

線形符号(10章)

1

組織符号

組織符号

情報部分と検査部分(冗長部分)が明確に分離できる通信路符号を組織符号という。

組織符号は以下のように表現できる。

通信路符号=情報部分+検査部分

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_k}_{\text{情報部分}}, \underbrace{p_1, \dots, p_{n-k}}_{\text{検査部分}}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

2

2元(n,k)符号

2元(n,k)符号

符号アルファベットの大きさが2であり、符号長が n ビット、情報部分が k ビットの(通信路)符号を2元(n,k)符号という。

このとき、検査ビットは、当然 $n-k$ ビットである。

情報ビットから、検査ビットの作成には様々な方法が考えられる。この中で、情報ビットを線形写像して(行列演算で)検査ビットを作成する方法が応用上重要である。

線形符号

3

線形符号

線形符号

情報ビット $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ から、検査ビット $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n-k})$ を生成する定義式が、線形写像で表されるような通信路符号を線形符号という。

$$\begin{cases} p_1 = p_{11}x_1 + p_{21}x_2 \cdots + p_{k1}x_k \\ \vdots \\ p_{n-k} = p_{1(n-k)}x_1 + p_{2(n-k)}x_2 \cdots + p_{k(n-k)}x_k \end{cases}$$

4

情報・検査関連行列

線形符号では、検査ビットの定義式は以下のように行列の形で表現可能である。

$$\mathbf{p} = \mathbf{xP}$$

$$(p_1, \dots, p_{n-k}) = (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \end{bmatrix}$$

この行列 $\mathbf{P}$ を、情報・検査関連行列という。

5

生成行列

線形符号では、情報ビットから符号を行列を用いて表現可能である。

$$\mathbf{w} = \mathbf{xG}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{x} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix}$$

$$(w_1, \dots, w_n) = (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & p_{21} & p_{22} & & p_{2(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{k(n-k)} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{I}_k$ は $k \times k$ の単位行列

この行列 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ を、生成行列という。
(n,k) 符号では $k \times n$ 行列となる。

6

生成行列例

(7,4)ハミング符号は、線形符号である。したがって、情報ビットから、行列を用いて検査ビットおよび符号を構成可能である。この行列を示す。

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_7)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3)$$

$$= (\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

$$p_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$p_2 = x_2 + x_3 + x_4$$

$$p_3 = x_1 + x_2 + x_4$$

7

前のスライドより、(7, 4)ハミング符号の情報・検査関連行列 $\mathbf{P}_H$ および生成行列 $\mathbf{G}_H$ が以下のように表現できる。

$$\mathbf{P}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8

例

生成行列が以下で与えられるとする。

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき、以下の情報ビットから符号を生成せよ。

(1) $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, 1)$

(2) $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 1, 1)$

9

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{x}_1 \mathbf{G}_H$$

$$= (1, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{x}_2 \mathbf{G}_H$$

$$= (0, 1, 1, 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$$

10

練習

前のスライドの生成行列 $\mathbf{G}_H$ で符号を生成するとする。
このとき、次の情報ビットに対する符号を求めよ。

(1) $\mathbf{x}_1 = 0001$

(2) $\mathbf{x}_2 = 0110$

(3) $\mathbf{x}_3 = 1101$

(4) $\mathbf{x}_4 = 1110$

11

練習

垂直・水平パリティ符号は線形符号である。(9,4)垂直・水平符号に対して、情報・検査関連行列 $\mathbf{P}_O$ および生成行列 $\mathbf{G}_O$ を求めよ。

12

練習

前のスライドの生成行列 G_O で符号を生成するとする。
このとき、次の情報ビットに対する符号を求めよ。

- (1) $x_1 = 0001$
 (2) $x_2 = 0110$
 (3) $x_3 = 1101$
 (4) $x_4 = 1110$

13

検査行列

生成行列 $G = [I_k \ P]$ に対して、次の形の行列 H を
検査行列という。

$$H = [{}^t P \ I_{n-k}]$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{k1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{k2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{1(n-k)} & p_{2(n-k)} & \cdots & p_{k(n-k)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14

性質:検査行列

情報ビット $x = (x_1, \dots, x_k)$ に対して、生成行列 $G = [I_k \ P]$ で
符号 $w = (w_1, \dots, w_n)$ が生成されたとする。このとき、検査
行列 $H = [{}^t P \ I_{n-k}]$ に対して、次式が成り立つ。

$$w^t H = 0$$

$$\therefore (w_1, \dots, w_n) \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n-k}$$

