様々な情報源(４章)

情報源の役割

情報源

情報

伝送路
(通信路)

受信者

今回扱う。
☆無記憶情報源
（前の記号に依存しない情報源。サイコロのような情報源）
☆マルコフ情報源
（前の結果に依存する情報源。英文等は、こっちの方）

情報源モデル

情報源：
離散的な時刻に従い、ある記号の集合から、各時刻に一つの記号を(ある確率的性格で)出力する。

情報源アルファベット

$$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$$

情報源から発生する記号の集合

情報源シンボル(記号)

情報源から発生する記号。
情報源アルファベットの要素

記号 $s_{t_i} \in S$ は、時刻 t_i で発生した情報源記号

s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} s_{t_4} $\cdots$

t_1 t_2 t_3 t_4 時間軸

情報源例１

サイコロを振る試行による記号の生成。

情報源アルファベット

$$D = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$s_{t_1} = 3$ $s_{t_2} = 5$ $s_{t_3} = 2$ $\cdots$ t

1回は3の目がでた。

情報源例２

英文からアルファベットを拾って記号を生成。

情報源アルファベット

$$\mathcal{A} = \{a, b, c, \cdots, z\}$$

$s_{t_1} = i$ $s_{t_2} = n$ $s_{t_3} = f$ $\cdots$ t

1文字目“i”だった。

$\inf ormation\,?$

通報(メッセージ)

定義：通報

情報源から発生する記号系を**通報**という。

情報源

通報

s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} s_{t_4} $\cdots$ n t 時間軸

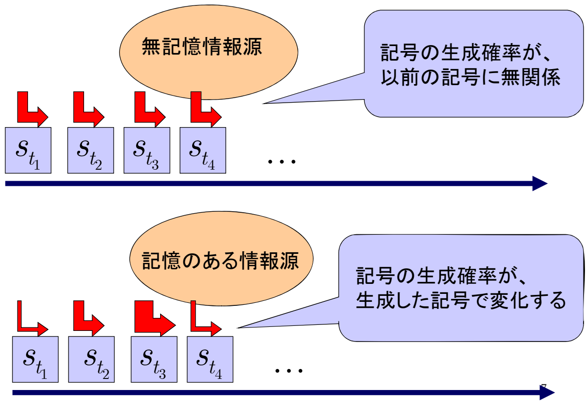
$$s^{(n)} = s_{t_1} s_{t_2} \cdots s_{t_n}$$

n

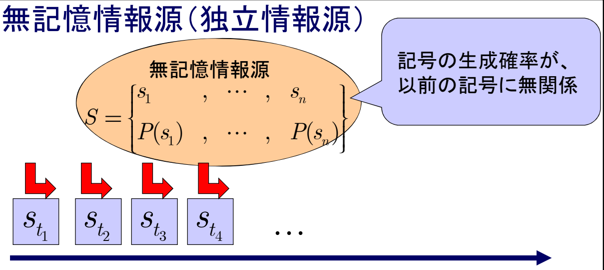
$$s^{(n)}{}_t = s_{t-(n-1)} s_{t-(n-2)} \cdots s_t$$

n

情報源における記憶



無記憶情報源（独立情報源）



無記憶情報源の１記号あたりの（平均）情報量は、
次式で表される。

$$H(S) = -\sum_{k=1}^{n} P(s_k)\log P(s_k) \quad [bit/\text{記号}]$$

１記号の発生速度を

$$r^* \quad [\text{記号}/\text{単位時間}]$$

とする。このとき、単位時間あたりの発生平均情報量は、
次式であらわされる。

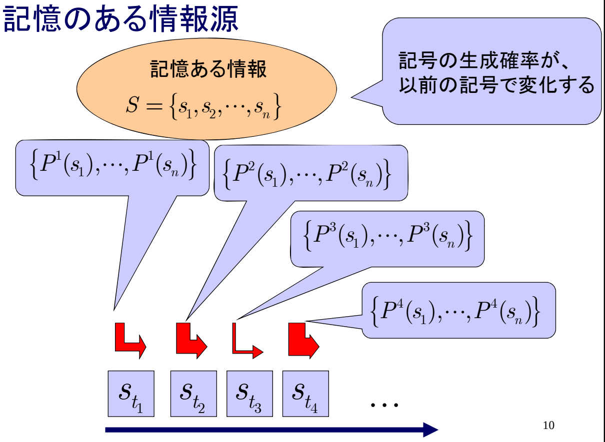
$$H^*(S) = r^* H(S)$$
$$= -r^* \sum_{k=1}^{n} P(s_k)\log P(s_k) \quad [bit/\text{単位時間}]$$

