

情報理論レポート課題 6(通信路符号化)解答例

提示：2009/12/16(水) 提出：2010/01/20(水)

1. 次の通信路行列 T_1 で定められる通信路について考える。

$$T_1 = \begin{bmatrix} q & 1-q & 0 \\ q & 0 & 1-q \\ 0 & q & 1-q \end{bmatrix}, \quad (0 \leq q \leq 1)$$

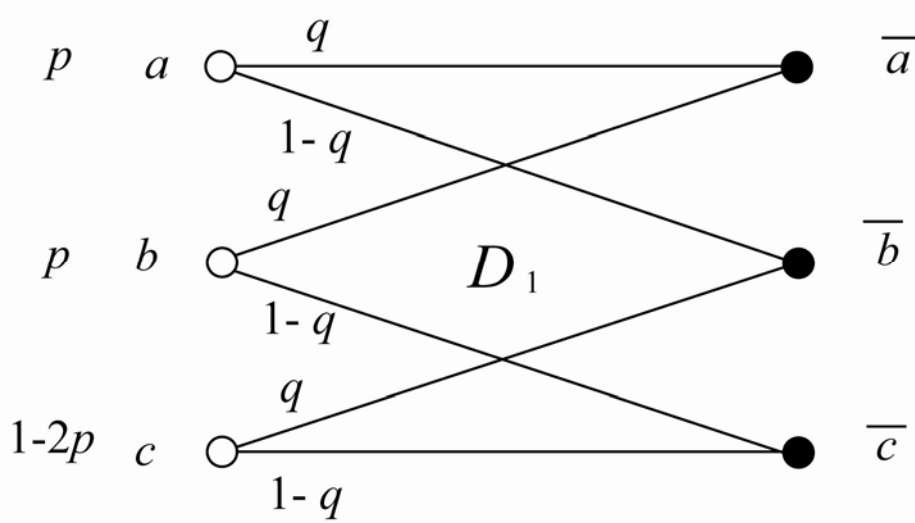
送信情報源 $A = \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ p & p & 1-2p \end{matrix} \right\}$, $\left(0 \leq p \leq \frac{1}{2}\right)$ から生成される記号を上通信路で

送信したとき、受信情報源

$$B = \left\{ \begin{matrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ P(\bar{a}) & P(\bar{b}) & P(\bar{c}) \end{matrix} \right\}$$

が得られたとする。このとき、以下の問に答えよ。

(1) の通信路の通信路線図 D_1 を描け。



(2) 各受信記号の受信確率 $P(\bar{a})$, $P(\bar{b})$, $P(\bar{c})$ を求めよ。

$$\begin{aligned} (P(\bar{a}), P(\bar{b}), P(\bar{c})) &= (P(a), P(b), P(c)) \begin{bmatrix} q & 1-q & 0 \\ q & 0 & 1-q \\ 0 & q & 1-q \end{bmatrix} \\ &= (p, p, 1-2p) \begin{bmatrix} q & 1-q & 0 \\ q & 0 & 1-q \\ 0 & q & 1-q \end{bmatrix} \\ &= (2pq, p(1-q) + (1-2p)q, p(1-q) + (1-2p)(1-q)) \\ &= (2pq, p+q-3pq, 1-p-q+pq) \end{aligned}$$

(3) $q = \frac{1}{2}$ のとき、伝送される情報量 $I(A; B)$ を確率 p を用いた式 $I(p)$ として求めよ。

$I(A; B) = H(B) - H(B|A)$ により求める。

$$\begin{aligned} H(B) &= -p \log p - \left(\frac{1-p}{2}\right) \log \left(\frac{1-p}{2}\right) - \left(\frac{1-p}{2}\right) \log \left(\frac{1-p}{2}\right) \\ &= -p \log p - (1-p) \log \left(\frac{1-p}{2}\right) \\ &= -p \log p - (1-p) \log(1-p) + (1-p) \\ &= \mathcal{H}(p) + 1 - p \end{aligned}$$

