

3.エントロピーの性質と各種情報量

1

エントロピーの性質

$$\text{事象系 } A = \left\{ \begin{matrix} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_n \\ P(a_1) & , & P(a_2) & , & \cdots & , & P(a_n) \end{matrix} \right\}$$

のエントロピーは次式で定義される。

$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) = -\sum_{k=1}^n P(a_k) \log P(a_k)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

ある事象が必ず起きるとき。

$$a_1 = 1, a_2 = \cdots = a_n = 0$$

全ての事象が等確率のとき。

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$$

前のスライドの式を導出するために、
次の2つの事象系を考える。

カンマ“,”は
“AND(かつ)”
の意味

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_n \\ P_1 & , & P_2 & , & \cdots & , & P_n \end{matrix} \right\}, \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$B = \left\{ \begin{matrix} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{matrix} \right\}, \quad \sum_{i=1}^n Q_i = 1$$

3

補題1 (lemma1)

$$-\sum_{i=1}^n P_i \log P_i \leq -\sum_{i=1}^n P_i \log Q_i$$

エントロピー

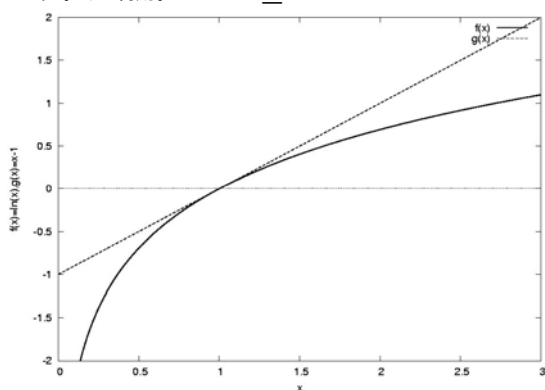
対数と係数の
違いに注意する。

証明

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= \sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \ln \frac{Q_i}{P_i} \end{aligned}$$

4

不等式の利用。 $\ln x \leq x - 1$



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \ln \frac{Q_i}{P_i} \\ &\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \left(\frac{Q_i}{P_i} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n (Q_i - P_i) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n Q_i}_{=1} - \underbrace{\sum_{i=1}^n P_i}_{=1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

この変形で、

$$x = \frac{Q_i}{P_i}$$

として n 回不等式を
利用する。

6

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} &\leq 0 \\ \therefore \sum_{i=1}^n \left(P_i \log \frac{1}{P_i} - P_i \log \frac{1}{Q_i} \right) &\leq 0 \\ \therefore -\sum_{i=1}^n (P_i \log P_i) + \sum_{i=1}^n (P_i \log Q_i) &\leq 0 \\ \therefore -\sum_{i=1}^n (P_i \log P_i) &\leq -\sum_{i=1}^n (P_i \log Q_i) \end{aligned}$$

QED

7

エントロピー最大となる情報源

定理1

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

証明 (左の不等号)

各 $i, (1 \leq i \leq n)$ に対して、次式が成り立つ。

$$0 \leq P(a_i) \leq 1$$

$$\therefore 1 \leq \frac{1}{P(a_i)}$$

$$\therefore 0 \leq -\log P(a_i)$$

よって、

$$H(A) = -\sum_{i=1}^n P(a_i) \log P(a_i) \geq 0$$

8

(右の不等号)

$$B = \left\{ \begin{matrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{matrix} \right\}$$

とおく。補題1より、

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n P_i \log P_i &\leq -\sum_{i=1}^n P_i \log Q_i \\ &= \sum_{i=1}^n P_i \log n \\ &= \log n \left(\sum_{i=1}^n P_i \right) \\ &= \log n \end{aligned}$$

QED

9

定理1より、全ての記号が均等に現れる情報源が最大のエントロピー(1記号あたりの平均情報量)を持つ。

しかし、実世界のアルファベットなどは、均等に現れない。



実世界の文章には、その分の冗長性が含まれている。
(実は、人間の理解においてある程度の冗長性があった方がよい。)

ある情報形態に対して、同じ情報量を持つより小さい(短い)情報表現を得ることを圧縮という。圧縮からもとの情報形態を得ることを解凍という。

10

練習

次の事象系のエントロピー(平均情報量)を求めよ。

(1)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

11

各種情報量

複数の事象系が互いに関係している場合に、それぞれの事象系に関する様々なエントロピー(平均情報量)が定義できる。

- 条件付きエントロピー
- 結合エントロピー
- 相互情報量

条件付き確率に基づいた平均情報量。

結合確率に基づいた平均情報量。

事象系同士の(情報量としての)関わりを表す。エントロピー、条件付きエントロピー、結合エントロピーにより定義される。

これらの情報量を例題を通じて調べたのちに、定義する。

12

例題

次のようなゲームを考える。

サイコロゲーム：

「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

この勝ち負けに関する情報を2つの事象系としてとらえる。

13

サイコロゲームの勝敗表

サイコロゲーム：「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

甲 \ 乙	1	2	3	4	5	6
1	△	○	○	○	○	○
2	×	△	○	○	○	○
3	×	×	△	○	○	○
4	×	×	×	△	○	○
5	×	×	×	×	△	○
6	×	×	×	×	×	△

