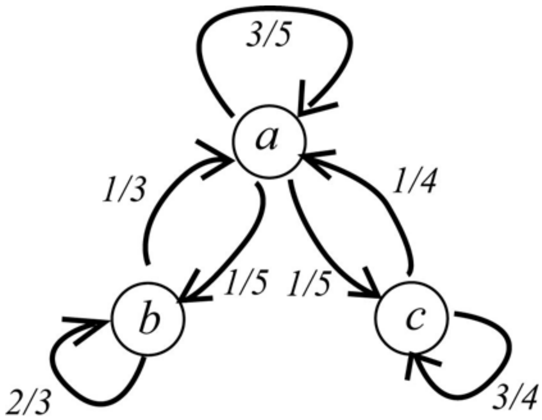
# H19 年度　情報理論定期試験解答例

1.マルコフ情報源（30 点）

　次の状態遷移確率行列 $P$ で表わされる情報源アルファベット $X=\{a,b,c\}$ 上のマルコフ情報源 $S_P$ について問いに答えよ。

$$P=\begin{bmatrix}3/5 & 1/5 & 1/5\\ 1/3 & 2/3 & 0\\ 1/4 & 0 & 3/4\end{bmatrix}$$

(1)マルコフ情報源 $S_P$ の状態遷移図を描け。（５点）




矢印の向きに注意する。矢印に付帯している数値は状態遷移行列の成分であり、条件付き確率を意味する。

(2)マルコフ情報源 $S_P$ の定常分布を求め、$S_P$ の随伴情報源 $\overline{S_P}$ を求めよ。（１０点）

定常分布の確率変数を $\mathbf{z}=(z_a,z_b,z_c)$ とおく。このとき、次式が成り立つ。

$$\begin{cases}\mathbf{z}=\mathbf{z}\boldsymbol{P} & ①\\ z_a,+z_b+z_c=1 & ②\end{cases}$$

①　より、

$$\mathbf{z}=\mathbf{z}\boldsymbol{P}$$

$$\therefore {}^t\mathbf{z}={}^t\boldsymbol{P}\,{}^t\mathbf{z}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}z_a\\ z_b\\ z_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/5 & 1/3 & 1/4\\ 1/5 & 2/3 & 0\\ 1/5 & 0 & 3/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_a\\ z_b\\ z_c\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}-2/5 & 1/3 & 1/4\\ 1/5 & -1/3 & 0\\ 1/5 & 0 & -1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_a\\ z_b\\ z_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

転置行列にすることに注意する。

係数行列を行基本変形する。

$$\begin{bmatrix} -2/5 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & -1/3 & 0 \\ 1/5 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{bmatrix} -1/5 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/3 & 0 \\ 1/5 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)+(1)} \begin{bmatrix} -1/5 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)+(1)} \begin{bmatrix} -1/5 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、

$$\begin{cases} z_a = \dfrac{5}{4} z_c \\ z_b = \dfrac{3}{4} z_c \end{cases}$$

これを②に代入する。

$$\frac{5}{4} z_c + \frac{3}{4} z_c + z_c = 1$$

$$\therefore \frac{12}{4} z_c = 1$$

$$\therefore z_c = \frac{1}{3}$$

よって、定常分布は $\mathbf{z} = (z_a, z_b, z_c) = \left( \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12} \right)$ となる。

（験算）①

$$\text{右辺} = \left( \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12} \right) \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}(5,3,4) \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}(3+1+1, 1+2, 1+3)$$

$$= \left( \frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12} \right)$$

$$= \text{左辺}$$

② $\dfrac{5}{12} + \dfrac{3}{12} + \dfrac{4}{12} = 1$

以上より、随伴情報源は次のように求められる。

$$\overline{S_P} = \begin{Bmatrix} a & , & b & , & c \\ 5/12 & , & 3/12 & , & 4/12 \end{Bmatrix}$$

