H18 年度　情報理論定期試験解答例

１．事象系と各種情報量(30 点)

次のようなゲームを考える。

「プレイヤーＡとプレイヤーＢがそれぞれコインを２枚づつ投げて表のでた枚数が多い方が勝ち。」

このゲームにおいて、事象系を以下のように定める。

事象系 A ：プレイヤーＡが表を出した枚数に関する事象系。$\{0,1,2\}$ を要素に持つ。

事象系 B ：プレイヤーＢが表を出した枚数に関する事象系。$\{0,1,2\}$ を要素に持つ。

事象系 G ：ゲームの勝敗に関する事象系。プレイヤーＡが勝つ、引き分け、負けることをそれぞれ○、△、×と表すものとし、事象系 G は{○,△,×}を要素として持つとする。

（１）　事象系 A に対して各事象の生起確率を求め、情報源 A を定めよ。事象系 B 、G に対しても同様に情報源 B 、G を定めよ。（９点、各３点）

２枚のコインをコイン X、コイン Y とする。

このとき、２枚のコインにおける積事象の確率は以下のように求められる。

$P(X=\text{表}, Y=\text{表}) = 1/2 \times 1/2 = 1/4,$

$P(X=\text{表}, Y=\text{裏}) = 1/2 \times 1/2 = 1/4,$

$P(X=\text{裏}, Y=\text{表}) = 1/2 \times 1/2 = 1/4,$

$P(X=\text{裏}, Y=\text{裏}) = 1/2 \times 1/2 = 1/4.$

これらの事象が互いに排反事象なので、事象系 A における各事象の確率は以下のように求められる。

$P_A(0) = P(X=\text{裏}, Y=\text{裏}) = 1/4,$

$P_A(1) = P(X=\text{表}, Y=\text{裏}) + P(X=\text{裏}, Y=\text{表}) = 1/4 + 1/4 = 1/2,$

$P_A(2) = P(X=\text{表}, Y=\text{表}) = 1/4.$

従って、情報源 A は次のように求められる。

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & , & 1 & , & 2 \\ 1/4 & , & 1/2 & , & 1/4 \end{Bmatrix}$$

同様に、情報源 B も次のように求められる。

$$B = \begin{Bmatrix} 0 & , & 1 & , & 2 \\ 1/4 & , & 1/2 & , & 1/4 \end{Bmatrix}$$

次に、ゲーム G に関する勝敗表と各確率を求める。

	$A=0$ $P(A=0)=1/4$	$A=1$ $P(A=1)=1/2$	$A=2$ $P(A=2)=1/4$
$B=0$ $P(B=0)=1/4$	△ $P(A=0,B=0)=1/16$	○ $P(A=1,B=0)=1/8$	○ $P(A=2,B=0)=1/16$
$B=1$ $P(B=1)=1/2$	× $P(A=0,B=1)=1/8$	△ $P(A=1,B=1)=1/4$	○ $P(A=2,B=1)=1/8$
$B=2$ $P(B=2)=1/4$	× $P(A=0,B=2)=1/16$	× $P(A=1,B=2)=1/8$	△ $P(A=2,B=2)=1/16$

この表より、事象系 G の各事象の確率は次のように求められる。

$P_G(\bigcirc)=P(A=1,B=0)+P(A=2,B=0)+P(A=2,B=1)$
$=1/8+1/16+1/8$
$=5/16,$

$P_G(\triangle)=P(A=0,B=0)+P(A=1,B=1)+P(A=2,B=2)$
$=1/16+1/4+1/16$
$=6/16$
$=3/8$

$P_G(\times)=P(A=0,B=1)+P(A=0,B=2)+P(A=1,B=2)$
$=1/8+1/16+1/8$
$=5/16$

よって、次のように情報源 G が求められる。

$$G=\begin{Bmatrix} \bigcirc & , & \triangle & , & \times \\ 5/16 & , & 3/8 & , & 5/16 \end{Bmatrix}$$