以下の単位系の関係に注意する。

左辺＝$[bit/\text{単位時間}]$

右辺＝$[\text{記号}/\text{単位時間}][bit/\text{記号}] = [bit/\text{単位時間}]$

記憶のある情報源



問題

次の四角に入るアルファベットを求めよ。

(1) m□n　m□in　m□il

(2) t□e　t□is　t□at

(3) speake□　teache□　manne□

マルコフ情報源

マルコフ情報源

定義：マルコフ情報源

直前のm 個の記号よって、次記号の発生確率が変化する情報源を(m 重)マルコフ情報源という。
発生した記号を条件とする条件付確率で定式化される。すなわち、次の条件付き確率で定められる情報源である。

$$\forall s, s_1, s_2, \cdots, s_m \in S$$

$$P(s \mid s_1, s_2, \cdots, s_m)$$

s は今度発生する記号

$s_1, s_2, \cdots, s_m$ は直前の m 個の記号列。カンマはANDの意味。

13

（単純）マルコフ情報源

定義：マルコフ情報源

直前の生成された記号よって、次記号の発生確率が変化する情報源を単純マルコフ情報源という。
発生した記号を条件とする条件付確率で定式化される。すなわち、

$\forall s, s' \in S$ に対して条件付確率

$$P(s \mid s')$$

で定められる情報源である。

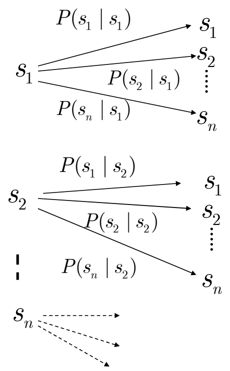
s は今度発生する記号

s' は直前に発生した記号

14

マルコフ情報源における状態の遷移

$$S = \{s_1, \cdots, s_n\}$$



15

状態遷移（確率）行列

$$P = \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) & \cdots & P(s_n \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) & \cdots & P(s_n \mid s_2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P(s_1 \mid s_n) & \cdots & \cdots & P(s_n \mid s_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_n \end{bmatrix}$$

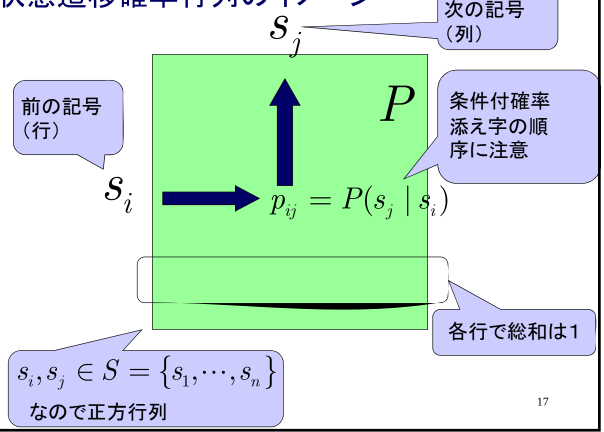
行ベクトルはすべて、確率ベクトル（要素は全て0から1の値を持ち、要素の総和が1）。すなわち、確率ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ に対して次式が成り立つ。

$$1 \le i \le n, \quad 0 \le p_i \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

