

情報理論レポート課題 6(通信路)解答例

提示：2010/12/22(水) 提出：2011/01/19(水)

1. 次の通信路行列 T で表される通信路について考える。

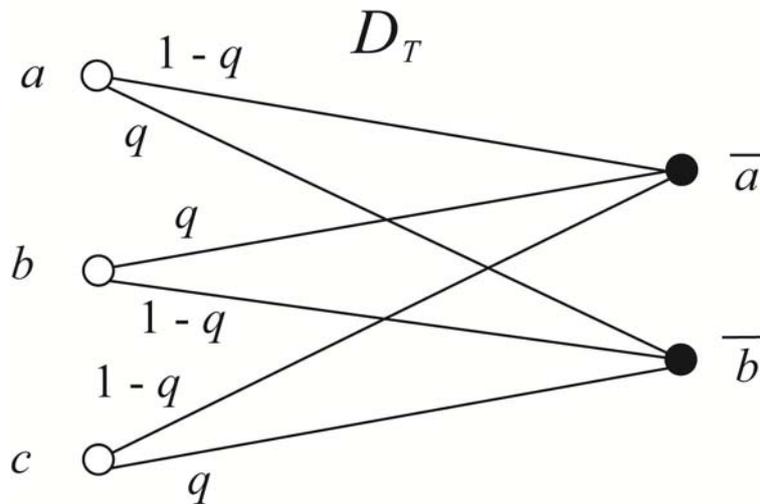
$$T = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ q & 1-q \\ 1-q & q \end{bmatrix}, \quad (0 < q < 1)$$

この通信路で、送信情報源 $A = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c \\ p & , & 1-2p & , & p \end{matrix} \right\}$, $\left(0 < p < \frac{1}{2} \right)$ を送信し、受信情報

源 $B = \left\{ \begin{matrix} \bar{a} & , & \bar{b} \\ P(\bar{a}) & , & P(\bar{b}) \end{matrix} \right\}$ が得られるとする。このとき、以下の問に答えよ。

(1) の通信路の通信路線図 D_T を描け。

下図のように描ける。



(2) 全ての組み合わせ $\alpha \in A, \beta \in B$ に対して、結合確率 $P(\alpha, \beta)$ を求めよ。

$\alpha \in A, \beta \in B$ に対して、 $P(\alpha, \beta) = P(\alpha)P(\beta|\alpha) = P(\alpha)t_{\alpha\beta}$ で求められる。

$$P(a, \bar{a}) = p(1-q), \quad P(a, \bar{b}) = pq,$$

$$P(b, \bar{a}) = (1-2p)q, \quad P(b, \bar{b}) = (1-2p)(1-q),$$

$$P(c, \bar{a}) = p(1-q), \quad P(c, \bar{b}) = pq$$

(3) $\beta \in B$ に対して、受信確率 $P(\beta)$ を求めよ。($P(\bar{a})$ 、 $P(\bar{b})$ を求めよ。)

$P(\bar{a}) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha, \bar{a})$ で求められる。

$$P(\bar{a}) = p(1-q) + (1-2p)q + p(1-q) = q + 2p - 4pq$$

同様に、 $P(\bar{b}) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha, \bar{b})$ で求められる。

$$P(\bar{b}) = pq + (1-2p)(1-q) + pq = 1 - q - 2p + 4pq$$

(4) 全ての組み合わせ $\alpha \in A, \beta \in B$ に対して、条件付き確率 $P(\alpha | \beta)$ を求めよ。

$$P(\alpha, \beta) = P(\beta)P(\alpha | \beta)$$

$$\therefore P(\alpha | \beta) = \frac{P(\alpha, \beta)}{P(\beta)}$$

より求める。

$$P(a|\bar{a}) = \frac{p(1-q)}{q+2p-4pq}, \quad P(a|\bar{b}) = \frac{pq}{1-q-2p+4pq},$$

$$P(b|\bar{a}) = \frac{(1-2p)q}{q+2p-4pq}, \quad P(b|\bar{b}) = \frac{(1-2p)(1-q)}{1-q-2p+4pq},$$

$$P(c|\bar{a}) = \frac{p(1-q)}{q+2p-4pq}, \quad P(c|\bar{b}) = \frac{pq}{1-q-2p+4pq}$$

(5) 伝送される情報量 $I(A; B)$ を確率 p, q を用いた式 $I(p, q)$ として求めよ。

$I(A; B) = H(B) - H(B|A)$ より求める。次式のように求められる。

$$H(B) = \mathcal{H}(q + 2p - 4pq)$$

$$H(B|a) = H(B|b) = H(B|c) = \mathcal{H}(q) \quad \therefore H(B|A) = \mathcal{H}(q)$$

以上より、次式が得られる。

$$I(A; B) = I(p, q)$$

$$= \mathcal{H}(q + 2p - 4pq) - \mathcal{H}(q)$$

$$= -(q + 2p - 4pq) \log(q + 2p - 4pq) - (1 - q - 2p + 4pq) \log(1 - q - 2p + 4pq)$$

$$+ q \log q + (1 - q) \log(1 - q)$$

(6) 送信情報源として $A = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c \\ \frac{1}{3} & , & \frac{1}{3} & , & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\}$ をこの通信路に接続するとき、伝送される情報

量 $I(A;B)$ を求めよ。

(5)の結果に、 $p = \frac{1}{3}$ を代入すれば解が得られる。

$$\begin{aligned} I(A;B) &= I(p,q) \Big|_{p=\frac{1}{3}} \\ &= \mathcal{H}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}q\right) - \mathcal{H}(q) \\ &= -\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}q\right) \log\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}q\right) - \left(\frac{1}{3}q - \frac{1}{3}\right) \log\left(\frac{1}{3}q - \frac{1}{3}\right) \\ &\quad + q \log q + (1-q) \log(1-q) \end{aligned}$$

(7) $q = \frac{1}{4}$ のとき、 $I\left(p, \frac{1}{4}\right)$ の最大値 I_{\max} および、その時の p の値を求めよ。

(5)の結果に、 $q = \frac{1}{4}$ を代入する。

$$I\left(p, \frac{1}{4}\right) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + p\right) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

よって、

$$\frac{1}{4} + p = \frac{1}{2} \quad \therefore p = \frac{1}{4}$$

のとき、

最大値が次のように得れる。

$$\begin{aligned} I_{\max} &= 1 - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\approx 1 - 0.811 \\ &\approx 0.188 \quad [\text{bit/記号}] \end{aligned}$$

以上より、 $q = \frac{1}{4}$ の場合には、送信情報源として次を接続すれば良い。

$$A_{\max} = \left\{ \begin{array}{ccc} a & , & b & , & c \\ \frac{1}{4} & , & \frac{1}{2} & , & \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

(8) $q = \frac{1}{4}$ のとき、通信路容量 $C\left(T\big|_{q=\frac{1}{4}}\right)$ を求めよ。

$$C\left(T\big|_{q=\frac{1}{4}}\right) = \max I(A; B)$$

$$= \max I\left(p, \frac{1}{4}\right)$$

$$= I_{\max}$$

$$\approx 0.188 \quad [\text{bit} / \text{記号}]$$