（２）　事象系 G において、引き分けが起こったことを知ったときの自己情報量 $i_G(\triangle)$ を求めよ。（３点）

$i_G(\triangle)=-\log P_G(\triangle)$
$=\log\dfrac{8}{3}$
$=\log 8-\log 3$
$\simeq 3-1.585$
$=1.415\quad[bit]$

（３）　情報源 A の平均情報量（エントロピー）$H(A)$ を求めよ。（４点）

$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P_A(\alpha) \log P_A(\alpha)$

$= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4$

$= \frac{3}{2}$

$= 1.5 \quad [bit]$

（４）　条件付エントロピー$H(G|A)$、$H(B|A)$を求めよ。（８点、各４点）

$H(B|A)$から求める。

事象系 A と事象系 B は独立なので、

$H(B|A)$＝$H(B)$である。

よって、（３）と同様に

$H(B|A)$＝$H(B)$

$= 1.5\,[bit]$

（別解）

$H(B|A)$＝$\sum_{\alpha \in A} P_A(\alpha) H(B|\alpha)$であるので、

各事象$\alpha \in A$に対して条件付エントロピー$H(B|\alpha)$を条件付確率$P(\beta|\alpha), \beta \in B$から求める。

なお、$P(\beta|\alpha) = \frac{P(a,\beta)}{P_A(\alpha)}$である。

$H(B|A=0)$

＝$-P(B=0|A=0)\log P(B=0|A=0) - P(B=1|A=0)\log P(B=1|A=0) - P(B=2|A=0)\log P(B=2|A=0)$

$= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4$

$= \frac{3}{2}$

$H(B|A=1)$

＝$-P(B=0|A=1)\log P(B=0|A=1) - P(B=1|A=1)\log P(B=1|A=1) - P(B=2|A=1)\log P(B=2|A=1)$

$= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4$

$= \frac{3}{2}$

$H(B|A=2)$

＝$-P(B=0|A=2)\log P(B=0|A=2) - P(B=1|A=2)\log P(B=1|A=2) - P(B=2|A=2)\log P(B=2|A=2)$

$= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4$

$= \frac{3}{2}$

$$\therefore H(B|A) = \sum_{\alpha \in A} P_A(\alpha) H(B|\alpha)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}$$
$$= \frac{3}{2}$$
$$= 1.5 \quad [bit]$$

次に、$H(G|A) = \sum_{\alpha \in A} P_A(\alpha) H(G|\alpha)$ を求める。

各事象 $\alpha \in A$ に対して条件付エントロピー $H(G|\alpha)$ を条件付確率 $P(\gamma|\alpha), \gamma \in G$ から求める。

なお、$P(\gamma|\alpha) = \dfrac{P(\gamma, a)}{P_A(\alpha)}$ である。

$$H(G|A=0)$$
$$= -P(G=\bigcirc|A=0)\log P(G=\bigcirc|A=0)$$
$$-P(G=\triangle|A=0)\log P(G=\triangle|A=0)$$
$$-P(G=\times|A=0)\log P(G=\times|A=0)$$
$$= 0 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{3}{4}\log\frac{4}{3}$$
$$= \log 4 - \frac{3}{4}\log 3$$
$$\simeq 2 - 1.189$$
$$= 0.811$$

$$H(G|A=1)$$
$$= -P(G=\bigcirc|A=0)\log P(G=\bigcirc|A=0)$$
$$-P(G=\triangle|A=0)\log P(G=\triangle|A=0)$$
$$-P(G=\times|A=0)\log P(G=\times|A=0)$$
$$= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4$$
$$= \frac{3}{2}$$
$$= 1.5$$

$$H(G|A=2)$$
$$= -P(G=\bigcirc|A=0)\log P(G=\bigcirc|A=0)$$
$$-P(G=\triangle|A=0)\log P(G=\triangle|A=0)$$
$$-P(G=\times|A=0)\log P(G=\times|A=0)$$
$$= \frac{3}{4}\log\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\log 4 + 0$$
$$\simeq 0.811$$

$$\therefore H(G|A) = \sum_{\alpha \in A} P_A(\alpha) H(G|\alpha)$$
$$= \frac{1}{4}0.811 + \frac{1}{2} \bullet \frac{3}{2} + \frac{1}{4}0.811$$
$$= \frac{1}{2}0.811 + \frac{1}{2} \bullet \frac{3}{2}$$
$$\simeq 1.156 \quad [bit]$$