(3)随伴情報源$\overline{S_P}$のエントロピー$H\left(\overline{S_P}\right)$を求めよ。(5 点)

$$H\left(\overline{S_P}\right)=-\sum_{\alpha\in X}P(\alpha)\log P(\alpha)$$
$$=\frac{5}{12}\log\frac{12}{5}+\frac{3}{12}\log\frac{12}{3}+\frac{4}{12}\log\frac{12}{4}$$
$$=\log 12-\frac{5}{12}\log 5-\frac{1}{4}\log 3-\frac{1}{3}\log 4$$
$$\simeq 3.585-0.9675-0.3962-0.667$$
$$\simeq 1.55 \quad [bit/\text{記号}]$$

(4)マルコフ情報源$S_P$のエントロピー$H\left(S_P \mid S_p\right)$を求めよ。(10 点)

マルコフ情報源のエントロピーは条件付きエントロピーの平均として、次式で表わされる。

$$H\left(S_P \mid S_p\right)=\sum_{\alpha\in X}P\left(\alpha\right)H(S_P \mid \alpha)$$

よって、各記号$\alpha\in X$に対して、条件付きエントロピー$H(S_P \mid \alpha)=-\sum_{\beta\in X}P(\beta \mid \alpha)\log P(\beta \mid \alpha)$を

求める。

$$H(S_P \mid a)=\frac{3}{5}\log\frac{5}{3}+\frac{1}{5}\log 5+\frac{1}{5}\log 5$$
$$=\log 5-\frac{3}{5}\log 3$$
$$\simeq 2.322-0.951$$
$$\simeq 1.371$$

$$H(S_P \mid b)=\frac{1}{3}\log 3+\frac{2}{3}\log\frac{3}{2}$$
$$=\log 3-\frac{2}{3}$$
$$\simeq 1.585-0.6667$$
$$\simeq 0.918$$

$$H(S_P \mid c)=\frac{1}{4}\log 4+\frac{3}{4}\log\frac{4}{3}$$
$$=\log 4-\frac{3}{4}\log 3$$
$$\simeq 2-1.189$$
$$\simeq 0.811$$

よって、

$$H\left(S_P \mid S_p\right)=\sum_{\alpha\in X}P\left(\alpha\right)H(S_P \mid \alpha)$$
$$=P(a)H(S_P \mid a)+P(b)H(S_P \mid b)+P(c)H(S_P \mid c)$$
$$\simeq\frac{5}{12}\bullet\left(1.371\right)+\frac{1}{4}\bullet\left(0.918\right)+\frac{1}{3}\bullet\left(0.811\right)$$
$$\simeq 1.071 \quad [bit/\text{記号}]$$

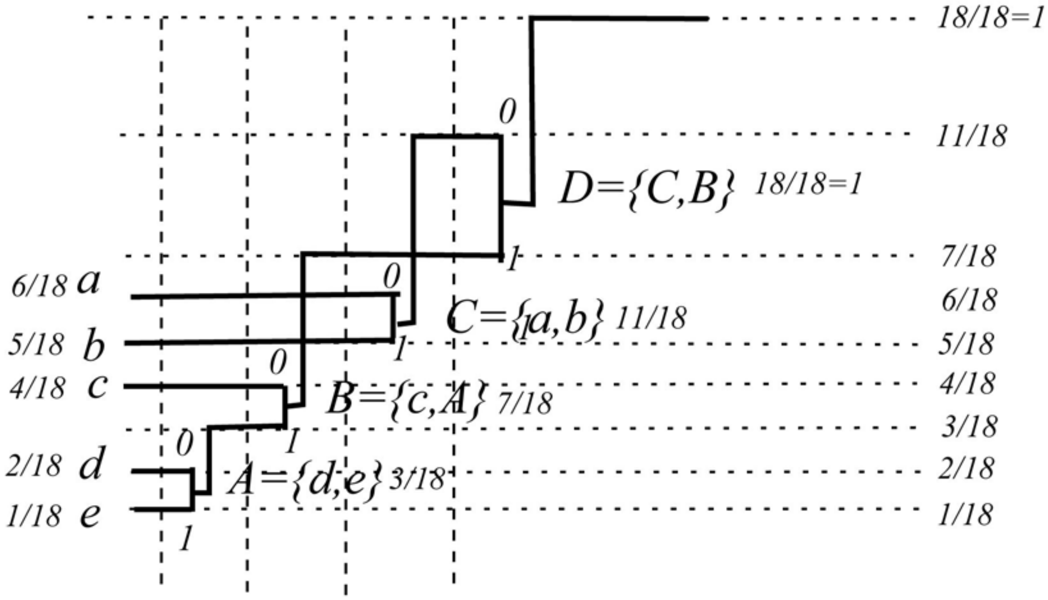
2.情報源符号化(25 点)