15

証明

$w = xG$ であるので、 $w = x[I_k \ P]$

$$w^t H = x[I_k \ P]({}^t P \ I_{n-k})$$

$$= (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} p_{11} + p_{11} & p_{12} + p_{12} & \cdots & p_{1(n-k)} + p_{1(n-k)} \\ p_{21} + p_{21} & p_{22} + p_{22} & & p_{2(n-k)} + p_{2(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} + p_{k1} & p_{k2} + p_{k2} & \cdots & p_{k(n-k)} + p_{k(n-k)} \end{bmatrix}$$

16

$$\therefore w^t H = (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (0, 0, \dots, 0)$$

別証明

$$G^t H = [I_k \ P]({}^t P \ I_{n-k})$$

$$= [I_k \ P] \begin{bmatrix} P \\ I_{n-k} \end{bmatrix}$$

$$= P + P$$

$$= 0$$

QED

17

(7, 4)ハミング符号の生成行列 G_H および検査行列 H_H
は以下のように表現できる。

$$G_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18

実際、

$$G_H^t H_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19

練習

垂直・水平パリティ符号は線形符号である。(9,4)垂直
水平符号に対して、検査行列 H_O を求めよ。

また、 $G_O^t H_O = 0$ を確かめよ。

20

シンドローム

シンドローム

2元 (n, k) 線形符号の受信語が $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ であるとき、受信語から次式で定義される長さ $n-k$ の2元系列 $s = (s_1, \dots, s_{n-k})$ をシンドロームという。

$$s = y^t H$$

$$\therefore (s_1, \dots, s_{n-k}) = (y_1, \dots, y_n)$$

受信語の誤り位置を診断するための情報

$$\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

21

シンドロームの性質

$$s = y^t H$$

である。

一方、受信語 $y = (y_1, \dots, y_n)$ は符号語 $w = (w_1, \dots, w_n)$ と誤りベクトル $e = (e_1, \dots, e_n)$ を用いて次のように表現できる。

$$y = w + e$$

$$\therefore (y_1, \dots, y_n) = (w_1 + e_1, \dots, w_n + e_n)$$

したがって、シンドロームに関して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} s &= y^t H \\ &= (w + e)^t H \\ &= \underbrace{w^t H}_0 + e^t H \\ &= e^t H \end{aligned}$$

22

このように、実はシンドロームは誤りベクトルのみで定まる。
よって、以下が成り立つ。

$$s = 0 \longleftrightarrow \text{誤りなし}$$

$$s \neq 0 \longleftrightarrow \text{誤りあり}$$

シンドロームにより、
誤りそのものの検出 および
誤り位置の導出
が可能である。(1ビット誤り)

23

シンドロームを用いた誤り訂正

符号語より、シンドロームが $s = y^t H$ のように計算可能である。このシンドロームが検査行列の H の i 列と等しいとする。

このとき、シンドロームと誤りベクトルの関係式 $s = e^t H$ から、誤りベクトルは $e = (0, \dots, e_i = 1, \dots, 0)$ であり、送信符号は

$$w = y + e$$

$$\begin{aligned} \therefore (w_1, \dots, w_i, \dots, w_n) &= (y_1 + e_1, \dots, y_i + e_i, \dots, y_n + e_n) \\ &= (y_1, \dots, y_i + 1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

であることがわかる。

24

練習

以下の各系列は次の検査行列を持つ(7, 4)ハミング符号である。このとき、シンドロームを計算することにより、誤り訂正を行え。

$$H_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) $y_1 = 1110111$

(2) $y_2 = 0111101$

(3) $y_3 = 0101000$

(4) $y_4 = 0100110$

25

練習

垂直・水平パリティ符号は線形符号である。(9,4)垂直水平符号に対して、先ほど求めた検査行列 H_0 を求いてシンドローム $s = (s_1, s_2, \dots, s_5)$ を計算できる。

このシンドロームを用いて以下の符号の誤りを訂正せよ。

(1) $y_1 = 110100000$

(2) $y_2 = 011010011$

(3) $y_3 = 110101001$

(4) $y_4 = 000101010$

26

情報伝達モデル(複雑版)

The diagram illustrates a complex information transmission model. It starts with an '情報源' (Information Source) on the left, which feeds into '情報源符号化 (5, 6章)' (Source Coding). This is followed by '通信路符号化 (8章)' (Channel Coding). The signal then enters the '通信路 (7章)' (Communication Channel), which is affected by '外乱(雑音)' (Interference/Noise). After the channel, the signal goes through '通信路復号化 (8章)' (Channel Decoding) and finally '情報源復号化 (5, 6章)' (Source Decoding) to reach the '受信者' (Receiver) on the right. The diagram also includes '情報' (Information) at the top and '値表現 (2)' (Value Representation) in the middle of the coding/decoding blocks.

27

5