16

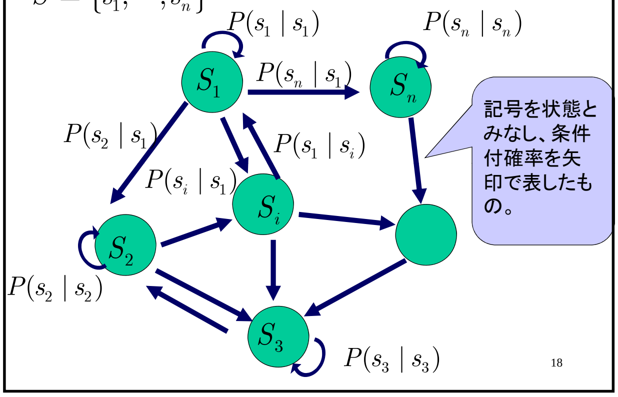
状態遷移確率行列のイメージ



17

シャノン線図（状態遷移図）

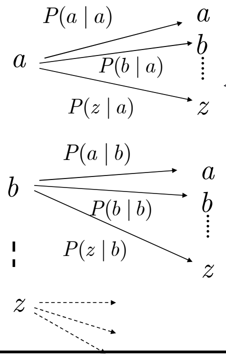
$$S = \{s_1, \cdots, s_n\}$$



18

マルコフ情報源例（アルファベット）

$\mathcal{A} = \{a, b, c, \cdots, z\}$

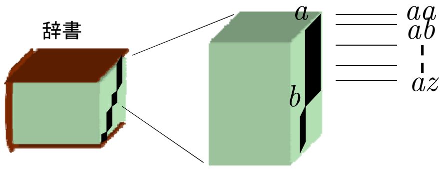


英単語において、
thやer
が多いことから、
$P(h \mid t)$ や $P(r \mid e)$
が大きいと考えられる。

19

状態遷移行列

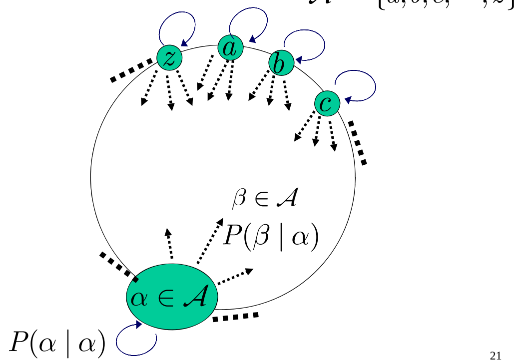
$$P = \begin{bmatrix} P(a \mid a) & P(b \mid a) & \cdots & P(z \mid a) \\ P(a \mid b) & P(b \mid b) & \cdots & P(z \mid z) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P(a \mid z) & \cdots & \cdots & P(z \mid z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a \\ P_b \\ \vdots \\ P_z \end{bmatrix}$$



20

シャノン線図（アルファベット）

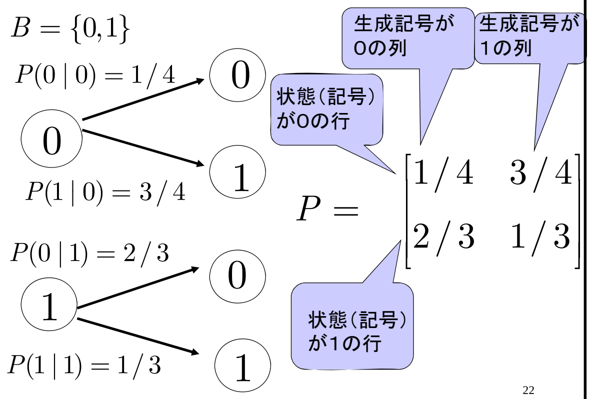
$\mathcal{A} = \{a, b, c, \cdots, z\}$



21

マルコフ情報源例（2元単純マルコフ情報源）

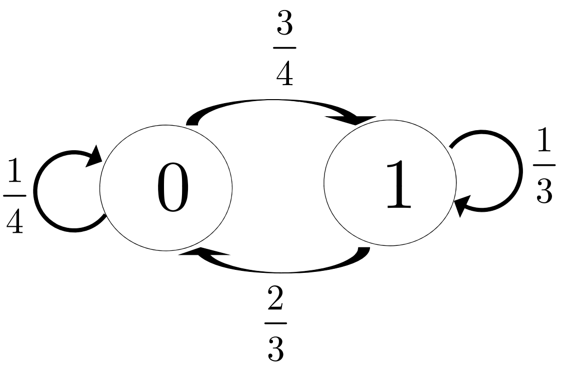
$B = \{0, 1\}$



$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

22

2元単純マルコフ情報源のシャノン線図



23

練習1

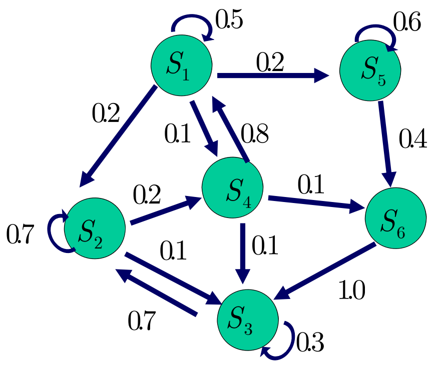
次の状態遷移確率行列で表されるマルコフ情報源を、シャノン線図で表せ。

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

24

練習2

次のシャノン線図で表されるマルコフ情報源の状態遷移確率行列を求めよ。



練習3

次のようなマルコフ情報源の、
状態遷移確率行列およびシャノン線図を求めよ。

$$手=\{グー、チョキ、パー\}$$

自分が出した手の次の手は、
・前の手に勝つような手を出す確率が1/2である。
・前の手に引き分ける手を出す確率が1/3である。
・前の手に負ける手を出す確率が1/6である。