条件付きエントロピー $H(B = \beta | A = \alpha)$ は次のように求められる。

$$H(B|a) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1$$

$$H(B|b) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1$$

$$H(B|c) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore H(B|A) = P(a)H(B|a) + P(b)H(B|b) + P(c)H(B|c) = 1$$

以上より、

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H(B) - H(B|A) \\ &= \mathcal{H}(p) - p \end{aligned}$$

(4) $q = \frac{1}{2}$ のとき、 $I(p)$ の最大値 $I_{\max}$ および、その時の p の値を求めよ。

(以下の途中計算に間違いがありました。修正してあります。答えは配布資料でも合っていました。)

$$I(A; B) = -p \log p - (1-p) \log(1-p) - p$$

$$\frac{d}{dp} I(A; B) = -p \log p - (1-p) \log(1-p) - p$$

$$= -\frac{p}{\log_e 2} \log_e p + \frac{1-p}{\log_e 2} \log_e(1-p) - p$$

$$= -\frac{1}{\log_e 2} \log_e p - \frac{1}{\log_e 2} + \frac{1}{\log_e 2} \log_e(1-p) + \frac{1}{\log_e 2} - 1$$

$$= \frac{1}{\log_e 2} \log_e \frac{1-p}{p} - 1$$

$$\frac{d}{dp} I(A; B) = 0 \text{ より、}$$

$$\log_e \frac{1-p}{p} = \log_e 2$$

$$\therefore \frac{1-p}{p} = 2$$

$$\therefore p = \frac{1}{3}$$

よって、 $p = \frac{1}{3}$ のとき、 $I(p)$ は最大値 $I_{\max} = \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \approx 0.584$ [bit / 記号] になる。

このときには、 $A = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c \\ \frac{1}{3} & , & \frac{1}{3} & , & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\}$ の情報源を接続すれば、最大の情報が伝送できる。

(5) $q = \frac{1}{3}$ のとき、通信路容量 $C\left(T_1\big|_{q=\frac{1}{3}}\right)$ を求めよ。

上記と同様に、計算できる。

$$H(B) = -\frac{2p}{3} \log \frac{2p}{3} - \frac{1}{3} \log \frac{1}{3} - \left(\frac{2-2p}{3}\right) \log \left(\frac{2-2p}{3}\right)$$

$$H(B|a) = H(B|b) = H(B|c) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore H(B|A) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$I(A; B) = H(B) - H(B|A)$$

$$= \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} - \left(\frac{2p}{3}\right) \log \left(\frac{2p}{3}\right) - \left(\frac{2-2p}{3}\right) \log \left(\frac{2-2p}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left\{ p \log p - p \log \frac{3}{2} \right\} - \frac{2}{3} \left\{ (1-p) \log (1-p) - (1-p) \log \frac{3}{2} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \mathcal{H}(p)$$

よって、

$$C\left(T_1\Big|_{q=\frac{1}{3}}\right)=\max I(A;B)$$

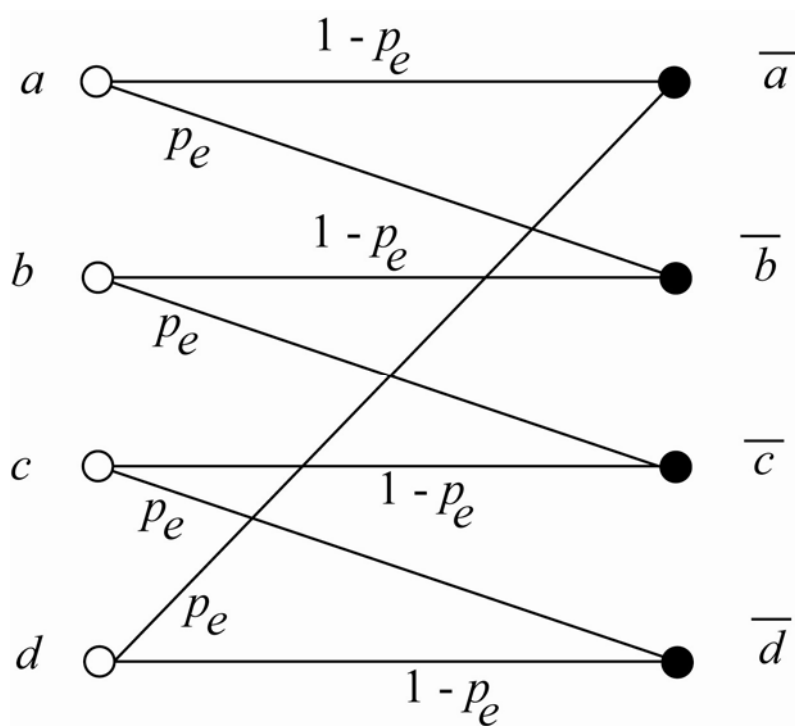
$$=\max\frac{2}{3}\mathcal{H}(p)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\because p=\frac{1}{2}\right)$$

