

(4) 条件付エントロピー $H(G|A)$ 、 $H(B|A)$ を求めよ。

まず、 $H(B|A)$ より求める。

事象 A と事象 B は独立なので、 $H(B|A) = H(B)$ である。よって、 $H(B)$ を求める。

$$H(B) = \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \log 4 = \frac{3}{2} = 1.5 \quad [\text{bit}]$$

$$\therefore H(B|A) = 1.5 \quad [\text{bit}]$$

次に、 $H(G|A)$ を求める。

$$H(G|A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(G|\alpha) \text{ より求める。}$$

$$H(G|A=1) = \frac{1}{4} \log 4 + 0 + \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} \approx 0.811$$

$$H(G|A=2) = \frac{1}{4} \log 4 + 0 + \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} \approx 0.811$$

$$H(G|A=3) = \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \log 4 = 1.5$$

$$H(G|A=4) = \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} + 0 + \frac{1}{4} \log 4 \approx 0.811$$

$$H(G|A=5) = \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} + 0 + \frac{1}{4} \log 4 \approx 0.811$$

$$H(G|A=6) = \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \log 4 + 0 \approx 0.811$$

$$\therefore H(G|A) = 5 \times \frac{1}{6} \cdot 0.811 + \frac{1}{6} \cdot 1.5 \approx 0.926 \quad [\text{bit}]$$

(5) 相互情報量 $I(G;A)$ 、 $I(B;A)$ を求めよ。

まず、 $I(B;A)$ より求める。

事象 A と事象 B は独立なので、 $I(B;A) = 0$ である。

次に、 $I(G;A)$ を $I(G;A) = H(G) - H(G|A)$ の関係式より求める。

$$H(G) = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{8} \log 8 + \frac{3}{8} \log \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{9}{8} - \frac{3}{8} \log 3$$

$$\approx 2 - 0.594$$

$$\approx 1.41 \quad [\text{bit}]$$

$$\begin{aligned}
\therefore I(G; A) &= H(G) - H(G|A) \\
&= 1.41 - 0.926 \\
&= 0.484 \text{ [bit]}
\end{aligned}$$

2.情報源符号化（30点）

無記憶情報源 $S = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ \frac{8}{24} & , & \frac{6}{24} & , & \frac{5}{24} & , & \frac{3}{24} & , & \frac{2}{24} \end{matrix} \right\}$ に対して、以下の問いに答えよ。

（１） ハフマン符号化法により符号を求めよ。（10点）

情報源中の確率の最小の2つの記号を縮退し、縮退情報源を作成する。

この操作を記号が1つになるまで繰り返すことでハフマン符号が得られる。縮退情報源が生成される過程を式および図で示す。

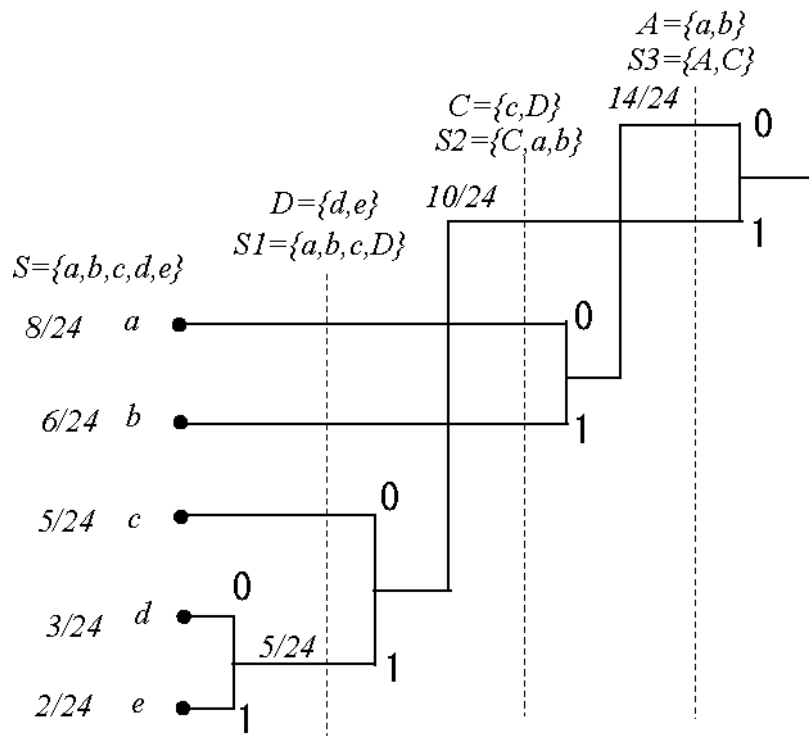
$$S = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ \frac{8}{24} & , & \frac{6}{24} & , & \frac{5}{24} & , & \frac{3}{24} & , & \frac{2}{24} \end{matrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{D=\{d,e\}} S1 = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c & , & D \\ 8/24 & , & 6/24 & , & 5/24 & , & 5/24 \end{matrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{C=\{c,D\}} S2 = \left\{ \begin{matrix} C & , & a & , & b \\ 10/24 & , & 8/24 & , & 6/24 \end{matrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{A=\{a,b\}} S3 = \left\{ \begin{matrix} A & , & C \\ 14/24 & , & 10/24 \end{matrix} \right\}$$