(参考)無記憶情報源の状態遷移行列

均等なサイコロを振ったときの状態遷移行列

次　出る目

今の目

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \end{array}$$

条件付確率

偶数の出やすいサイコロ(無記憶情報源)

次　出る目

今の目

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

条件付確率

練習

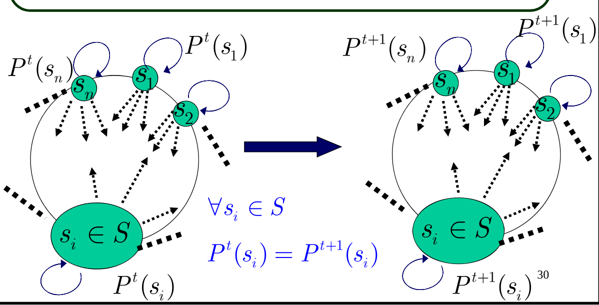
(1)コインを振って得られる状態遷移関数を求めよ。

(2)表の出る確率が、裏のでる確率の2倍であるコインを振って得られる状態遷移関数を求めよ。

定常分布

定義:定常分布

情報源アルファベット $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ に対して、出現確率が時刻 t と時刻 $t+1$ で変化しないような記号の分布を**定常分布**という。



定常分布の求め方

定常分布は、状態遷移確率行列から求めることができる。
定常分布を$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ とし、状態遷移確率行列を
$\boldsymbol{P}=[p_{ij}]$ とする。このとき、次式が成り立つ。

時刻 t から$t+1$になっても変化しない。
常に一定の出現確率となる。

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}\boldsymbol{P}$$

記号の出現確率。

生成した記号の確率と状態遷移確率積なので、次の記号の出現確率を表す。

31

$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}\boldsymbol{P}$ の意味。

$$(P(s_1),\cdots,P(s_n))=(P(s_1),\cdots,P(s_n))\begin{bmatrix} P(s_1\mid s_1) & P(s_2\mid s_1) & \cdots & P(s_n\mid s_1) \\ P(s_1\mid s_2) & P(s_2\mid s_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(s_1\mid s_n) & \cdots & \cdots & P(s_n\mid s_n) \end{bmatrix}$$

情報理論では、慣用的に確率ベクトルは行ベクトルで表される。

$${}^t\boldsymbol{z}={}^t\boldsymbol{P}\,{}^t\boldsymbol{z}$$ 転置を用いて左式のようにも表せる。

$$\begin{pmatrix} P(s_1) \\ P(s_2) \\ \vdots \\ P(s_n) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} P(s_1\mid s_1) & P(s_1\mid s_2) & \cdots & P(s_1\mid s_n) \\ P(s_2\mid s_1) & P(s_2\mid s_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(s_n\mid s_1) & \cdots & \cdots & P(s_n\mid s_n) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} P(s_1) \\ P(s_2) \\ \vdots \\ P(s_n) \end{pmatrix}$$

32

定常分布例

情報源アルファベット$B=\{0,1\}$ に対する2元マルコフ情報源の状態遷移確率関数が次式で与えられている。

$$P=\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

このとき、定常分布 $\boldsymbol{z}=(z_0,z_1)=(P(0),P(1))$ を求めよ。

解）

$$(z_0,z_1)=(z_0,z_1)\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

より、

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

33

$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{4}z_0=\frac{2}{3}z_1 \\ \frac{2}{3}z_1=\frac{3}{4}z_0 \end{cases}$$

全ての行ベクトルが確率ベクトルなので遷移確率行列は正則でなく逆行列を持たない。
よって、このように必ず不定の解になる。

$$\therefore 9z_0=8z_1$$

一方、$\boldsymbol{z}$ は確率ベクトルなので、

$$z_0+z_1=1$$

前のスライドとこの式から求める。

が成り立つ。

$$\therefore z_0+\frac{9}{8}z_0=1$$

$$\therefore z_0=\frac{8}{17}$$

$$\therefore z_1=\frac{9}{17}$$

検算

$$\begin{pmatrix} 8/17 & 9/17 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2/17+6/17 & 6/17+9/17 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8/17 & 9/17 \end{pmatrix}$$