より、 $C\left(T_1\Big|_{q=\frac{1}{3}}\right)=0.6667$ [bit / 記号] である。

この場合、 $A=\left\{\begin{matrix} a & , & b & , & c \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} & , & 0 \end{matrix}\right\}$ の情報源を接続すれば、最大の情報が伝送できる。

2. 次の通信路線図 D_2 で定められる通信路について考える。



ここで、 p_e は “ 隣 ” の記号へ誤る確率であり、 $0 \leq p_e \leq 1$ を満たす。

(1) この通信路の通信路行列 T_2 を求めよ。

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1-p_e & p_e & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_e & p_e & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_e & p_e \\ p_e & 0 & 0 & 1-p_e \end{bmatrix}$$

(2)この通信路の通信路容量 C_2 を求めよ。

$$H(B) = -P(\bar{a})\log P(\bar{a}) - P(\bar{b})\log P(\bar{b}) - P(\bar{c})\log P(\bar{c}) - P(\bar{d})\log P(\bar{d})$$

$$H(B|a) = H(B|b) = H(B|c) = H(B|d) = \mathcal{H}(p_e)$$

$$\therefore H(B|A) = \mathcal{H}(p_e)$$

この条件付きエントロピー $H(B|A) = \mathcal{H}(p_e)$ は、送信情報源によらず通信路の誤り確率 p_e

だけで定まる値である。よって、

$$C_2 = \max I(A; B)$$

$$= \max \{H(B) - H(B|A)\}$$

$$= \{\max H(B)\} - \mathcal{H}(p_e)$$

と計算できる。ここで、 $\max H(B)$ は受信記号の確率が全て等しいとき、すなわち

$$P(\bar{a}) = P(\bar{b}) = P(\bar{c}) = P(\bar{d}) = \frac{1}{4}$$

であるときに実現される。このとき、 $\max H(B) = \log 4 = 2$ の値をとる。以上より、

$$C_2 = 2 - \mathcal{H}(p_e) \quad [\text{bit / 記号}]$$

なお、通信路容量を実現する送信情報源は以下のようにして求められる。

$$(P(\bar{a}), P(\bar{b}), P(\bar{c}), P(\bar{d})) = (P(a), P(b), P(c), P(d))T_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} P(\bar{a}) \\ P(\bar{b}) \\ P(\bar{c}) \\ P(\bar{d}) \end{bmatrix} = {}^tT_2 \begin{bmatrix} P(a) \\ P(b) \\ P(c) \\ P(d) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p_e & 0 & 0 & p_e \\ p_e & 1-p_e & 0 & 0 \\ 0 & p_e & 1-p_e & 0 \\ 0 & 0 & p_e & 1-p_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(a) \\ P(b) \\ P(c) \\ P(d) \end{bmatrix}$$

この方程式と、 $P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$ を用いて、連立一次方程式を解く。

その結果、

$P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=\frac{1}{4}$ の解が得られる。よって、

$$A=\left\{ \begin{array}{cccc} a & , & b & , & c & , & d \\ \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

を送信情報源として通信路に接続すれば通信路容量と等しい情報を送信できる。