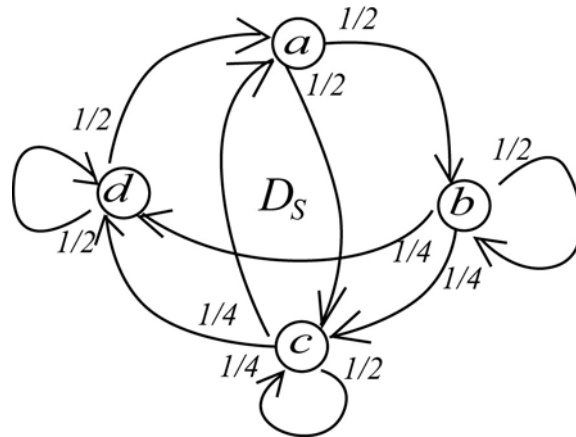


情報理論レポート 3 (マルコフ情報源) 解答例

提示: 2010/11/10(水) 提出: 2010/11/17(水)

1. マルコフ情報源

情報源アルファベット $X = \{a, b, c, d\}$ 上でのマルコフ情報源 S は、次の状態遷移図 D_S で定められる。



このとき、以下の問いに答えよ。

(1) マルコフ情報源 S の状態遷移行列 P_S を求めよ。

状態遷移図より次のように状態遷移行列が求められる。

$$P_S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

なお、状態遷移図における矢印は条件付き確率を表すので、ある状態から出て行く確率の総和は1である。これは、状態遷移行列の行ベクトルが確率ベクトル、すなわち要素が非負の値で、総和が1になることに対応する。

(2) マルコフ情報源 S の定常分布 z を求め、 S の随伴情報源 $\bar{S}$ を求めよ。

$$\begin{cases} z = zP_S \\ \sum_{z_i \in z} z_i = 1 \end{cases}$$

より定常分布 $\mathbf{z} = (z_a, z_b, z_c, z_d)$ を求める。

$\mathbf{z} = \mathbf{z}P_s$ より、 ${}^t\mathbf{z} = {}^tP_s {}^t\mathbf{z}$ 。(列ベクトルで求める場合には、状態遷移行列の転置を忘れないこと。)

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{z} &= {}^tP_s {}^t\mathbf{z} \\ \therefore (I - {}^tP_s) {}^t\mathbf{z} &= \mathbf{0} \\ \therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \\ z_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

係数行列を行基本変形する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し。}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し。}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{16} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{16}{5} \times (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し。}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上より、 $\mathbf{z} = \mathbf{z}P_s$ は次と等価。

$$\begin{cases} z_a & -\frac{4}{5}z_d = 0 \\ & z_b & -\frac{4}{5}z_d = 0 \\ & & z_c & -\frac{6}{5}z_d = 0 \end{cases}$$

$\sum_{z_i \in \mathbf{z}} z_i = 1$ に代入して成分を求める。

$$z_a + z_b + z_c + z_d = 1$$

$$\therefore \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + 1 \right) z_d = 1$$

$$\therefore z_d = \frac{5}{19}$$

$$\therefore z_a = \frac{4}{5}z_d = \frac{4}{19}, z_b = \frac{4}{5}z_d = \frac{4}{19}, z_c = \frac{6}{5}z_d = \frac{6}{19}$$

(検算)

$$\text{右辺} = \mathbf{z}P_s$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4}{19}, \frac{4}{19}, \frac{6}{19}, \frac{5}{19} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{4}{19}, \frac{4}{19}, \frac{6}{19}, \frac{5}{19} \right) \\ &= \text{左辺} \end{aligned}$$

以上より、随伴情報源 $\bar{S}$ は次式で定められる。

$$\bar{S} = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c & , & d \\ \frac{4}{19} & , & \frac{4}{19} & , & \frac{6}{19} & , & \frac{5}{19} \end{matrix} \right\}$$

(3) 随伴情報源 $\bar{S}$ のエントロピー $H(\bar{S})$ を求めよ。

(2) より、次式で求められる。

$$\begin{aligned}
H(\bar{S}) &= -\sum_{\alpha \in \bar{S}} P(\alpha) \log P(\alpha) \\
&= -\frac{4}{19} \log \frac{4}{19} - \frac{4}{19} \log \frac{4}{19} - \frac{6}{19} \log \frac{6}{19} - \frac{6}{19} \log \frac{6}{19} \\
&\simeq 1.98 \quad [\text{bit} / \text{記号}]
\end{aligned}$$

(4) マルコフ情報源 S のエントロピー $H(S | S)$ を求めよ。

各 $\alpha \in S$ に対して、条件付きエントロピー $H(S | \alpha)$ を求める。

$$H(S | a) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) = 1.0$$

$$\begin{aligned}
H(S | b) &= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{4} \log 4 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2} \\
&= 1.50
\end{aligned}$$

$$H(S | c) = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = 1.50$$

$$H(S | d) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) = 1.0$$

以上より、マルコフ情報源 S のエントロピー $H(S | S)$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
H(S | S) &= \sum_{\alpha \in S} P(\alpha) H(S | \alpha) \\
&= P(a) H(S | a) + P(b) H(S | b) + P(c) H(S | c) + P(d) H(S | d) \\
&= \frac{4}{19} \times 1 + \frac{4}{19} \times \frac{3}{2} + \frac{6}{19} \times \frac{3}{2} + \frac{5}{19} \times 1 \\
&= \frac{4 + 6 + 9 + 5}{19} \\
&= \frac{24}{19} \\
&\simeq 1.26 \quad [\text{bit} / \text{記号}]
\end{aligned}$$

(5)マルコフ情報源のエントロピー $H(S | S)$ と随伴情報源のエントロピー $H(\bar{S})$ の大小関係を比較考察せよ。

マルコフ情報源のエントロピー $H(S | S)$ は随伴情報源のエントロピー $H(\bar{S})$ 以下になる。
即ち、次式が成り立つ。

$$H(S | S) \leq H(\bar{S})$$

これは、マルコフ情報源がある記号の次の記号をある程度予測できるのに対して、随伴情報源は予測できないことに対応する。従って、一般に、情報源アルファベットの出現確率が同一だったとしても、記憶のある情報源のエントロピーは無記憶情報源のエントロピーより小さくなる。