情報理論レポート 2(各種情報量)解答例

1．各種情報量

A,B,C の 3 人でジャンケンを行った。ただし、3 人は以下の確率で出す手を選択する癖がある。なお、次式では、G:グー、C:チョキ、P:パーを表す。

$$A=\begin{Bmatrix} G & , & C & , & P \\ \frac{3}{6} & , & \frac{2}{6} & , & \frac{1}{6} \end{Bmatrix}$$

$$B=\begin{Bmatrix} G & , & C & , & P \\ \frac{2}{5} & , & \frac{1}{5} & , & \frac{2}{5} \end{Bmatrix}$$

$$C=\begin{Bmatrix} G & , & C & , & P \\ \frac{1}{4} & , & \frac{2}{4} & , & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

また、ジャンケンの結果において A の勝ち方で事象系 K_A を定める。なお、次式では、W:勝ち、D:引き分け、L:負けを表す。

$$K_A=\begin{Bmatrix} W & , & D & , & L \\ P(W) & , & P(D) & , & P(L) \end{Bmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 確率 $P(W),P(D),P(L)$ を求めよ。

A,B,C の手の出し方は独立と考えられるので、全ての手の出し方に関する結合確率 $P(A,B,C)$ は次の表のように求められる。

$P(A,B,C)$

$(B,C)\setminus A$	G	C	P
(G,G)	$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{120}$
(G,C)	$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{12}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{8}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{4}{120}$
(G,P)	$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{120}$
(C,G)	$\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{120}$
(C,C)	$\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{4}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{120}$
(C,P)	$\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{120}$
(P,G)	$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{120}$
(P,C)	$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{12}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{8}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{4}{120}$
(P,P)	$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{6}{120}$	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{120}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{120}$

また、Aの勝ち方に関しては次の表に表される。

Aの勝ち負け

$(B,C)\setminus A$	G	C	P
(G,G)	D	L	W
(G,C)	W	L	D
(G,P)	L	D	W
(C,G)	W	L	D
(C,C)	W	D	L
(C,P)	D	W	L
(P,G)	L	D	W
(P,C)	D	W	L
(P,P)	L	W	D

以上より、次のように求められる。

$$
\begin{aligned}
P(W) &= P(G,G,C)+P(G,C,G)+P(G,C,C)\\
&\quad +P(C,C,P)+P(C,P,C)+P(C,P,P)\\
&\quad +P(P,G,G)+P(P,G,P)+P(P,P,G)\\
&= \frac{12}{120}+\frac{3}{120}+\frac{6}{120}+\frac{2}{120}+\frac{8}{120}+\frac{4}{120}+\frac{2}{120}+\frac{2}{120}+\frac{2}{120}\\
&= \frac{41}{120}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(G,G,G)+P(G,C,P)+P(G,P,C)\\
&\quad +P(C,G,P)+P(C,C,C)+P(C,P,G)\\
&\quad +P(P,G,C)+P(P,C,G)+P(P,P,P)\\
&= \frac{6}{120}+\frac{3}{120}+\frac{12}{120}+\frac{4}{120}+\frac{4}{120}+\frac{4}{120}+\frac{4}{120}+\frac{1}{120}+\frac{2}{120}\\
&= \frac{40}{120}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(L) &= P(G,G,P)+P(G,P,G)+P(G,P,P)\\
&\quad +P(C,G,G)+P(C,G,C)+P(C,C,G)\\
&\quad +P(P,C,C)+P(P,C,P)+P(P,P,C)\\
&= \frac{6}{120}+\frac{6}{120}+\frac{6}{120}+\frac{4}{120}+\frac{8}{120}+\frac{2}{120}+\frac{2}{120}+\frac{1}{120}+\frac{4}{120}\\
&= \frac{39}{120}
\end{aligned}
$$

(2) エントロピー$H(K_A), H(A), H(B), H(C)$を求めよ。

$$
\begin{aligned}
H(A) &= -\sum_{\alpha\in A} P\left(\alpha\right)\log P\left(\alpha\right)\\
&= -\frac{3}{6}\log\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\log\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}\\
&= \frac{3}{6}\log\frac{6}{3}+\frac{2}{6}\log\frac{6}{2}+\frac{1}{6}\log 6\\
&= \log 6-\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{3}\\
&= \left(\log 2+\log 3\right)-\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{3}\\
&= \frac{2}{3}+\frac{1}{2}\log 3\\
&\simeq 1.46 \quad [bit\,/\,\text{事象}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H(B) = -\frac{2}{5}\log\frac{2}{6} - \frac{1}{5}\log\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\log\frac{2}{5} \\
&\simeq 1.52 \quad [bit\ /\ \text{事象}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H(C) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{2}{4}\log\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2} \\
&= 1.50 \quad [bit\ /\ \text{事象}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H(K_A) = -\frac{41}{120}\log\frac{41}{120} - \frac{40}{120}\log\frac{40}{120} - \frac{39}{120}\log\frac{39}{120} \\
&\simeq 1.58 \quad [bit\ /\ \text{事象}]
\end{aligned}
$$