○：勝ち
△：引分け
×：負け

14

サイコロゲームより次の2つの事象系を考える。

事象系A：甲の勝負に関する事象系

$$A = \left\{ \begin{matrix} \text{○} & , & \text{△} & , & \text{×} \\ \frac{15}{36} & , & \frac{6}{36} & , & \frac{15}{36} \end{matrix} \right\}$$

この2つの事象系は独立ではなく、互いに密接に関連している。

事象系B：甲のサイコロの目に関する事象系

$$B = \left\{ \begin{matrix} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{matrix} \right\}$$

15

補足1：条件付き確率

ある条件の下で事象がおこる確率を条件付き確率といい、 $P(\text{事象} | \text{条件})$ と表す。

甲が3を出している条件の下で、甲が勝つ確率。

甲 \ 乙	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3			△			
4			×			
5			×			
6			×			

$$P(\text{○} | 3) = \frac{2}{6}$$
$$P(\text{△} | 3) = \frac{1}{6}$$
$$P(\text{×} | 3) = \frac{3}{6}$$

16

補足2：同時確率（結合確率）

2つ以上の事象が同時におこる確率を同時確率（結合確率）という。

$P(\text{事象1}, \text{事象2})$ のように表す。

“And”の意味

甲が3を出してしかも勝つ確率。

甲 \ 乙	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3						
4						
5						
6						

$$P(\text{○} | 3) = \frac{2}{36}$$

分母に注意する。

17

補足3：独立な事象における同時確率（結合確率）

定義

事象1と事象2の同時確率がそれぞれの事象の確率の積で表わされるとき、事象1と事象2は独立であるという。

$P(\text{事象1}, \text{事象2}) = P(\text{事象1}) \cdot P(\text{事象2})$

事象系1と事象系2の任意の2つの事象が独立のときに、事象系1と事象系2は独立である。

事象系C：乙のサイコロの目に関する事象系

$$C = \left\{ \begin{matrix} \text{乙}=1 & , & \text{乙}=2 & , & \text{乙}=3 & , & \text{乙}=4 & , & \text{乙}=5 & , & \text{乙}=6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{matrix} \right\}$$

$$P(\text{甲}=3, \text{乙}=2) = P(\text{甲}=3) P(\text{乙}=2)$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{36}$$

事象系Bと事象系Cは独立。

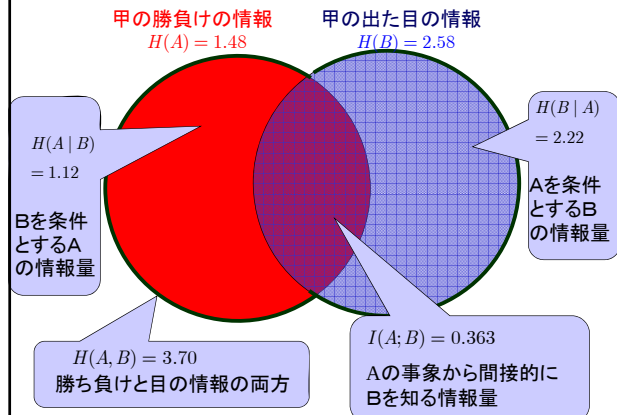
18

問題

確率を計算することにより、
事象系Aと事象系Bが独立でないことを示せ。

19

サイコロゲームにおける様々なエントロピー



条件付エントロピー1(条件付エントロピーの定義)

甲の出た目の事象系を条件とする、
甲の勝ち負けの事象系の平均情報量

$$H(A|\beta) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha|\beta) \log P(\alpha|\beta)$$

条件付確率で定義されるエントロピー

$$\begin{aligned} H(A|B) &= \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A|\beta) \\ &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|\beta) \log P(\alpha|\beta) \\ &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\alpha|\beta) \log P(\alpha|\beta) \\ &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha|\beta) \end{aligned}$$

Bを条件とすることによって、情報源Aの情報量がBと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

甲	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3			△			
4			×			
5			×			
6			×			