34

練習

次の状態遷移確率行列で表される情報源の定常分布を求めよ。

（1） $$P_1=\begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

（2） $$P_2=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

35

無記憶情報源における定常分布

無記憶情報源における定常分布は、出現確率と一致する。

無記憶情報源が次式で表されているとする。

$$S=\begin{Bmatrix} s_1 & , & \cdots & , & s_n \\ P(s_1) & , & \cdots & , & P(s_n) \end{Bmatrix}$$

このとき、状態遷移確率行列は次式で表される。

$$P=\begin{bmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{bmatrix}$$

すべての行が同一な状態遷移行列。
逆に、このような行列で表される情報源が無記憶情報源。

36

$$\begin{pmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(s_1)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(s_i)}_{1} & \cdots & P(s_n)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(s_i)}_{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{pmatrix}$$

37

マルコフ情報源の随伴(無記憶)情報源

定義:随伴情報源

マルコフ情報源 S の定常分布を確率分布とするような無記憶情報源を元のマルコフ情報源の**随伴情報源** $\overline{S}$ という。

例　情報源アルファベット $B = \{0,1\}$ を持ち、状態遷移確率行列が

$$P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

で表されるマルコフ情報源を S_B とする。
このとき、随伴情報源 $\overline{S_B}$ は次式で表される。

$$\overline{S_B} = \begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ 8/17 & , & 9/17 \end{Bmatrix}$$

38

マルコフ情報源のエントロピー

定義:マルコフ情報源のエントロピー

マルコフ情報源 S に対して、S を条件とする S の条件付きエントロピー $H(S \mid S)$ を**マルコフ情報源のエントロピー**という。

$$H(S \mid S) = \sum_{s_i \in S} P(s_i) H(S \mid s_i)$$
$$= -\sum_{s_i \in S} P(s_i) \sum_{s_j \in S} P(s_j \mid s_i) \log P(s_j \mid s_i)$$
$$= -\sum_{s_i, s_j \in S} P(s_i) P(s_j \mid s_i) \log P(s_j \mid s_i)$$
$$= -\sum_{s_i, s_j \in S} P(s_j, s_i) \log P(s_j \mid s_i)$$

39

マルコフ情報源のエントロピー例

状態遷移確率行列 $P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

で定まるマルコフ情報源 S_B のエントロピーを求める。

まず、定常分布 z は以下で与えられる。

$$z = (P(0), P(1)) = \left(\frac{8}{17}, \frac{9}{17}\right)$$

状態0におけるエントロピー(0を条件とする条件付きエントロピー)
$H(S_B \mid 0)$ および状態1におけるエントロピー $H(S_B \mid 1)$
を求める。

40

$$H(S_B \mid 0) = -P(0 \mid 0)\log P(0 \mid 0) - P(1 \mid 0)\log P(1 \mid 0)$$
$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\simeq 0.811$$

0の時のエントロピー

$$H(S_B \mid 1) = -P(0 \mid 1)\log P(0 \mid 1) - P(1 \mid 1)\log P(1 \mid 1)$$
$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\simeq 0.918$$

1の時のエントロピー

$$\therefore H(S_B \mid S_B) = P(0)H(S_B \mid 0) + P(1)H(S_B \mid 1)$$
$$= \frac{8}{17}\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{17}\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\simeq 0.382 + 0.486$$
$$= 0.868$$