無記憶情報源$S=\begin{Bmatrix} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ \frac{6}{18} & , & \frac{5}{18} & , & \frac{4}{18} & , & \frac{2}{18} & , & \frac{1}{18}\end{Bmatrix}$に対して、以下の問いに答えよ。

(1)情報源$S$のエントロピー$H(S)$を求めよ。（5 点）

$$H(S)=\frac{6}{18}\log\frac{18}{6}+\frac{5}{18}\log\frac{18}{5}+\frac{4}{18}\log\frac{18}{4}+\frac{2}{18}\log\frac{18}{2}+\frac{1}{18}\log 18$$
$$=\log 18-\frac{1}{3}\log 6-\frac{5}{18}\log 5-\frac{2}{9}\log 4-\frac{1}{9}\log 2$$
$$=\log 2+2\log 3-\left(\frac{1}{3}\log 3+\frac{1}{3}\right)-\frac{5}{18}\log 5-\frac{5}{9}$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{5}{3}\log 3-\frac{5}{18}\log 5$$
$$\simeq 0.111+2.642-0.645$$
$$\simeq 2.11 \quad [bit/\text{記号}]$$

(2)ハフマン符号化法により情報源$S$の符号を求めよ。（10 点）




縮退情報源にするときの確率の順位に注意する。図では、上の分岐を０、下の分岐を１として割り当てている。よって、図より次のような符号が得られる。

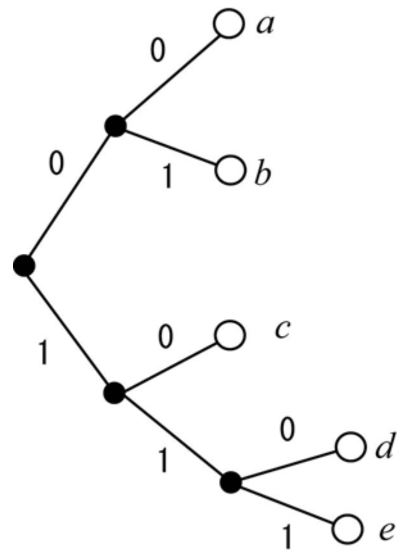
$\phi_S = \{a \mapsto 00, b \mapsto 01, c \mapsto 10, d \mapsto 110, e \mapsto 111\}$

もちろん、１と０が逆の符号でもよい。

$\phi_S{}' = \{a \mapsto 11, b \mapsto 10, c \mapsto 01, d \mapsto 001, e \mapsto 000\}$

(3)(2)で得られた符号の符号の木を示せ。（3 点）

(2)より、次のような符号の木が得られる。




(4)(2)で得られた符号の平均符号語長 $\overline{L}$ を求めよ。（3 点）

各符号長は $L = \{l(a), l(b), l(c), l(d), l(e)\} = \{2, 2, 2, 3, 3\}$ であるので、次式で計算できる。

$$\overline{L} = \sum_{\alpha \in S} P(\alpha) l(\alpha)$$

$$= \frac{6}{18} \times 2 + \frac{5}{18} \times 2 + \frac{4}{18} \times 2 + \frac{2}{18} \times 3 + \frac{1}{18} \times 3$$

$$= \frac{12 + 10 + 8 + 6 + 3}{18}$$

$$= \frac{39}{18}$$

$$\simeq 2.17 \quad [bit/\text{記号}]$$

(5)(2)で得られた符号の効率 $e$ を求めよ。（4 点）

平均符号語長と、エントロピーの比で効率 $e$ は計算される。（$0 \le e \le 1$ と $H(S) \le \overline{L}$ より、分母、分子が自動的に決定される。）