（５） 相互情報量 $I(G;A)$、 $I(B;A)$ を求めよ。（６点、各３点）

事象系 A と事象系 B は独立なので $I(B;A) = 0$

（別解）

$$I(B;A) = H(B) - H(B|A)$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$$
$$= 0$$

次に、 $I(G;A)$ を求める。

$I(G;A) = H(G) - H(G|A)$ なので、 $H(G)$ を求める。

$$H(G) = -\sum_{\gamma \in G} P_G(\gamma) \log P_G(\gamma)$$
$$= \frac{5}{16}\log\frac{16}{5} + \frac{6}{16}\log\frac{16}{6} + \frac{5}{16}\log\frac{16}{5}$$
$$= \log 16 - \frac{10}{16}\log 5 - \frac{6}{16}\log 6$$
$$\simeq 4 - 1.451 - 0.969$$
$$= 1.58$$
$$\therefore I(G;A) = H(G) - H(G|A)$$
$$= 1.58 - 1.156$$
$$= 0.424 \quad [bit]$$

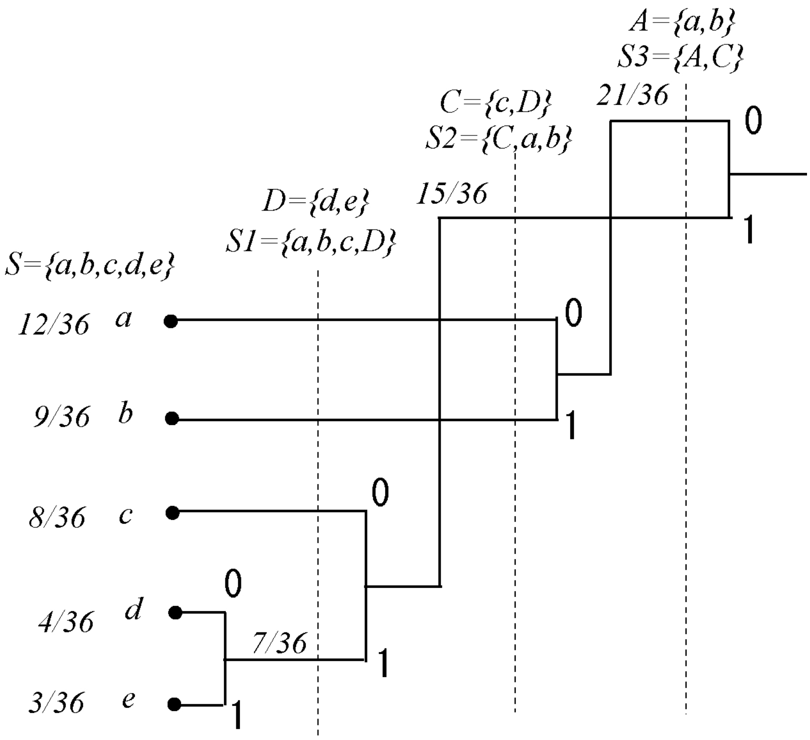
2.情報源符号化（３０点）

無記憶情報源 $S = \begin{Bmatrix} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ \frac{12}{36} & , & \frac{9}{36} & , & \frac{8}{36} & , & \frac{4}{36} & , & \frac{3}{36} \end{Bmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

（１） ハフマン符号化法により符号を求めよ。（１０点）

次の図より求められる。

各縮退情報源において確率が変わったとき、順位が変動することに注意する。



この図より、

C:

$a \rightarrow 00$

$b \rightarrow 01$

$c \rightarrow 10$

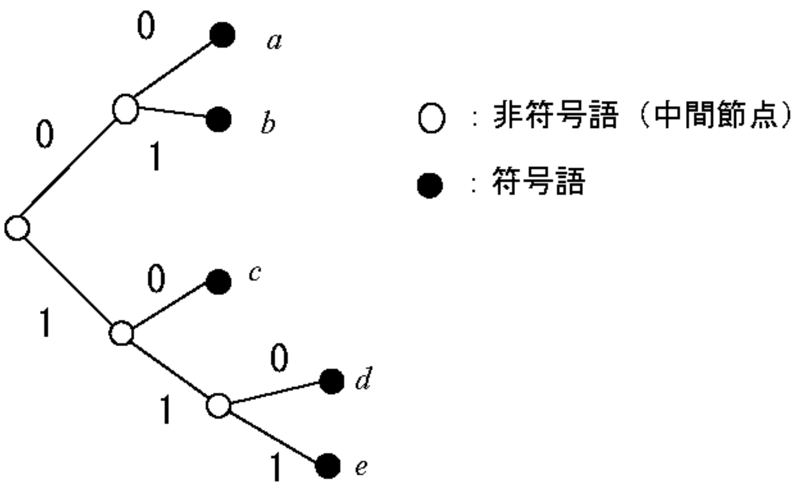
$d \rightarrow 110$

$e \rightarrow 111$

と符号が求められる。

（２）（１）で得られた符号の符号の木を示せ。（５点）

上図より、以下の符号の木が得られる。



（３）（１）で得られた符号の平均符号語長 $\overline{L}$ を求めよ。（7 点）

$\overline{L}=\sum_{s\in S}P(s)l(s)$

$=\frac{12}{36}\times 2+\frac{9}{36}\times 2+\frac{8}{36}\times 2+\frac{4}{36}\times 3+\frac{3}{36}\times 3$

$=\frac{24+18+16+12+9}{36}$

$=\frac{79}{36}$

$\simeq 2.194\quad [bit/\text{記号}]$

（4）（1）で得られた符号の効率eを求めよ。（8 点）

$e=\frac{H(S)}{\overline{L}},(1\le e\le 1)$ より求める。なお、効率の範囲より分母と分子が自動的に定まる。

$H(S)$ を求める。

$$H(S)=\frac{12}{36}\log\frac{36}{12}+\frac{9}{36}\log\frac{36}{9}+\frac{8}{36}\log\frac{36}{8}+\frac{4}{36}\log\frac{36}{4}+\frac{3}{36}\log\frac{36}{3}$$

$$=\log 36-\left(\frac{12}{36}\log 12+\frac{9}{36}\log 9+\frac{8}{36}\log 8+\frac{4}{36}\log 4+\frac{3}{36}\log 3\right)$$

$$=\left(2\log 3+2\right)-\left(\frac{12}{36}\log 3+\frac{24}{36}+\frac{18}{36}\log 3+\frac{24}{36}+\frac{8}{36}+\frac{3}{36}\log 3\right)$$

$$=\left(\frac{72-12-18-3}{36}\right)\log 3+\left(\frac{72-24-24-8}{36}\right)$$

$$=\frac{42}{36}\log 3+\frac{16}{36}$$

$\simeq 1.717+0.4444$

$=2.1614$

$e=\frac{H(S)}{\overline{L}}$

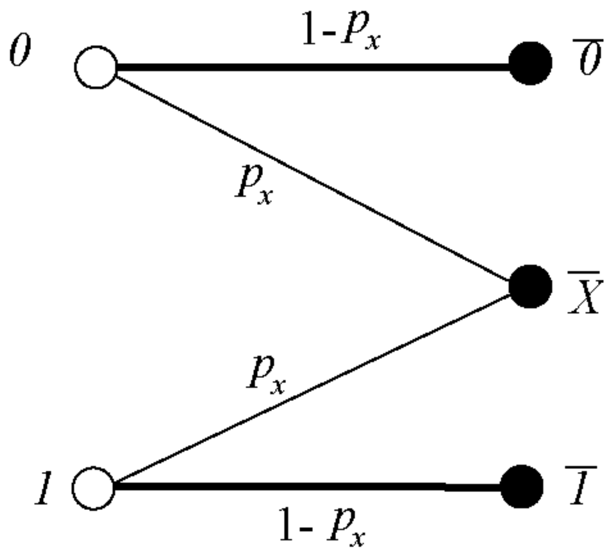
$\simeq\frac{2.161}{2.194}$

$=0.985$

3.通信路(20 点)