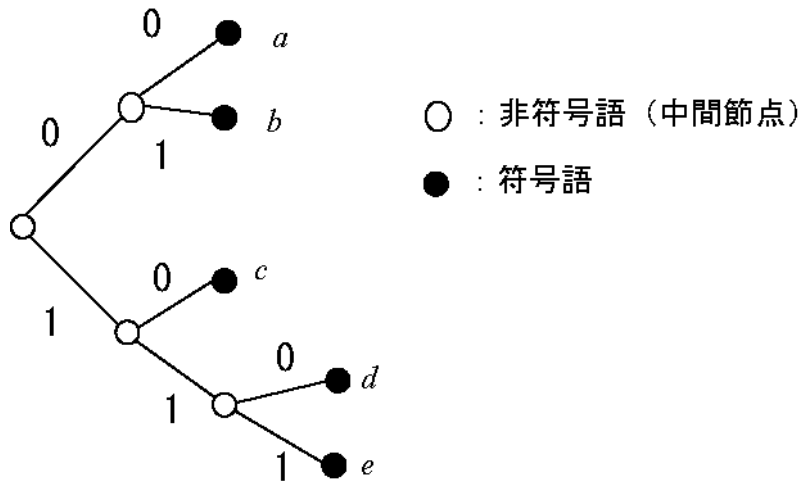
$$\xrightarrow{A1=\{A,C\}} S4 = \left\{ \begin{matrix} A1 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$



したがって、次のように符号が求められる。

$a \rightarrow 00, b \rightarrow 01, c \rightarrow 10, d \rightarrow 110, e \rightarrow 111$

(2) (1) で得られた符号の符号の木を示せ。(5 点)



(3) (1) で得られた符号の平均符号語長 $\bar{L}$ を求めよ。(7 点)

$$\begin{aligned}
\bar{L} &= \sum_{\alpha \in S} P(\alpha) l(\alpha) \\
&= \frac{8}{24} \times 2 + \frac{6}{24} \times 2 + \frac{5}{24} \times 2 + \frac{3}{24} \times 3 + \frac{2}{24} \times 3 \\
&= \frac{16+12+10+9+6}{24} \\
&= \frac{53}{24} \\
&\approx 2.21
\end{aligned}$$

(4) (1) で得られた符号の効率 e を求めよ。(8 点)

$e = \frac{H(S)}{\bar{L}}$ なので、情報源のエントロピー $H(S)$ を求める。

$$\begin{aligned}
H(S) &= \frac{8}{24} \log \frac{24}{8} + \frac{6}{24} \log \frac{24}{6} + \frac{5}{24} \log \frac{24}{5} + \frac{3}{24} \log \frac{24}{3} + \frac{2}{24} \log \frac{24}{2} \\
&= \log 24 - \frac{8}{24} \log 8 - \frac{6}{24} \log 6 - \frac{5}{24} \log 5 - \frac{3}{24} \log 3 - \frac{2}{24} \log 2 \\
&= \log 24 - \frac{24+6+2}{24} - \frac{6+3}{24} \log 3 - \frac{5}{24} \log 5 \\
&\approx 4.585 - 1.333 - 0.594 - 0.484 \\
&= 2.17
\end{aligned}$$