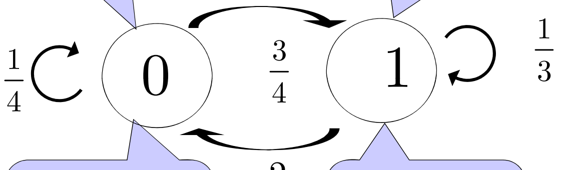
マルコフ情報源のエントロピー

41

マルコフ情報源のエントロピーの意味

$P(0)$
0状態の一種の存在確率

$P(1)$
1状態の一種の存在確率



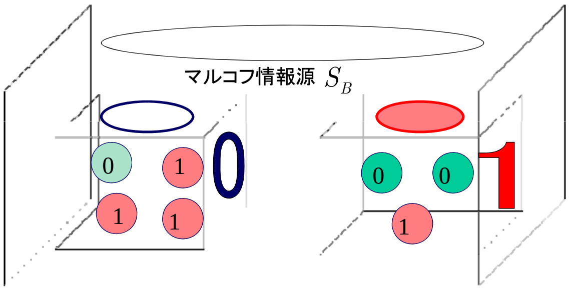
$H(S_B \mid 0)$
0状態において、記号出力に注目した平均情報量

$H(S_B \mid 1)$
1状態において、記号出力に注目した平均情報量

42

イメージ

0を取ったら次は0の箱から取り、1を取ったら次は1の箱からとる。取った玉は元に戻す。(前のスライドに対応する。)



43

練習

次の状態遷移確率行列で表される情報源のエントロピーを求めよ。

(1) $$P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(2) $$P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

44

マルコフ情報源のエントロピーの性質

マルコフ情報源 S に対して、随伴情報源を $\overline{S}$ とする。このとき、随伴情報源のエントロピーは、マルコフ情報源のエントロピー以上である。すなわち、次式が成り立つ。

$$H(S \mid S) \leq H(\overline{S})$$

出現確率は同じでも、マルコフ情報源の方は記号の現れ方に制限がある。(すなわち、記号の出現の予測が無記憶情報源比べて行いやすい。)したがって、マルコフ情報源の方が平均情報量が少なくなる。

45

随伴情報源のエントロピー例

$$P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$ の随伴情報源は

$$\overline{S_B} = \begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ 8/17 & , & 9/17 \end{Bmatrix}$$ である。

したがて、エントロピー $H(\overline{S_B})$ は次式で求められる。

$$H(\overline{S_B}) = \mathcal{H}\left(\frac{8}{17}\right) \simeq 0.997$$

$$\therefore 0.868 \simeq H(S_B \mid S_B) \leq H(\overline{S_B}) \simeq 0.997$$

46

練習

次の状態遷移確率行列で現されるマルコフ情報源の随伴情報源のエントロピーを求めよ。

(1) $$P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

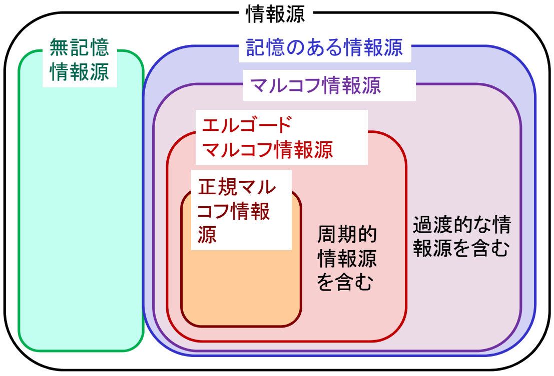
(2) $$P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

47

情報源の分類

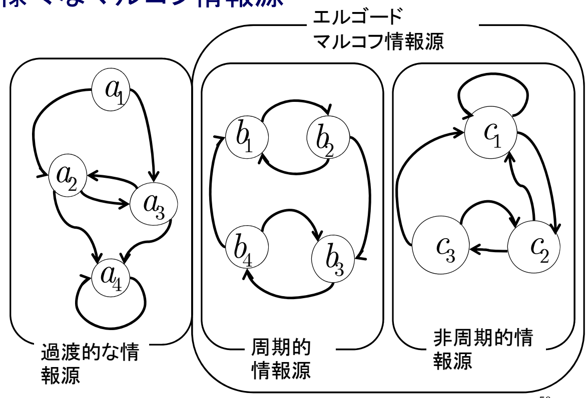
48

情報源の分類図



49

様々なマルコフ情報源



矢印には0より大きい確率が割り当てられている。

50

エルゴード性

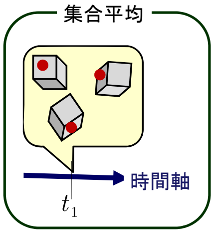
定義：エルゴード性

集合平均と時間平均が等しい性質を**エルゴード性**という。

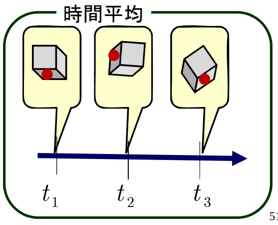
[集合平均]＝[時間平均]