送信アルファベットを $A=\{0,1\}$ とし、受信アルファベットを $B=\{\overline{0},\overline{X},\overline{1}\}$ とする。ここで、$\overline{X}$ は記号の消失を意味する。このとき、通信路行列 $T=\begin{bmatrix}1-p_x & p_x & 0\\ 0 & p_x & 1-p_x\end{bmatrix}$、$0\le p_x\le 1$ で表される２元通信路について問いに答えよ。

（1）　この通信路Tの通信路線図を示せ。（5点）



（２）　この通信路の通信路容量$C(T)$をp_xの式で表せ。また、通信路容量$C(T)$を縦軸に、p_xを横軸にしたグラフの概形を示せ。（１０点）

$C(T)=\max_{A}\{I(B;A)\}$

$=\max_{A}\{H(B)-H(B|A)\}$

である。

情報源Aの各記号0,1の生成確率$P(0)=p$とする。

このとき、

$P(1)=1-p,$

$P(\bar{0})=(1-p_x)p,$

$P(\bar{x})=p_x p+p_x(1-p)=p_x,$

$P(\bar{1})=(1-p_x)(1-p)$

と求められる。

$H(B|0)=\mathcal{H}(p_x)$

$H(B|1)=\mathcal{H}(p_x)$

より、

$H(B|A)=pH(B|0)+(1-p)H(B|1)$
$=p\mathcal{H}(p_x)+(1-p)\mathcal{H}(p_x)$
$=\mathcal{H}(p_x)$

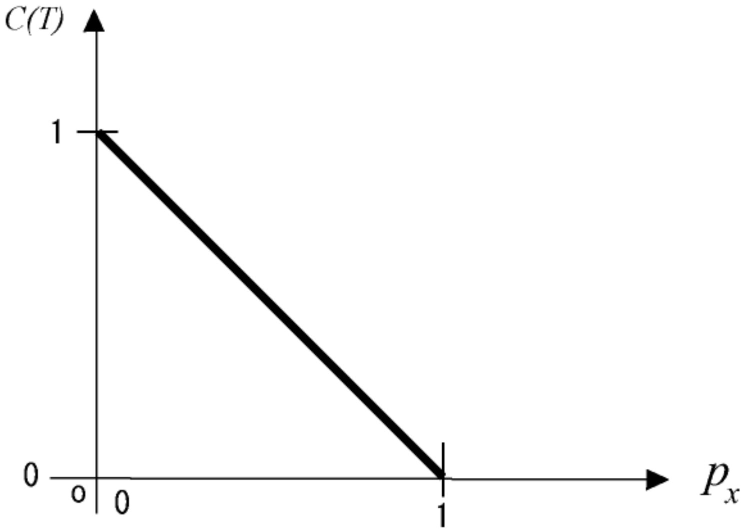
また、

$$
\begin{aligned}
H(B) &= -(1-p_x)p\log(1-p_x)p - p_x\log p_x - (1-p_x)(1-p)\log(1-p_x)(1-p) \\
&= -(1-p_x)p\log p - (1-p_x)(1-p)\log(1-p) \\
&\quad -(1-p_x)p\log(1-p_x) - (1-p_x)(1-p)\log(1-p_x) \\
&\quad - p_x\log p_x \\
&= (1-p_x)\mathcal{H}(p) - (1-p_x)\log(1-p_x) - p_x\log p_x \\
&= (1-p_x)\mathcal{H}(p) + \mathcal{H}(p_x)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
C(T) &= \max_A \{I(B;A)\} \\
&= \max_A \{H(B) - H(B\,|\,A)\} \\
&= \max_p \{(1-p_x)\mathcal{H}(p) + \mathcal{H}(p_x) - \mathcal{H}(p_x)\} \\
&= \max_p (1-p_x)\mathcal{H}(p) \\
&= 1 - p_x \quad (\because \max\mathcal{H}(p) = 1,\ p = \frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

