

情報理論レポート 4 (情報源符号) 解答例

提示：2009/11/25(水) 提出：2009/12/2(水)

1. 符号の特徴

次の情報源 S に対して、 $B = \{0,1\}$ を符号アルファベットとする 3 つの 2 元符号 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

を考える。

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} a & , & b & , & c & , & d & , & e & , & f \\ \frac{6}{24} & , & \frac{6}{24} & , & \frac{4}{24} & , & \frac{3}{24} & , & \frac{3}{24} & , & \frac{2}{24} \end{array} \right\}$$

$$\phi_1 = \{a \mapsto 000, b \mapsto 001, c \mapsto 010, d \mapsto 111, e \mapsto 110, f \mapsto 101\}$$

$$\phi_2 = \{a \mapsto 00, b \mapsto 01, c \mapsto 010, d \mapsto 11, e \mapsto 10, f \mapsto 101\}$$

$$\phi_3 = \{a \mapsto 00, b \mapsto 01, c \mapsto 100, d \mapsto 101, e \mapsto 110, f \mapsto 111\}$$

(1) メッセージ $M = \{deadface\}$ を、各符号 $\phi_i, 1 \leq i \leq 3$ を用いて符号化せよ。

次のようになる。

$$\phi_1(deadface) = 111110000111101000010110$$

$$\phi_2(deadface) = 111000111010001010$$

$$\phi_3(deadface) = 1011100010111100100110$$

(2) 各符号 $\phi_i, 1 \leq i \leq 3$ に対して、平均符号長 L_i を求めよ。

$$L_1 = 3 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{4}{24} + 3 \cdot \frac{3}{24} + 3 \cdot \frac{3}{24} + 3 \cdot \frac{2}{24} = 3 \quad [bit / 記号]$$

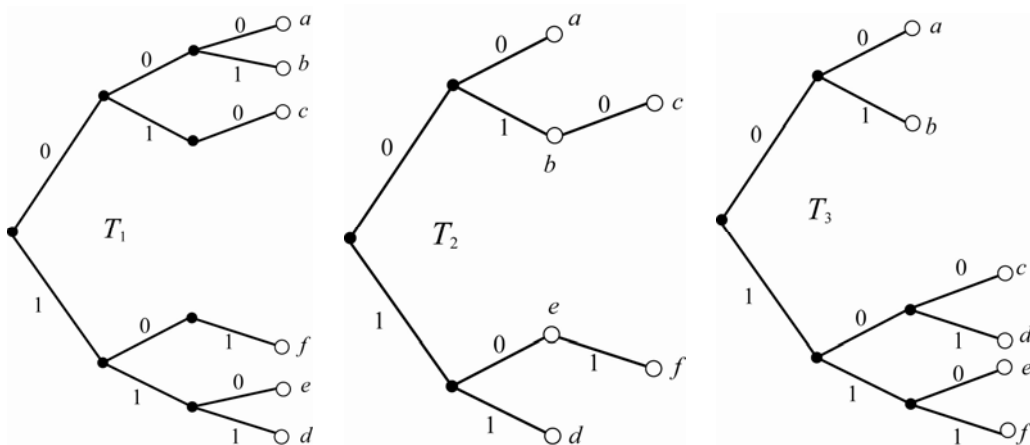
なお、符号 ϕ_1 は等長さなので、平均符号長は各符号の長さと等しい。

$$L_2 = 2 \cdot \frac{6}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{4}{24} + 2 \cdot \frac{3}{24} + 2 \cdot \frac{3}{24} + 3 \cdot \frac{2}{24} = 2.25 \quad [bit / 記号]$$

$$L_3 = 2 \cdot \frac{6}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{4}{24} + 3 \cdot \frac{3}{24} + 3 \cdot \frac{3}{24} + 3 \cdot \frac{2}{24} = 2.5 \quad [bit / 記号]$$

(3)各符号 $\phi_i, 1 \leq i \leq 3$ に対して、符号の木 T_i を図示せよ。

次のようになる。



(4) 各符号 $\phi_i, 1 \leq i \leq 3$ に対して、瞬時符号かどうかを判定せよ。

瞬時符号の判定では、各情報源記号が符号の木の葉にだけに割り当てられているかどうかを調べる。葉にだけ情報源記号が割り当てられていれば瞬時符号であり、葉以外に情報源記号が割り当てられていれば瞬時符号でない。よって、上の(3)により、次のように判定できる。

ϕ_1 は瞬時符号。なお、特異符号ではない等長符号は、必ず瞬時符号になる。よって、このことから、 ϕ_1 は瞬時符号であることが判別できる。

ϕ_2 は非瞬時符号。例えば、 $\phi_2(c) = 010$ の経路上に $\phi_2(b) = 01$ があり、情報源記号 b が葉以外に割り当てられている。

ϕ_3 は瞬時符号。情報源記号が全て符号の木 T_3 の葉に割り当てられている。

2. クラフトの不等式

1. の情報源 S に対する 2 元符号の符号長として次の 3 つを考える。

$$L_4 = \{2, 2, 3, 3, 4, 4\} \quad L_5 = \{2, 2, 2, 3, 3, 4\} \quad L_6 = \{1, 3, 3, 3, 4, 4\}$$