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{H(S)}{\overline{L}} \\
&= \frac{\frac{1}{9} + \frac{5}{3}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5}{\frac{13}{6}} \\
&= \frac{2 + 30\log 3 - 5\log 5}{39} \\
&\simeq 0.051 + 1.22 - 0.30 \\
&\simeq 0.971
\end{aligned}
$$

（(1),(4)の結果より、 $e = \frac{2.11}{2.17} \simeq 0.972$ としても良い）

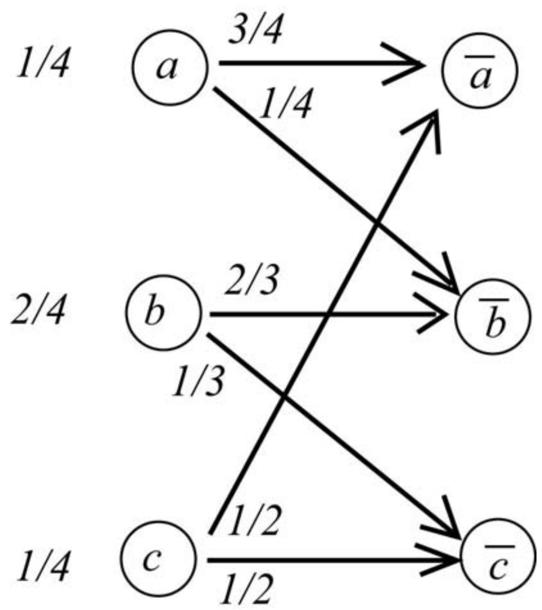
3.通信路(25 点）

送信情報源 $A = \begin{Bmatrix} a & , & b & , & c \\ 1/4 & , & 2/4 & , & 1/4 \end{Bmatrix}$ から生成される記号を、次の通信路行列 $T$ で定義される通信路で送信し、受信情報源 $B = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ が得られるとする。

$$
T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}
$$

(1)この通信路 $T$ の通信路線図を示せ。(4 点）

矢印の向きに注意する。矢印に付帯している数値は通信路行列の成分に対応し、条件付き確率を表す。また、送信情報源の記号に付帯している数値は、送信情報源の生成確率を意味する。



⑵各受信記号の受信確率 $P(\bar{a}), P(\bar{b}), P(\bar{c})$ を求めよ。（6 点、各２点）

次のように計算できる。

$$\left(P(\bar{a}), P(\bar{b}), P(\bar{c})\right) = \left(P(a), P(b), P(c)\right)\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= (1/4, 1/2, 1/4)\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= (3/16 + 1/8 \quad , \quad 1/16 + 1/3 \quad , \quad 1/6 + 1/8)$$

$$= (5/16 \quad , \quad 19/48 \quad , \quad 7/24)$$

（別解）

通信路線図より、全ての経路を考えて、確率の和をとる。

$$P(\bar{a}) = P(a)P(\bar{a} \mid a) + P(b)P(\bar{a} \mid b) + P(c)P(\bar{a} \mid c)$$

$$= 1/4 \times 3/4 + 1/2 \times 0 + 1/4 \times 1/2$$

$$= 5/16$$

$$P(\bar{b}) = P(a)P(\bar{b} \mid a) + P(b)P(\bar{b} \mid b) + P(c)P(\bar{b} \mid c)$$

$$= 1/4 \times 1/4 + 1/2 \times 2/3 + 1/4 \times 0$$

$$= 19/48$$

$$P(\bar{c}) = P(a)P(\bar{c} \mid a) + P(b)P(\bar{c} \mid b) + P(c)P(\bar{c} \mid c)$$

$$= 1/4 \times 0 + 1/2 \times 1/3 + 1/4 \times 1/2$$

$$= 7/24$$

⑶情報源 $A$ のエントロピー $H(A)$ および、情報 $B$ のエントロピー源 $H(B)$ を求めよ。(10 点, 各５点）

$$H(A) = \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1.5 \quad [bit/\text{記号}]$$