条件付エントロピーは、条件付き確率の平均の平均として定義される。条件を1度固定しエントロピーを計算し、すべての条件で平均を求める。

$$H(A|3) = -P(\bigcirc|3) \log P(\bigcirc|3) - P(\triangle|3) \log P(\triangle|3) - P(\times|3) \log P(\times|3)$$

$$H(A|B) = P(1)H(A|1) + P(2)H(A|2) + P(3)H(A|3) + P(4)H(A|4) + P(5)H(A|5) + P(6)H(A|6)$$

22

条件付エントロピー2

甲の勝ち負けの事象系を条件とする甲の目の事象系の平均情報量

$$H(B|\alpha) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) \log P(\beta|\alpha)$$

$$\begin{aligned} H(B|A) &= \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha) \\ &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) \log P(\beta|\alpha) \\ &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\alpha|\beta) \log P(\beta|\alpha) \\ &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta|\alpha) \end{aligned}$$

Aを条件とすることによって、情報源Bの情報量がAと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

23

甲	1	2	3	4	5	6
1		○	○	○	○	○
2			○	○	○	○
3				○	○	○
4					○	○
5						○
6						

$$P(3|\bigcirc) = \frac{2}{15}$$

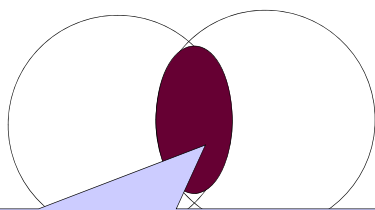
$$H(B|\bigcirc) = -P(1|\bigcirc) \log P(1|\bigcirc) - P(2|\bigcirc) \log P(2|\bigcirc) - P(3|\bigcirc) \log P(3|\bigcirc) - P(4|\bigcirc) \log P(4|\bigcirc) - P(5|\bigcirc) \log P(5|\bigcirc) - P(6|\bigcirc) \log P(6|\bigcirc)$$

$$H(B|A) = P(\bigcirc)H(B|\bigcirc) + P(\triangle)H(B|\triangle) + P(\times)H(B|\times)$$

24

相互情報量

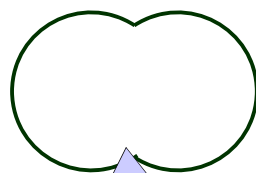
$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A) = I(B; A)$$



AとBが互いに関係している情報量。
Aを知ることによって、間接的にBに関する情報が得られる。
同様に、Bを知ることによって、間接的にAの情報が得られる。
これらは、等しい。

結合エントロピー(同時エントロピー)

$$H(A, B) = - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) = H(A) + H(B) - I(A; B)$$



α と β が同時に起こる確率。
結合確率。

$$\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) = 1$$

AとBがのすべての情報量。
Aだけの情報量と、Bだけの情報量を加えて、
関係する相互情報量を減ずる。

26

各種エントロピーの計算。

まず、2つの事象系のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned} H(A) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) \\ &= \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} + \frac{6}{36} \log \frac{36}{6} + \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} \\ &= \frac{5}{6} (\log 4 + \log 3 - \log 5) + \frac{1}{6} (\log 2 + \log 3) \\ &= \frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \\ &\simeq (1.833) + (1.585) - (1.93) \\ &= 1.4833 \dots \\ H(B) &= - \sum_{\beta \in B} P(\beta) \log P(\beta) \\ &= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 \\ &= \log 6 \\ &\simeq 2.5849 \dots \end{aligned}$$

27

次に、Bの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned} H(A|1) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|1) \log P(\alpha|1) \\ &= -P(\bigcirc|1) \log P(\bigcirc|1) - P(\triangle|1) \log P(\triangle|1) - P(\times|1) \log P(\times|1) \\ &= 0 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} \\ H(A|2) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|2) \log P(\alpha|2) \\ &= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} \\ H(A|3) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|3) \log P(\alpha|3) \\ &= \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} \end{aligned}$$

28

$$\begin{aligned} H(A|4) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|4) \log P(\alpha|4) \\ &= \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A|5) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|5) \log P(\alpha|5) \\ &= \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A|6) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|6) \log P(\alpha|6) \\ &= \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \log 6 + 0 \end{aligned}$$