(1)各符号長 $L_j, 4 \leq j \leq 6$ に対して、クラフトの不等式を満たすか調べよ。

$L_4 = \{2, 2, 3, 3, 4, 4\}$ に関する計算。

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \sum_{l_i \in L} 2^{-l_i} \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} \\
 &= \frac{2^2 + 2^2 + 2^1 + 2^1 + 1 + 1}{2^4} \\
 &= \frac{14}{16} \leq 1
 \end{aligned}$$

よって、 L_4 はクラフトの不等式を満たす。

$L_5 = \{2, 2, 2, 3, 3, 4\}$ に関する計算。

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \sum_{l_i \in L} 2^{-l_i} \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \\
 &= \frac{2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^1 + 2^1 + 1}{2^4} \\
 &= \frac{17}{16} > 1
 \end{aligned}$$

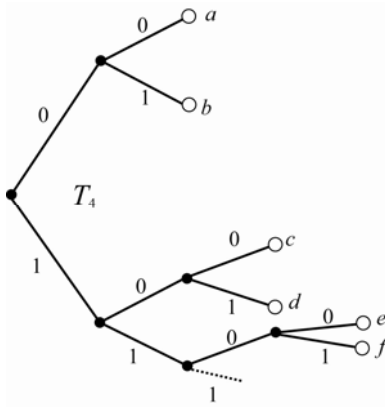
よって、 L_5 はクラフトの不等式を満たさない。

$L_6 = \{1, 3, 3, 3, 4, 4\}$ に関する計算。

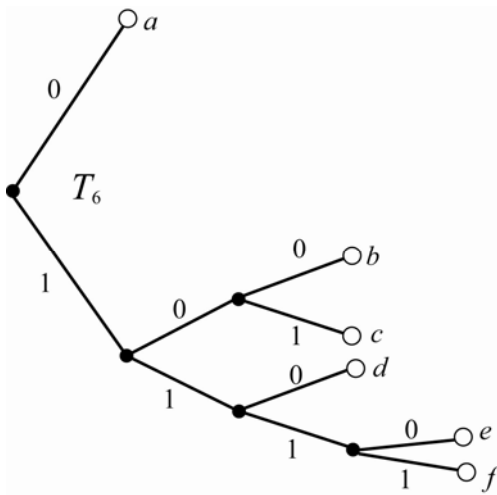
$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \sum_{l_i \in L} 2^{-l_i} \\
 &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} \\
 &= \frac{2^3 + 2^1 + 2^1 + 2^1 + 1 + 1}{2^4} \\
 &= \frac{16}{16} \leq 1
 \end{aligned}$$

よって、 L_6 はクラフトの不等式を満たす。

L_4 に関して例えば次のような符号の木が生成できる。



同様に、 L_6 に関して例えば次のような符号の木が生成できる。


$$\phi_6 = \{a \mapsto 0, b \mapsto 100, c \mapsto 101, d \mapsto 110, e \mapsto 1110, f \mapsto 1111\}$$

(3)構成した符号 ϕ_j に対して、符号の効率 e_j を求めよ。

符号 ϕ_4 と符号 ϕ_6 に関して符号の効率 e_4 と e_6 を求める。

まず、情報源のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned} H(S) &= -\sum_{\alpha \in S} P(\alpha) \log P(\alpha) \\ &= -\frac{6}{24} \log \frac{6}{24} - \frac{6}{24} \log \frac{6}{24} - \frac{4}{24} \log \frac{4}{24} - \frac{3}{24} \log \frac{3}{24} - \frac{3}{24} \log \frac{3}{24} - \frac{2}{24} \log \frac{2}{24} \\ &\simeq 2.48 \quad [\text{bit} / \text{記号}] \end{aligned}$$

次に各符号 ϕ_j の平均符号長 $\overline{L_j}$ を求める。

$$\overline{L_4} = 2 \cdot \frac{6}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{4}{24} + 3 \cdot \frac{3}{24} + 4 \cdot \frac{3}{24} + 4 \cdot \frac{6}{24} \simeq 2.71 \quad [\text{bit} / \text{記号}]$$

$$\overline{L_6} = 1 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{4}{24} + 3 \cdot \frac{3}{24} + 4 \cdot \frac{3}{24} + 4 \cdot \frac{6}{24} \simeq 2.71 \quad [\text{bit} / \text{記号}]$$

以上より、符号の効率は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} e_4 &= \frac{H(S)}{\overline{L_4}} \\ &\simeq \frac{2.48}{2.71} \\ &\simeq 0.91 \end{aligned}$$

$$e_6 = \frac{H(S)}{\overline{L_6}} \simeq 0.91$$

なお、符号 ϕ_1 と符号 ϕ_3 の効率はそれぞれ以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{H(S)}{\overline{L_1}} \\ &\simeq \frac{2.48}{3} \\ &\simeq 0.83 \end{aligned}$$

$$e_3 = \frac{H(S)}{L_3}$$

$$\simeq \frac{2.48}{2.5}$$

$$\simeq 0.99$$