$$H(B) = \frac{5}{16}\log\frac{16}{5} + \frac{19}{48}\log\frac{48}{19} + \frac{7}{24}\log\frac{24}{7}$$

$$= \frac{15}{48}\log\frac{48}{15} + \frac{19}{48}\log\frac{48}{19} + \frac{14}{48}\log\frac{48}{14}$$

$$= \log 48 - \frac{15}{48}\log 15 - \frac{19}{48}\log 19 - \frac{14}{48}\log 14$$

$$\simeq 5.585 - 1.221 - 1.681 - 1.110$$

$$\simeq 1.57 \quad [bit/\text{記号}]$$

(4)この通信路で伝送される相互情報量 $I(A;B)$ を求めよ。(5点)

$I(A;B)=H(A)-H(A|B)=H(B)-H(B|A)=H(A)+H(B)-H(A,B)$ の関係式のいずれかから求める。

（解１）

$I(A;B)=H(B)-H(B|A)$ より求める。条件付きエントロピー $H(B|A)$ を通信路行列の各成分の $P(\beta|\alpha)$ を利用して求める。

$$H(B|a)=\frac{3}{4}\log\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\log 4$$
$$=2-\frac{3}{4}\log 3$$
$$\simeq 2-1.189$$
$$\simeq 0.811$$

$$H(B|b)=\frac{2}{3}\log\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\log 3$$
$$=\log 3-\frac{2}{3}$$
$$\simeq 1.585-0.6667$$
$$\simeq 0.918$$

$$H(B|c)=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 2$$
$$=1$$

これより、条件付きエントロピーが求められる。

$$H(B|A)=P(a)H(B|a)+P(b)H(B|b)+P(c)H(B|c)$$
$$\simeq\frac{1}{4}\bullet 0.811+\frac{1}{2}\bullet 0.918+\frac{1}{4}\bullet 1$$
$$\simeq 0.912$$

よって、相互情報量は次のように求められる。

$$I(A;B)=H(B)-H(B|A)$$
$$\simeq 1.57-0.918$$
$$\simeq 0.652 \quad [bit/\text{記号}]$$

（解２）

$I(A;B)=H(A)+H(B)-H(A,B)$ より求める。

まず、各 $\alpha\in A,\beta\in B$ に対して、結合確率（同時確率ともいう） $P(\alpha,\beta)$ を求める。$P(\alpha,\beta)=P(\beta|\alpha)P(\alpha)$ の関係と、通信路行列の各成分が $P(\beta|\alpha)$ であることに注意する。

$$P(\bar{a},a)=\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{4}=\frac{3}{16},P(\bar{b},a)=\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}=\frac{1}{16},P(\bar{c},a)=0\bullet\frac{1}{4}=0,$$
$$P(\bar{a},b)=0\bullet\frac{1}{2}=0,P(\bar{b},b)=\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(\bar{c},b)=\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$
$$P(\bar{a},c)=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{4}=\frac{1}{8},P(\bar{b},c)=0\bullet\frac{1}{4}=0,P(\bar{c},c)=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$H(A,B) = -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha,\beta)$$
$$= \frac{3}{16}\log\frac{16}{3} + \frac{1}{16}\log 16 + \frac{1}{3}\log 3 + \frac{1}{6}\log 6 + \frac{1}{8}\log 8 + \frac{1}{8}\log 8$$
$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{16}\log 3\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\log 3 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log 3\right) + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{18+6+4+9+9}{24} + \frac{-9+16+8}{48}\log 3$$
$$= \frac{23}{12} + \frac{15}{48}\log 3$$
$$\simeq 1.917 + 0.4953$$
$$\simeq 2.412 \quad [bit/\text{記号}]$$

$$\therefore I(A;B) = H(A) + H(B) - H(A,B)$$
$$\simeq 1.5 + 1.57 - 2.412$$
$$\simeq 0.658 \quad [bit/\text{記号}]$$

4.通信路符号化(20 点)