29

以上より、事象系Bを条件とする、条件付エントロピー $H(A|B)$ が求められる。

$$\begin{aligned} H(A|B) &= \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A|\beta) \\ &= \frac{1}{6} H(A|1) + \frac{1}{6} H(A|2) + \frac{1}{6} H(A|3) + \frac{1}{6} H(A|4) + \frac{1}{6} H(A|5) + \frac{1}{6} H(A|6) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \log 6 + \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{6} \log 6 + \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{6} \log \frac{6}{3} + \frac{1}{6} \log 6 \right) + \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(3 \log 6 - \frac{5}{6} \log 5 - \frac{2}{3} \log 4 - \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{3} \log 2 \right) \\ &= \log 6 - \frac{5}{18} \log 5 - \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{5}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5 \\ &\simeq (0.444) + (1.321) - (0.645) \\ &= 1.12 \end{aligned}$$

30

今度は、逆にAの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned}
 H(B|\circ) &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\circ) \log P(\beta|\circ) \\
 &= -P(1|\circ) \log P(1|\circ) - P(2|\circ) \log P(2|\circ) - \dots - P(6|\circ) \log P(6|\circ) \\
 &= 0 + \frac{1}{15} \log 15 + \frac{2}{15} \log \frac{15}{2} + \frac{3}{15} \log \frac{15}{3} + \frac{4}{15} \log \frac{15}{4} + \frac{5}{15} \log \frac{15}{5} \\
 &= \log 15 - \frac{2}{15} \log 2 - \frac{3}{15} \log 3 - \frac{4}{15} \log 4 - \frac{5}{15} \log 5 \\
 &= \frac{12}{15} \log 3 + \frac{10}{15} \log 5 - \frac{10}{15} \\
 &= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

31

$$\begin{aligned}
 H(B|\triangle) &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\triangle) \log P(\beta|\triangle) \\
 &= 6 \times \frac{1}{6} \log 6 \\
 &= \log 6 \\
 H(B|\times) &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\times) \log P(\beta|\times) \\
 &= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

以上より、事象系Aを条件とする、条件付エントロピー $H(B|A)$ が求められる。

$$\begin{aligned}
 H(B|A) &= \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha) \\
 &= \frac{30}{36} \left(\frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{6} \log 6 \\
 &= \frac{5}{6} \log 3 + \frac{5}{9} \log 5 - \frac{7}{18} \\
 &\simeq (1.321) + (1.290) - (0.389) \\
 &= 2.221
 \end{aligned}$$

32

$$\begin{aligned}
 H(A) - H(A|B) &= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \right) - \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5 \right) \\
 &= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5 \\
 H(B) - H(B|A) &= \log 6 - \left(\frac{5}{6} \log 3 + \frac{5}{9} \log 5 - \frac{7}{18} \right) \\
 &= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5 \\
 \therefore I(A;B) &= H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A) \\
 &= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5 \\
 &\simeq (1.389) + (0.264) - (1.290) \\
 &= 0.363
 \end{aligned}$$

33

結合エントロピーを求めるためには、A、Bの積の事象系を考えても良い。サイコロゲームの勝敗表より以下の事象系が得られる。

$$(A,B) = \left\{ \begin{array}{cccccc} (\circ,1), & (\triangle,1), & (\times,1), & (\circ,2), & (\triangle,2), & (\times,2), \\ 0, & \frac{1}{36}, & \frac{5}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{4}{36}, \\ (\circ,3), & (\triangle,3), & (\times,3), & (\circ,4), & (\triangle,4), & (\times,4), \\ \frac{2}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{3}{36}, & \frac{3}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{2}{36}, \\ (\circ,5), & (\triangle,5), & (\times,5), & (\circ,6), & (\triangle,6), & (\times,6), \\ \frac{4}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{5}{36}, & \frac{1}{36}, & 0 \end{array} \right\}$$

34

$$\begin{aligned}
 H(A,B) &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) \\
 &= \frac{8}{36} \log 36 + \frac{4}{36} \log \frac{36}{2} + \frac{6}{36} \log \frac{36}{3} + \frac{8}{36} \log \frac{36}{4} + \frac{10}{36} \log \frac{36}{5} \\
 &= \frac{36}{36} \log 36 - \frac{1}{9} \log 2 - \frac{1}{6} \log 3 - \frac{2}{9} \log 4 - \frac{5}{18} \log 5 \\
 &= \frac{13}{9} + \frac{11}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5 \\
 H(A,B) &= H(A) + H(B) - I(A;B) \\
 &= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \right) + (\log 6) - \left(\frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5 \right) \\
 &= \frac{13}{9} + \frac{11}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5
 \end{aligned}$$

