# 情報理論レポート課題 7 解答例

通信において高々１ビットしか誤らない場合の誤り訂正符号（通信路符号の一種）として、I）垂直水平パリティ符号と II)ハミング符号を考える。以下の設問に答えよ。

I　垂直水平パリティ符号

$(9,4)$ 垂直水平パリティ符号は以下のように定義される。

$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$

ここで、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ は情報ビットであり、$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ は次式で定義される冗長ビットである。

$p_1 = x_1 \oplus x_2,\quad p_2 = x_3 \oplus x_4,\quad p_3 = x_1 \oplus x_3,\quad p_4 = x_2 \oplus x_4,\quad p_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$

1　次の系列 $\boldsymbol{x}_i, 1 \le i \le 3$ を情報ビットとする $(9,4)$ 垂直水平パリティ符号語 $\boldsymbol{w}_i$ および復号領域 $\Omega_i$ を求めよ。

垂直水平パリティ符号の定義を、便宜上以下下のように記述する。

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & p_1 \\ x_3 & x_4 & p_2 \\ \hline p_3 & p_4 & p_5 \end{array}$$

このとき、情報ビットが“右上”の $2\times2$ 部分行列に記述され、冗長ビットがその周りに記述される。各冗長ビットは、対応する行または列で排他的論理和（XOR）演算することで求められる。

また、高々１ビット誤る場合の誤りベクトルを以下に列挙する。

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
e_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_2 & 0 & 1 & 0 & & & \cdots & & & 0 \\
e_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & 0 \\
e_4 & 0 & & 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots & 0 \\
e_5 & 0 & \vdots & & 0 & 1 & 0 & & & 0 \\
e_6 & 0 & & & \ddots & 0 & 1 & 0 & & 0 \\
e_7 & 0 & & & \cdots & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
e_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
e_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
e_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

このとき、復号領域は、$\Omega_i = \left\{ w_i \oplus e_j \mid 0 \le j \le 9 \right\}$ で求められる。

1　次の系列 $\boldsymbol{x}_i, 1 \le i \le 3$ を情報ビットとする $(9,4)$ 垂直水平パリティ符号語 $\boldsymbol{w}_i$ および復号領域 $\Omega_i$ を求めよ。

(1)　$\boldsymbol{x}_1 = 0000$

$$
\begin{array}{cc|c}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0
\end{array}
$$

と記述できる。

よって、$w_1$ と $\Omega_1$ は次のように求められる。

$$w_1 = 0000\ 00000$$

$$\Omega_1 = \left\{ 0000\ 00000 \oplus e_j \mid 0 \le j \le 9 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0000\ 00000, 1000\ 00000, 0100\ 00000, 0010\ 00000, 0001\ 00000, \\ 0000\ 10000, 0000\ 01000, 0000\ 00100, 0000\ 00010, 0000\ 00001 \end{array} \right\}$$

(2) $\boldsymbol{x}_2 = 1000$

$$
\begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 1
\end{array}
$$

と記述できる。

よって、$w_2$ と $\Omega_2$ は次のように求められる。

$$w_2 = 1000\ 10101$$

$$\Omega_2 = \left\{ 1000\ 10101 \oplus e_j \mid 0 \le j \le 9 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1000\ 10101, 0000\ 10101, 1100\ 10101, 1010\ 10101, 1001\ 10101, \\ 1000\ 00101, 1000\ 11101, 1000\ 10001, 1000\ 10111, 1000\ 10100 \end{array} \right\}$$

(3) $\boldsymbol{x}_3 = 1001$

$$
\begin{array}{cc|c}
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0
\end{array}
$$

と記述できる。

よって、$w_3$ と $\Omega_3$ は次のように求められる。

$$w_3 = 100111110$$

$$\Omega_3 = \left\{ 100111110 \oplus e_j \mid 0 \le j \le 9 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 100111110, 000111110, 110111110, 101111110, 1000\ 11110, \\ 1001\ 01110, 100110110, 100111010, 100111100, 100111111 \end{array} \right\}$$