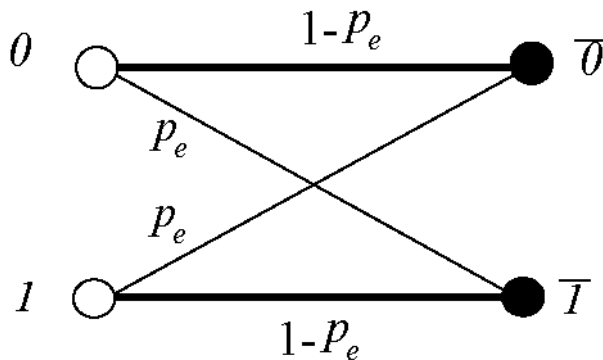
$$\therefore e = \frac{2.17}{2.21} \approx 0.982$$

3. 通信路 (20 点)

送信アルファベットを $A = \{0, 1\}$ とし、受信アルファベットを $B = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ とする。このとき、通

信路行列 $T = \begin{bmatrix} 1-p_e & p_e \\ p_e & 1-p_e \end{bmatrix}$ 、 $0 \leq p_e \leq 1$ で表される 2 元通信路について問いに答えよ。

(1) この通信路 T の通信路線図を示せ。(5 点)



(2) この通信路の通信路容量 $C(T)$ を p_e の式で表せ。また、通信路容量 $C(T)$ を縦軸に、 p_e を横軸にしたグラフの概形を示せ。(10点)

$$C(T) = \max_A \{I(B; A)\} = \max_A \{H(B) - H(B|A)\}$$

情報源 A において、記号 0 の生成確率を $P_A(0) = p$ とおく。このとき、各確率は次のように求められる。

$$P_A(1) = 1 - p$$

$$P_B(\bar{0}) = p(1 - p_e) + (1 - p)p_e = p + p_e - 2pp_e$$

$$P_A(\bar{1}) = pp_e + (1 - p)(1 - p_e) = 1 + 2pp_e - p - p_e$$

よって、

$p_B = p + p_e - 2pp_e$ とおくと、各情報量が以下のように求められる。

$$H(B) = \mathcal{H}(p_B) = \mathcal{H}(p + p_e - 2pp_e)$$

$$H(B|A=0) = \mathcal{H}(p_e)$$

$$H(B|A=1) = \mathcal{H}(p_e)$$

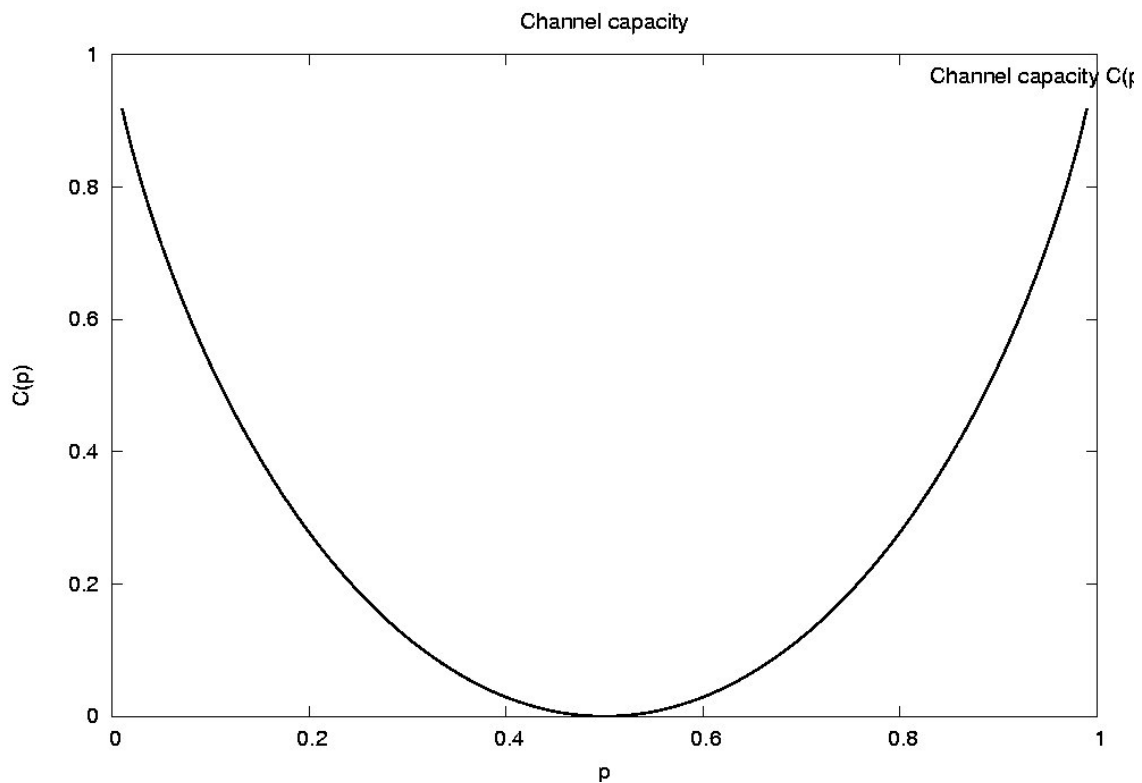
$$\therefore H(B|A) = pH(B|A=0) + (1-p)H(B|A=1) = \mathcal{H}(p_e)$$