35

練習

コインゲームを考える。

「甲と乙がそれぞれコインを投げる。
表より裏が強いとする。」

このゲームを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系 (勝負):
「甲の勝負けを表す事象系」

事象系 (裏表):
「甲の出したコインの裏表を表す事象系」

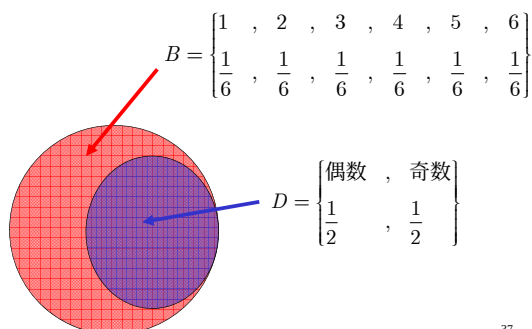
次の各種エントロピーを求めよ。

$H(\text{勝負}), H(\text{裏表}), H(\text{勝負}|\text{裏表}), H(\text{裏表}|\text{勝負}), I(\text{勝負}; \text{裏表})$

36

部分的な情報源

サイコロを投げて出た目に従って、以下の2つの情報源を考える。



37

$$H(B) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58 [\text{bit} / \text{記号}]$$

$$H(D) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1 [\text{bit} / \text{記号}]$$

$$H(B | \text{偶数}) = 0 + \frac{1}{3} \log 3 + 0 + \frac{1}{3} \log 3 + 0 + \frac{1}{3} \log 3 = \log 3$$

$$H(B | \text{奇数}) = \frac{1}{3} \log 3 + 0 + \frac{1}{3} \log 3 + 0 + \frac{1}{3} \log 3 + 0 = \log 3$$

$$H(B | D) = \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \log 3 = \log 3 \simeq 1.58 [\text{bit} / \text{記号}]$$

$$I(B; D) = H(B) - H(B | D) = 1 [\text{bit} / \text{記号}]$$

Dのエントロピーと等しい。

38

$$I(D; B) = H(D) - H(D | B)$$

$$\therefore H(D | B) = H(D) - I(D; B) = 0$$

Bを条件とすれば、Dに関する残された情報が無いことを意味する。すなわち、サイコロの目がわかれば、偶数か奇数かもわかる。

$$H(D | 1) = \underbrace{-1 \log 1}_{\text{奇数}} - \underbrace{0 \log 0}_{\text{偶数}} = 0$$

⋮

$$H(D | 6) = \underbrace{-0 \log 0}_{\text{奇数}} - \underbrace{1 \log 1}_{\text{偶数}} = 0$$

$$\therefore H(D | B) = \sum_{\alpha \in B} P(\alpha) H(D | \alpha) = 0$$

39

練習

試行T「トランプから1枚カードを引く」

この試行Tを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系 (数):

「引いたカードの数」

事象系 (絵札):

「引いたカードが絵札かどうか」

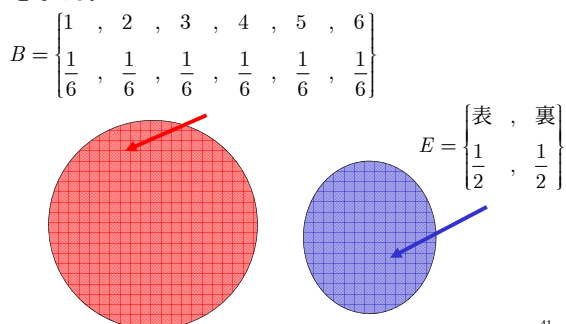
次の各種エントロピーを求めよ。

$H(\text{数}), H(\text{絵札}), H(\text{数} | \text{絵札}), H(\text{絵札} | \text{数}), I(\text{数}; \text{絵札})$

40

独立な情報源

サイコロを投げて得られる情報源と、コインを投げて得られる情報源を考える。



41

$$H(B) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58 [\text{bit} / \text{記号}]$$

$$H(E) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1 [\text{bit} / \text{記号}]$$

$$H(B | \text{表}) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(B | \text{裏}) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(B | E) = \frac{1}{2} \log 6 + \frac{1}{2} \log 6 = \log 6$$

$$I(B; E) = H(B) - H(B | E) = 0 [\text{bit} / \text{記号}]$$

コインの試行からは、サイコロに関する情報が得られないことを意味する。

42

$$I(E;B) = H(E) - H(E|B)$$

$$H(E|B) = H(E) - I(E;B) = \log 2 = 1[\text{bit / 記号}]$$

Bを条件としても、Eに関する平均情報量に変化がない。

43

練習

試行T「トランプから1枚カードを引く」

この試行Tを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系 (数):
「引いたカードの数」

事象系 (マーク):
「引いたカードがマーク」

次の各種エントロピーを求めよ。

$$H(\text{数}), H(\text{マーク}), H(\text{数}|\text{マーク}), H(\text{マーク}|\text{数}), I(\text{数};\text{マーク})$$

44