2　次の系列 $\boldsymbol{y}_j, 4 \le j \le 6$ は、垂直水平パリティ符号の受信符号語 $\boldsymbol{y}_j$ である。各受信符号 $\boldsymbol{y}_j$ に対して誤りを訂正し、正しい送信符号語 $\boldsymbol{w}_j$ および情報ビット $x_j$ を求めよ。

(4)　$\boldsymbol{y}_4 = 011110101$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

のように記述でき、水平および垂直方向に誤りが無い。

よって、$w_4 = y_4 = 011110101,\quad x_4 = 0111$ である。

(5)　$\boldsymbol{y}_5 = 010011000$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & \langle 1 \rangle \\ \hline 0 & \langle 0 \rangle & 0 \end{array}$$

のように記述できる。ここで、冗長ビット（検査ビット）に矛盾がある箇所を＜＞で表し、誤っているビットを枠で囲で示している。

よって、左から４ビット目が誤っており、$w_5 = y_5 \oplus e_4 = 010111000,\quad x_5 = 0101$ である。

(6)　$\boldsymbol{y}_6 = 110100101$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \langle 0 \rangle \\ \hline 1 & 0 & \boxed{\langle 1 \rangle} \end{array}$$

のように記述できる。

よって、左から６ビット目がや誤っており、$w_6 = y_6 \oplus e_6 = 110101101,\quad x_6 = 1101$ である。

3　(12,6) 垂直水平パリティ符号を定義せよ。

ヒント：$2 \times 3$ の形に情報ビットを配置して、冗長ビットの定義式を求める。

$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$

とする。

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & p_1 \\ x_4 & x_5 & x_6 & p_2 \\ \hline p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array}$$

と縦横に配置し、各行および各列で排他的論理和をとる。

したがって、以下のように検査ビットを定義すればよい。

$p_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,$
$p_2 = x_4 \oplus x_5 \oplus x_6,$
$p_3 = x_1 \oplus x_4,$
$p_4 = x_2 \oplus x_5,$
$p_5 = x_3 \oplus x_6,$
$p_6 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4, \oplus x_5 \oplus x_6$

4　(9,4)垂直水平パリティ符号および(12,6)垂直水平パリティ符号の情報速度を求めよ。

情報速度＝$\dfrac{\text{情報ビット数}}{\text{符号ビット数}}$である。
よって、(9,4)垂直水平パリティ符号の情報速度は、

$$\frac{4}{9} \simeq 0.444 \quad \left[ bit / \text{通信路記号} \right]$$

である。
また、(12,6)垂直水平パリティ符号の情報速度は、

$$\frac{6}{12} = 0.5 \quad \left[ bit / \text{通信路記号} \right]$$

である。

II ハミング符号

(7,4) のハミング符号を以下のように表す。

$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3)$

ここで、 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ は情報ビットであり、 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ は冗長ビットである。各冗長ビットは次式で定義する。

$p_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\quad p_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4,\quad p_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$

このとき、以下の問いに答えよ。

1 次の系列 $\boldsymbol{x}_i$ を情報ビットとする (7,4) ハミング符号語 $\boldsymbol{w}_i$ および復号領域 $\Omega_i$ を求めよ。

各冗長ビットを定義式により計算し符号語を求める。

また、高々１ビット誤る場合の誤りベクトルを以下に列挙する。

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
e_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
e_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
e_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

このとき、復号領域は、 $\Omega_i = \left\{ w_i \oplus e_j \mid 0 \le j \le 7 \right\}$ で求められる。

このとき、復号領域は、 $\Omega_i = \left\{ w_i \oplus e_j \mid 0 \le j \le 8 \right\}$ で求められる。

(1) $\boldsymbol{x}_1 = 0000$

$\boldsymbol{w}_1 = (x^1{}_1, x^1{}_2, x^1{}_3, x^1{}_4, p^1{}_1, p^1{}_2, p^1{}_3)$ とする。