以上より、次のように図示できる。



（３）　この通信路で情報を伝送するときに、通信路容量を達成できるように、情報源Aの各記号0,1の生成確率 $P(0), P(1)$ を求めよ。（５点）

（２）より、

$P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ のときに最大値をとる。

（別解）

対称性より、 $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ のときに最大値をとる。

２．通信路符号化（２０点）

(7,4) ハミング符号を以下のように表す。

$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3)$

ここで、 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ は情報ビットであり、 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ は検査ビットである。また、検査ビットは次式で定義される。

$p_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $p_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$, $p_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$

この (7,4) ハミング符号に関して以下の問いに答えよ。

（１）次の系列を情報ビット $\boldsymbol{x}_i$ とする (7,4) ハミング符号 $\boldsymbol{w}_i$ を求めよ。（８点、各２点）

① $\boldsymbol{x}_1 = 1100$

$p_1^1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$

$p_2^1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1,$

$p_3^1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$

$\therefore \boldsymbol{w}_1 = 1100010$

② $\boldsymbol{x}_2 = 0101$

$\boldsymbol{w}_2 = 0101100$

③ $\boldsymbol{x}_3 = 1101$

$\boldsymbol{w}_3 = 1101001$

④ $\boldsymbol{x}_4 = 1011$

$\boldsymbol{w}_4 = 1011000$

（２） (7,4) ハミング符号の受信語 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ を用いて、シンドローム $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ の式を示せ。（４点）

$s_1 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_5,$

$s_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 \oplus y_6,$

$s_3 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_4 \oplus y_7$

（３）　各受信語 $\boldsymbol{y}_i$ は高々１ビットしか誤りが無いとする。このとき、各受信語の誤りを訂正して送信語 $\boldsymbol{w}_i$ を求めよ。（８点、各２点）

まず、誤りベクトルとシンドロームの関係の表を作成する。

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_6	s_1	s_2	s_3
1	0					0	1	0	1
0	1	0					1	1	1
	0	1	0				1	1	0
		0	1	0			0	1	1
			0	1	0		1	0	0
				0	1	0	0	1	0
					0	1	0	0	1
0						0	0	0	0

① $\boldsymbol{y}_1 = 1110001$

$s_1^1 = e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus e_5$
$= y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_5$
$= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0$
$= 1$

$s_2^1 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 \oplus y_6$
$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$
$= 0$

$s_3^1 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_4 \oplus y_7$
$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1$
$= 1$

よって、表より誤りベクトルが次のように求められる。

$\boldsymbol{e}_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$
$= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

以上より、１ビット目が誤りである。

$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{y}_1 \oplus \boldsymbol{e}_1$
$= 1110001 \oplus 1000000$
$= 0110001$

② $\boldsymbol{y}_2 = 0101111$

$s_1^2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1$
$= 0$

$s_2^2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$
$= 1$

$s_3^2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1$
$= 1$

$\boldsymbol{e}_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

$\therefore \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{y}_2 \oplus \boldsymbol{e}_2$
$= 0100111$

③ $\boldsymbol{y}_3 = 1001110$

$$s_1^3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1$$
$$= 0$$

$$s_2^3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$$
$$= 0$$

$$s_3^3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0$$
$$= 0$$

$$\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\therefore \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{y}_3 \oplus \boldsymbol{e}_3$$
$$= 1001110$$

④ $\boldsymbol{y}_4 = 0011111$

$$s_1^4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$$
$$= 0$$

$$s_2^4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1$$
$$= 1$$

$$s_3^4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1$$
$$= 0$$

$$\boldsymbol{e}_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$\therefore \boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{y}_4 \oplus \boldsymbol{e}_4$$
$$= 0011101$$