以上より、通信路容量は次のように求められる。

$$C(T) = \max_A \{H(B) - H(B|A)\}$$

$$= \max_p \{\mathcal{H}(p_B) - \mathcal{H}(p_e)\}$$

$$= 1 - \mathcal{H}(p_e)$$



(3) この通信路で情報を伝送するときに、通信路容量を達成できるように、情報源 A の各記号 0,1 の生成確率 $P(0), P(1)$ を求めよ。(5 点)

$\mathcal{H}(p_B)=1$ となるためには、 $p_B=1-p_B=\frac{1}{2}$ でなければならない。

$$p + p_e - 2pp_e = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1 - 2p - 2p_e + 4pp_e = 0$$

$$\therefore (1 - 2p) - 2p_e(1 - 2p) = 0$$

$$\therefore (1 - 2p)(1 - 2p_e) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{2}$$

以上より、

$$P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$$

4. 信路符号化 (20 点)

(7,4) ハミング符号を以下のように表す。

$$\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3)$$

ここで、 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は情報ビットであり、 $\mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)$ は検査ビットである。また、検査ビットは次式で定義される。

$$p_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \quad p_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4, \quad p_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$$

この(7,4)ハミング符号に関して以下の問いに答えよ。

(1) 次の系列を情報ビット $\mathbf{x}_i$ とする(7,4)ハミング符号 $\mathbf{w}_i$ を求めよ。(8点、各2点)

① $\mathbf{x}_1 = 1001$

$$\mathbf{w}_1 = 1001110$$

② $\mathbf{x}_2 = 0010$

$$\mathbf{w}_2 = 0010110$$

③ $\mathbf{x}_3 = 0111$

$$\mathbf{w}_3 = 0111010$$

④ $\mathbf{x}_4 = 1110$

$$\mathbf{w}_4 = 1110100$$

(2) (7,4)ハミング符号の受信語 $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ を用いて、シンδροーム $\mathbf{s}=(s_1, s_2, s_3)$ の式を示せ。(4点)

$$s_1 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_5$$

$$s_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 \oplus y_6$$

$$s_3 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_4 \oplus y_7$$

(3)各受信語 $\mathbf{y}_i$ は高々1ビットしか誤りが無いとする。このとき、各受信語の誤りを訂正して送信語 $\mathbf{w}_i$ を求めよ。(8点、各2点)

誤りベクトルとシンδροームの対応表を示す。

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	s_1	s_2	s_3
1	0					0	1	0	1
0	1	0					1	1	1
	0	1	0				1	1	0
		0	1	0			0	1	1
			0	1	0		1	0	0
				0	1	0	0	1	0
					0	1	0	0	1
0						0	0	0	0

各受信語のシンδροームを求め、誤りベクトルを特定することによって、誤りを訂正する。

① $\mathbf{y}_1 = 0111001$

$$s_1^1 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_2^1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_3^1 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

よって、 $e = 0001000$

$$w_1 = 0110001$$

$$\textcircled{2} \mathbf{y}_2 = 1111000$$

$$s_1^2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_2^2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_3^2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

よって、 $e = 0100000$

$$w_2 = 1011000$$

$$\textcircled{3} \mathbf{y}_3 = 1101101$$

$$s_1^3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$s_2^3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_3^3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

よって、 $e = 0000100$

$$w_3 = 1101001$$

$$\textcircled{4} \mathbf{y}_4 = 1100010$$

$$s_1^4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$s_2^4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$s_3^4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

よって、 $e = 0000000$

$$w_4 = 1100010$$