$p_1^1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0,$

$p_2^1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0,$

$p_3^1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

$\therefore \boldsymbol{w}_1 = 0000\,000$

$\Omega_1$ は次のように求められる。

$$\Omega_1 = \left\{ 0000\,000 \oplus e_j \mid 0 \le j \le 7 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0000\,000, 1000\,000, 0100\,000, 0010\,000, 0001\,000, \\ 0000\,100, 0000\,010, 0000\,001 \end{array} \right\}$$

(2) $\boldsymbol{x}_2 = 1000$

$\boldsymbol{w}_2 = (x^2{}_1, x^2{}_2, x^2{}_3, x^2{}_4, p^2{}_1, p^2{}_2, p^2{}_3)$ とする。

$p_1^2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1,$
$p_2^2 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0,$
$p_3^2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$
$\therefore \boldsymbol{w}_2 = 1000\,101$

$\Omega_2$ は次のように求められる。

$$\Omega_2 = \left\{1000\,101 \oplus e_j \mid 0 \le j \le 7\right\}$$
$$= \begin{cases} 1000\,101, 0000\,101, 1100\,101, 1010\,101, 1001\,101, \\ 1000\,001, 1000\,111, 1000\,100 \end{cases}$$

(3)　$\boldsymbol{x}_3 = 1001$
$\boldsymbol{w}_3 = (x^3{}_1, x^3{}_2, x^3{}_3, x^3{}_4, p^3{}_1, p^3{}_2, p^3{}_3)$ とする。
$p_1^3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1,$
$p_2^3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1,$
$p_3^3 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$
$\therefore \boldsymbol{w}_3 = 1001110$

$\Omega_3$ は次のように求められる。

$$\Omega_3 = \left\{1001110 \oplus e_j \mid 0 \le j \le 7\right\}$$
$$= \begin{cases} 1001110, 0001110, 1101110, 1011110, 1000\,110, \\ 1001\,010, 1001100, 1001111 \end{cases}$$

2 次の系列 $\boldsymbol{y}_j$，　$4 \le j \le 6$ は、　(7,4)ハミング符号として送信された符号語の受信符号語 $\boldsymbol{y}_j$ である。各受信符号 $\boldsymbol{y}_j$ に対して誤りを訂正し、正しい送信符号語 $\boldsymbol{w}_i$ を求めよ。
シンドローム $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ を求め、誤りベクトル $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ を特定する。
各シンドロームは、ハミング符号の定義より、次式で求められる。

$s_1 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_5$
$s_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 \oplus y_6$
$s_3 = y_1 \oplus y_2 \oplus y_4 \oplus y_7$

また、誤りベクトルとシンドロームの対応表は次のようになる。

| $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(4)　$\boldsymbol{y}_4 = 0101\,010$

$\boldsymbol{y}_4 = (y_1^4, y_2^4, y_3^4, y_4^4, y_5^4, y_6^4, y_7^4)$ とし、シンドロームを $\boldsymbol{s}_4 = (s_1^4, s_2^4, s_3^4)$ とし、誤りベクトルを $\boldsymbol{e}^4 = (e_1^4, e_2^4, e_3^4, e_4^4, e_5^4, e_6^4, e_7^4)$ とする。

$s_1^4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1,$

$s_2^5 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$

$s_3^5 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$

よって、表より誤りベクトルは $\boldsymbol{e}^4 = \boldsymbol{e}_3 = 0010\,000$ と特定できる。

$\therefore \boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{y}_4 \oplus \boldsymbol{e}^4 = 0101\,010 \oplus 0010\,000 = 0111\,010$

よって、$w_4 = 0111\,010, \quad x_4 = 0111$ である。

(5)　$\boldsymbol{y}_5 = 0101\,100$

$\boldsymbol{y}_5 = (y_1^5, y_2^5, y_3^5, y_4^5, y_5^5, y_6^5, y_7^5)$ とし、シンドロームを $\boldsymbol{s}_5 = (s_1^5, s_2^5, s_3^5)$ とし、誤りベクトルを $\boldsymbol{e}^5 = (e_1^5, e_2^5, e_3^5, e_4^5, e_5^5, e_6^5, e_7^5)$ とする。

