

情報理論演習課題 7 (誤り検出・訂正符号構成法)

提示：2011/2/2(水) (講義内演習)

通信において高々 1 ビットしか誤らない場合に、誤り検出・訂正符号 (通信路符号の一種) として、I) パリティ符号、II) 垂直水平パリティ符号、III) ハミング符号を考える。以下の設問に答えよ。

I パリティ符号

(5,4)偶数パリティ符号は以下のように定義される。

$$\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, p)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ は情報ビットであり、 p は次式で定義される冗長ビット (パリティビット) である。

$$p = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

1 次の系列 $\mathbf{x}_i, 1 \leq i \leq 3$ を情報ビットとする (5,4)偶数パリティ符号語 $\mathbf{w}_i$ および復号領域 Ω_i を求めよ。

(1) $\mathbf{x}_1 = 0101$

(2) $\mathbf{x}_2 = 1011$

(3) $\mathbf{x}_3 = 0010$

2. 次の系列 $\mathbf{y}_j, 4 \leq j \leq 6$ は、(5,4)偶数パリティ符号の受信語である。各受信語が誤っているかどうかを判別せよ。また、誤っている場合には、送信語として可能な符号語を列挙せよ。

(4) $\mathbf{y}_4 = 01010$

(5) $\mathbf{y}_5 = 11100$

(6) $\mathbf{y}_6 = 00100$

3. 情報ビットが 5 ビットで、冗長ビットが 1 ビットである (6,5) 偶数パリティ符号を定義せよ。

4. (5,4)偶数パリティ符号の情報速度 $R_1(5,4)$ 、および (6,5)偶数パリティ符号の情報速度 $R_1(6,5)$ を求めよ。

II 垂直水平パリティ符号

(9,4) 垂直水平パリティ符号は以下のように定義される。

$$\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ は情報ビットであり、 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ は次式で定義される冗長ビットである。

$$p_1 = x_1 \oplus x_2, \quad p_2 = x_3 \oplus x_4, \quad p_3 = x_1 \oplus x_3, \quad p_4 = x_2 \oplus x_4, \quad p_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

1 次の系列 $x_i, 1 \leq i \leq 3$ を情報ビットとする (9,4) 垂直水平パリティ符号語 w_i および復号領域 Ω_i を求めよ。

- (1) $x_1 = 0101$
- (2) $x_2 = 1011$
- (3) $x_3 = 0010$

2 次の系列 $y_j, 4 \leq j \leq 6$ は、垂直水平パリティ符号の受信語である。各受信語 y_j 対して誤りを訂正し、正しい送信符号語 w_j および情報ビット x_j を求めよ。

- (4) $y_4 = 1000\ 00000$
- (5) $y_5 = 101111011$
- (6) $y_6 = 0110\ 11111$

3 (12,6) 垂直水平パリティ符号を定義せよ。

ヒント： 2×3 の形に情報ビットを配置して、冗長ビットの定義式を求める。

4 (9,4) 垂直水平パリティ符号の情報速度 $R_{\Pi}(9,4)$ 、および (12,6) 垂直水平パリティ符号の情報速度 $R_{\Pi}(12,6)$ を求めよ。

III ハミング符号

(7,4)のハミング符号を以下のように表す。

$$\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3)$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ は情報ビットであり、 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ は冗長ビットである。各冗長ビットは次式で定義する。

$$p_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \quad p_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4, \quad p_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$$

このとき、以下の問いに答えよ。

1 次の系列 x_i を情報ビットとする (7,4) ハミング符号語 w_i および復号領域 Ω_i を求めよ。

- (1) $x_1 = 0101$
- (2) $x_2 = 1011$
- (3) $x_3 = 0010$

2 次の系列 y_j , $4 \leq j \leq 6$ は、(7,4)ハミング符号の受信語である。各受信語 y_j に対して誤りを訂正し、正しい送信語 w_j および情報ビット x_j を求めよ。

- (4) $y_4 = 1000\ 000$
- (5) $y_5 = 1110\ 011$
- (6) $y_6 = 1011\ 001$

3. (15,11)のハミング符号を定義せよ。

ヒント：15 ビットの誤りベクトルを考察し、4 ビットのシンドロームの定義式を求め、冗長ビットの定義式を導く。

4 (7,4)ハミング符号の情報速度 $R_{\text{III}}(7,4)$ および(15,11)ハミング符号の情報速度 $R_{\text{III}}(15,11)$ を求めよ。