$(9,4)$ 垂直水平パリティ符号を以下のように表す。

$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$

ここで、 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ は情報ビットであり、 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ は検査ビットである。また、検査ビットは次式で定義される。

$p_1 = x_1 \oplus x_2$, $p_2 = x_3 \oplus x_4$, $p_3 = x_1 \oplus x_3$, $p_4 = x_2 \oplus x_4$, $p_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$

この $(9,4)$ 垂直水平パリティ符号に関して以下の問いに答えよ。

(1)次の系列を情報ビット $\boldsymbol{x}_i$ とする $(9,4)$ 垂直水平パリティ符号 $\boldsymbol{w}_i$ を求めよ。(８点、各２点)

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & p_1 \\ x_3 & x_4 & p_2 \\ \hline p_3 & p_4 & p_5 \end{array}$$

のように情報ビットを行列状に配置して、冗長ビットを作成する。

① $\boldsymbol{x}_1 = 1100$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$$

上図より、 $\boldsymbol{p}_1 = 00110$

$\boldsymbol{w}_1 = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1) = 1100\ 00110$

② $\boldsymbol{x}_2 = 0101$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

上図より、 $\boldsymbol{p}_2 = 11000$

$\boldsymbol{w}_2 = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_2) = 010111000$

③ $\boldsymbol{x}_3 = 1101$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

上図より、 $\boldsymbol{p}_3 = 01101$

$\boldsymbol{w}_3 = (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{p}_3) = 1101\,01101$

④ $\boldsymbol{x}_4 = 1011$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}$$

上図より、 $\boldsymbol{p}_4 = 10011$

$\boldsymbol{w}_4 = (\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{p}_4) = 101110011$

(2) $(9,4)$ 垂直水平パリティ符号の情報速度 $R$ を示せ。（４点）

情報速度とは、送信する符号の１記号あたりの情報量のことである。

$$R = \frac{\text{情報ビット}}{\text{符号長}}$$
$$= \frac{\text{情報ビット}}{\text{情報ビット＋冗長ビット}}$$
$$= \frac{4}{9}$$
$$\simeq 0.44 \quad [bit/\text{記号}]$$

垂直水平パリティ符号の情報部分、冗長部分を特定すれば良い。

(3) $(9,4)$ 垂直水平パリティ符号の各受信語 $\boldsymbol{y}_i$ には高々１ビットしか誤りが無いとする。

このとき、各受信語 $\boldsymbol{y}_i$ の誤りを訂正して送信語 $\boldsymbol{w}_i$ を求めよ。（8 点、各２点）

縦横に配置して誤り位置を特定する。 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9)$ のとき、

$$\begin{array}{cc|c} y_1 & y_2 & y_5 \\ y_3 & y_4 & y_6 \\ \hline y_7 & y_8 & y_9 \end{array}$$

とし、検査ビット（冗長ビット）のパリティを検査する。以下では、不正なパリティを持った検査ビットを角括弧[]で示し、誤りビット位置を枠で囲って示す。

① $\boldsymbol{y}_1 = 1111\,01101$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & [1] \\ \hline [1] & 0 & 1 \end{array}$$

よって、誤りベクトルは $e_1 = 0010\,00000$ であり、正しい送信符号は $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{y}_1 \oplus \boldsymbol{e}_1 = 1101\,01101$。

② $\boldsymbol{y}_2 = 010111000$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

よって、誤りはなく、誤りベクトルは $e_2 = 0000\,00000$ である。

正しい送信符号は $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{y}_2 \oplus \boldsymbol{e}_2 = 010111000$。

③ $\boldsymbol{y}_3 = 100111100$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & \boxed{[0]} & [0] \end{array}$$

よって、誤りベクトルは $e_3 = 0000\,00010$ である。

正しい送信符号は $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{y}_3 \oplus \boldsymbol{e}_3 = 101011110$。

④ $\boldsymbol{y}_4 = 1110\,01010$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \boxed{[0]} \end{array}$$

よって、誤りベクトルは $e_4 = 0000\,00001$ である。

正しい送信符号は $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{y}_4 \oplus \boldsymbol{e}_4 = 1110\,01011$。