(3)条件付きエントロピー $H\left(A \mid B\right), H\left(K_A \mid A\right)$ を求めよ。

条件付き確率 $P\left(A \mid B\right)$ は次表になる。

$P(A|B)$

$A \setminus B$	G	C	P
G	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
C	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

以上より、

$H(A|B=G) = H(A|B=C) = H(A|B=P)$

$\therefore H(A|B) = H(A) \simeq 1.46 \quad [bit\ /\ \text{事象}]$

このように独立な事象を条件とする条件付きエントロピーは、条件を付けない元のエントロピーと等しい。

(1)の一覧表より、条件付き確率 $P\left(K_A = W \mid A = G\right)$ は次のようになる。

$$P\left(K_A = W \mid A = G\right) = \frac{\frac{12}{120} + \frac{3}{120} + \frac{6}{120}}{\frac{6}{120} + \frac{12}{120} + \frac{6}{120} + \frac{3}{120} + \frac{6}{120} + \frac{3}{120} + \frac{6}{120} + \frac{12}{120} + \frac{6}{120}}$$
$$= \frac{21}{60}$$
$$= \frac{7}{20}$$

以下同様に、すべての組み合わせに対する条件付き確率求められる。

$P(K_A \mid A)$

$K_A \setminus A$	G	C	P
W	$\frac{21}{60}$	$\frac{14}{40}$	$\frac{6}{20}$
D	$\frac{21}{60}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{7}{20}$
L	$\frac{18}{60}$	$\frac{14}{40}$	$\frac{7}{20}$

$$H\left(K_A \mid A = G\right) = -\frac{21}{60}\log\frac{21}{60} - \frac{21}{60}\log\frac{21}{60} - \frac{18}{60}\log\frac{18}{60} \simeq 1.58 \quad \left[bit / \text{事象}\right]$$

$$H\left(K_A \mid A = C\right) = -\frac{14}{40}\log\frac{14}{40} - \frac{12}{40}\log\frac{12}{40} - \frac{14}{40}\log\frac{14}{40} \simeq 1.58 \quad \left[bit / \text{事象}\right]$$

$$H\left(K_A \mid A = P\right) = -\frac{6}{20}\log\frac{6}{20} - \frac{7}{20}\log\frac{7}{20} - \frac{7}{20}\log\frac{7}{20} \simeq 1.58 \quad \left[bit / \text{事象}\right]$$

$$\therefore H\left(K_A \mid A\right) = P\left(A = G\right)H\left(K_A \mid A = G\right) + P\left(A = C\right)H\left(K_A \mid A = C\right) + P\left(A = P\right)H\left(K_A \mid A = P\right)$$
$$\simeq \frac{3}{6} \times 1.58 + \frac{2}{6} \times 1.58 + \frac{1}{6} \times 1.58$$
$$\simeq 1.58 \quad \left[bit / \text{事象}\right]$$

(4)結合エントロピー $H\left(A, B\right), H\left(K_A, A\right)$ を求めよ。

結合確率 $P\left(A, B\right)$ は次表のように求められる。

$P(A,B)$

$A \setminus B$	G	C	P
G	$\frac{6}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$
C	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$
P	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$

以上より、

$$H(A,B) = -2\times\frac{6}{30}\log\frac{6}{30} - 2\times\frac{4}{30}\log\frac{4}{30} - \frac{3}{30}\log\frac{3}{30} - 3\times\frac{2}{30}\log\frac{2}{30} - \frac{1}{30}\log\frac{1}{30}$$

$\simeq 2.98 \quad [bit/\text{事象}]$

なお、事象 A と事象 B は独立なので、

$$H(A,B) = H(A) + H(B)$$

が成り立つ。

結合確率 $P(K_A, A)$ は次表のように求められる。

$P(K_A, A)$

$K_A \setminus A$	G	C	P
W	$\frac{21}{120}$	$\frac{14}{120}$	$\frac{6}{120}$
D	$\frac{21}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{7}{120}$
L	$\frac{18}{120}$	$\frac{14}{120}$	$\frac{7}{120}$

以上より、

$$\begin{aligned} H(K_A, A) = &-2\times\frac{21}{120}\log\frac{21}{120} - \frac{18}{120}\log\frac{18}{120} \\ &-2\times\frac{14}{120}\log\frac{14}{120} - \frac{12}{120}\log\frac{12}{120} \\ &-\frac{6}{120}\log\frac{6}{120} - 2\times\frac{7}{120}\log\frac{7}{120} \end{aligned}$$

$\simeq 3.04 \quad [bit/\text{事象}]$

(5)

相互情報量 $I\left(A;B\right), I\left(A;K_A\right)$ を求めよ。

$$I\left(A;B\right) = H(A) - H(A \mid B) = 0$$

なお、独立な 2 つの事象同士の相互情報量は 0 となる。

$$\begin{aligned} I\left(K_A;A\right) &= H(K_A) - H(K_A \mid A) \\ &= 0.00337 \\ &= 3.37 \times 10^{-3} \quad \left[bit / \text{事象}\right] \end{aligned}$$

この結果は、A の出す手の情報から A の勝ち負けに関する情報（少量ではあるが）を得ることができることを意味する。(A,B,C 共に出す手に癖が無い場合には、情報が得られなくなることを確認すると良い。)