エルゴード性を持つ情報源を**エルゴード情報源**という。

集合平均



時間平均



51

サイコロ D_i を振ったときの目を情報源と考えると、エルゴード性を満たす。

	t_1	t_2	$\cdots$	t_j	$\cdots$	t_T
D_1	3	2	$\cdots$	6	$\cdots$	1
D_2	2	4	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
D_i	5	3	$\cdots$	6	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
D_n	2	1	$\cdots$	4	$\cdots$	3

時間平均：1つのサイコロを何回も振ったときの平均

集合平均：1回に多数のサイコロを振ったときの平均

52

状態遷移行列による判別

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$p_{ij}=P(s_j \mid s_i)$

前の記号 s_i のときに次の記号 s_j を生成する確率。
添え字の順序に注意する。

$$P^t=\begin{bmatrix} p^{(t)}{}_{11} & p^{(t)}{}_{12} & \cdots & p^{(t)}{}_{1n} \\ p^{(t)}{}_{21} & p^{(t)}{}_{22} & \cdots & p^{(t)}{}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p^{(t)}{}_{n1} & \cdots & \cdots & p^{(t)}{}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$P^t=\underbrace{P\bullet P\bullet\cdots\bullet P}_{t\text{個}}$$

遷移を t 回繰り返すときの遷移確率。

53

過渡的なマルコフ情報源

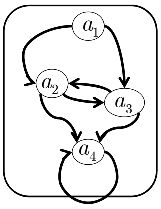
定義：過渡的な情報源

十分な時間経過の後に、生成確率がすべて0に収束するような状態を持つマルコフ情報源を**過渡的な情報源**という。

過渡的な情報源

⬍

$$\exists j, \forall i, \quad t \to \infty \Rightarrow p_{ij}{}^{(t)} \to 0$$



$$P=\begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{32} & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow P^t=\begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

過渡的

戻ってこれない状態がある。
⇔遷移を多数繰り返すと存在確率が0になる状態がある。

エルゴードマルコフ情報源

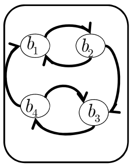
定義：エルゴード情報源

過渡的でない情報源をエルゴード情報源という。エルゴード情報源はエルゴード性を満たす。

エルゴード情報源

⬍

$$\forall i, j, \exists t_{ij}, \quad p_{ij}{}^{(t_{ij})} > 0$$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} \\ p_{41} & 0 & p_{43} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{t_o} = \begin{bmatrix} 0 & p^{(t_o)}{}_{12} & 0 & p^{(t_o)}{}_{14} \\ p^{(t_o)}{}_{21} & 0 & p^{(t_o)}{}_{23} & 0 \\ 0 & p^{(t_o)}{}_{32} & 0 & p^{(t_o)}{}_{34} \\ p^{(t_o)}{}_{41} & 0 & p^{(t_o)}{}_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

⬍

$$P^{t_e} = \begin{bmatrix} p^{(t_e)}{}_{11} & 0 & p^{(t_3)}{}_{13} & 0 \\ 0 & p^{(t_e)}{}_{22} & 0 & p^{(t_e)}{}_{24} \\ p^{(t_e)}{}_{31} & 0 & p^{(t_e)}{}_{33} & 0 \\ 0 & p^{(t_e)}{}_{42} & 0 & p^{(t_e)}{}_{44} \end{bmatrix}$$

周期的

正規マルコフ情報源

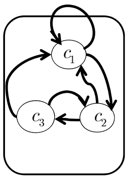
定義：エルゴード情報源

十分な時間経過後、各状態からすべての状態への遷移確率が0より大きいマルコフ情報源を正規マルコフ情報源という。

正規マルコフ情報源

⬍

$$\forall i, j, \exists t, \quad p_{ij}{}^{(t)} > 0$$



$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{bmatrix} p^{(t)}{}_{11} & p^{(t)}{}_{12} & p^{(t)}{}_{13} \\ p^{(t)}{}_{21} & p^{(t)}{}_{22} & p^{(t)}{}_{23} \\ p^{(t)}{}_{31} & p^{(t)}{}_{32} & p^{(t)}{}_{33} \end{bmatrix}$$

全ての確率は非零

56

練習

次の遷移行列で表わされるマルコフ情報源の種類が、
過渡的、周期的、正規マルコフ情報源のいずれかを答えよ。

（1）

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

57