$s_1^5 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$

$s_2^5 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$

$s_3^5 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$

よって、表より誤りベクトルは $\boldsymbol{e}^5 = \boldsymbol{e}_0 = 0000\,000$ と特定できる。

$\therefore \boldsymbol{w}_5 = \boldsymbol{y}_5 \oplus \boldsymbol{e}^5 = 0101\,100 \oplus 0000\,000 = 0101\,100$

よって、$w_5 = 0101\,100, \quad x_5 = 0101$ である。

(6)　$\boldsymbol{y}_6 = 1101\,000$

$\boldsymbol{y}_6 = (y_1^6, y_2^6, y_3^6, y_4^6, y_5^6, y_6^6, y_7^6)$ とし、シンドロームを $\boldsymbol{s}_6 = (s_1^6, s_2^6, s_3^6)$ とし、誤りベクトルを $\boldsymbol{e}^6 = (e_1^6, e_2^6, e_3^6, e_4^6, e_5^6, e_6^6, e_7^6)$ とする。

$s_1^6 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0,$

$s_2^6 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$

$s_3^6 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$

よって、表より誤りベクトルは$\boldsymbol{e}^6 = \boldsymbol{e}_7 = 0000\,001$と特定できる。

$\therefore \boldsymbol{w}_6 = \boldsymbol{y}_6 \oplus \boldsymbol{e}^6 = 1101\,000 \oplus 0000\,001 = 1101\,001$

よって、$w_6 = 1101\,001,\quad x_6 = 1101$である。

3. (15,11) のハミング符号を定義せよ。

ヒント：誤りベクトルを考察し、シンドロームの定義式を求め、冗長ビットの定義式を導く。

(15,11) のハミング符号を以下のように表す。

$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$

$= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, p_1, p_2, p_3, p_4)$

このとき、誤りベクトル$\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15})$とシンドローム$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$の対応関係を次の表のように定義する。（まず、検査ビットと誤りベクトルの後半部分を対応させる。次に、残りの２進数を重複することなく、かつあますことなく割り当てる。なお、この対応関係は一通りではなく、多数の定義が可能である。）

| $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_8$ | $e_9$ | $e_{10}$ | $e_{11}$ | $e_{12}$ | $e_{13}$ | $e_{14}$ | $e_{15}$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | | | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | | | | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | | | | | 0 | 1 | 0 | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | | | | | | 0 | 1 | 0 | | | | | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | | | | | | | 0 | 1 | 0 | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | | | | | | | | 0 | 1 | 0 | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | | | | | | | | | 0 | 1 | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

この一覧表より、シンドロームは次のように定義される。

$s_1 = e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus e_4 \oplus e_6 \oplus e_7 \oplus e_9 \oplus e_{12},$

$s_2 = e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus e_5 \oplus e_6 \oplus e_8 \oplus e_{10} \oplus e_{13},$

$s_3 = e_1 \oplus e_2 \oplus e_4 \oplus e_5 \oplus e_7 \oplus e_8 \oplus e_{11} \oplus e_{14},$

$s_4 = e_1 \oplus e_3 \oplus e_4 \oplus e_5 \oplus e_9 \oplus e_{10} \oplus e_{11} \oplus e_{15}$

これより、以下のように検査ビットを定義できる。

$$
\begin{aligned}
p_1 &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_9, \\
p_2 &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_8 \oplus x_{10}, \\
p_3 &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_{11}, \\
p_4 &= x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}
\end{aligned}
$$

4 (7,4)ハミング符号および(15,11)ハミング符号の情報速度を求めよ。

$$\text{情報速度} = \frac{\text{情報ビット数}}{\text{符号ビット数}}$$ である。

よって、(7,4)ハミング符号の情報速度は、

$$\frac{4}{7} \simeq 0.571 \quad \left[bit\,/\,\text{通信路記号}\right]$$

である。

また、(15,11)パリティ符号の情報速度は、

$$\frac{11}{15} \simeq 0.733 \quad \left[bit\,/\,\text{通信路記号}\right]$$

である。