

通信路(7章)

1

通信路のモデル

送信者

受信者

通信路

外乱(雑音)

送信情報源
(送信アルファベットと生成確率)

受信情報源
(受信アルファベットと受信確率)
 $m \neq n$ でもよい。

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$
 $P(a_1), \dots, P(a_n)$

$B = \{b_1, \dots, b_m\}$
 $P(b_1), \dots, P(b_m)$

2

イメージ

外乱(雑音)により
記号 a_i を送信したら、
記号 b_j が受信される。
記号の種類や数は異なっていて
もかまわない。

a_i を送信する。

通信路

b_j を受信する。

外乱(雑音)

$P(a_i \rightarrow b_j)$

3

通信路は、送信記号 a_i を送った時、受信記号 b_j が受信される確率 $P(a_i \rightarrow b_j)$ でモデル化される。すべての組み合わせの確率で一つの通信路が定義される。

$P(a_1)$ a_1 b_1 $P(b_1)$

$P(a_2)$ a_2 b_2 $P(b_2)$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$P(a_n)$ a_n b_m $P(b_m)$

$P(a_i \rightarrow b_j) = P(b_j | a_i)$

ある生成確率で、送信記号が送信される。

条件付き確率(順序に注意)

ある受信確率で、受信記号が受信される。

4

通信路線図

$\forall i, 1 \leq i \leq n,$
 $\sum_{j=1}^m P(a_i \rightarrow b_j) = 1$

雑音により、記号が変化する。

送信アルファベット
(n 個の送信記号の集合)

受信アルファベット
(m 個の受信記号の集合)

A

B

$P(a_1 \rightarrow b_1)$

$P(a_1 \rightarrow b_2)$

$P(a_1 \rightarrow b_m)$

$P(a_2 \rightarrow b_3)$

$P(a_n \rightarrow b_m)$

5

通信路行列

送信アルファベット

受信アルファベット

$\forall i, 1 \leq i \leq n,$
 $\sum_{j=1}^m t_{ij} = 1$
行で和をとると1。
(確率ベクトル)

$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & b_j & \dots & b_m \\ \vdots & t_{11} & \dots & t_{1j} & \dots & t_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_i & \vdots & & t_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_n & t_{n1} & \dots & \dots & \dots & t_{nm} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} P(a_1 \rightarrow b_1) & \dots & P(a_1 \rightarrow b_j) & \dots & P(a_1 \rightarrow b_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(a_i \rightarrow b_1) & \dots & P(a_i \rightarrow b_j) & \dots & P(a_i \rightarrow b_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(a_n \rightarrow b_1) & \dots & P(a_n \rightarrow b_j) & \dots & P(a_n \rightarrow b_m) \end{bmatrix}_6$

通信路行列(条件付き確率)

$$T = \begin{bmatrix} P(b_1|a_1) & \cdots & P(b_j|a_1) & \cdots & P(b_m|a_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P(b_1|a_i) & \cdots & P(b_j|a_i) & \cdots & P(b_m|a_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P(b_1|a_n) & \cdots & P(b_j|a_n) & \cdots & P(b_m|a_n) \end{bmatrix}$$

正方行列とは限らない。
(行数と列数が違っていても良い。)

$$\sum_{\beta} P(\beta | \alpha = a) = 1$$

条件付き確率の性質。
ある条件を固定したとき、確率の総和は1。

7

通信路行列の意味

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$t_{ij} = P(b_j | a_i) = P(a_i \rightarrow b_j)$$

通信路行列の要素

a_i を送る条件の下で、 b_j が受信される確率

a_i を送信したら、 b_j が受信される確率

通信路行列の関係式

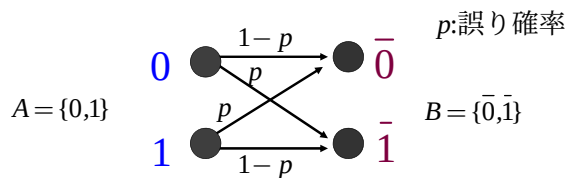
$$\forall i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \quad 0 \leq t_{ij} \leq 1$$

$$\forall i, 1 \leq i \leq n \quad \sum_{j=1}^m t_{ij} = 1$$

確率の式。
(行ベクトルが確率ベクトル)

8

通信路例1(2元対称通信路)



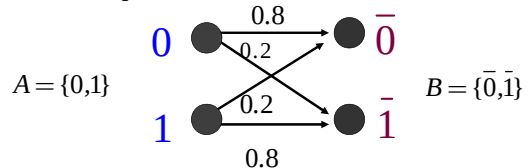
$$T_s = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

応用上重要。
誤り確率により、対称的に送信記号が変化する。

9

具体的な2元対称通信路

誤り確率 $p = 0.2$

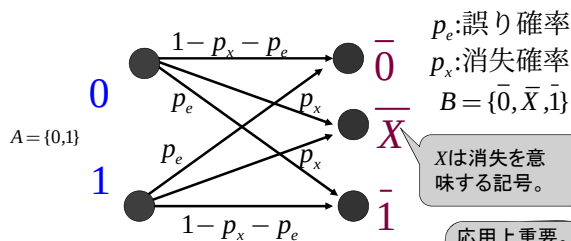


$$T_s = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

通信路行列は、対称行列になる。

10

通信路例2(2元対称消失通信路)



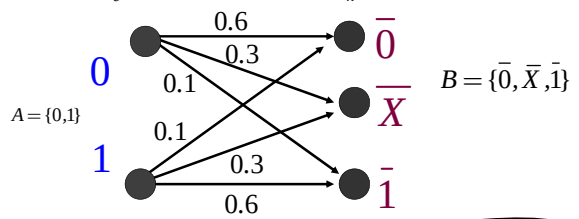
$$T_X = \begin{bmatrix} 1-p_x-p_e & p_x & p_e \\ p_e & p_x & 1-p_x-p_e \end{bmatrix}$$

応用上重要。
送信記号の消失と誤りの両方が起こる。

11

具体的な2元対称消失通信路

誤り確率 $p_e = 0.1$ 消失確率 $p_x = 0.3$



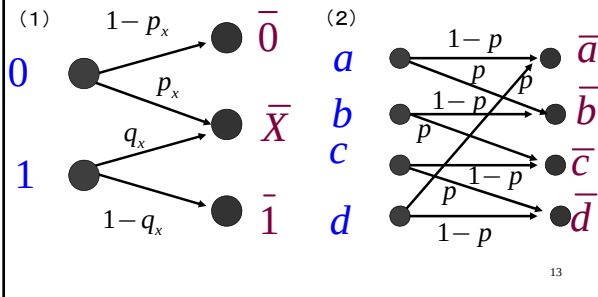
$$T_X = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

(数学的な対称行列ではないが) ある種の対称性が存在する。

12

練習

次の通信路線図で表されている通信路の、
通信路行列を求めよ。



練習2

次の通信路行列で表されている通信路の通信路
線図を示せ。

(1) 送信情報源 $A = \{a, b, c\}$ $T_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$
 受信情報源 $B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$

(2) 送信情報源 $A = \{a, b, c, d\}$
 受信情報源 $B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1-p-q & p & 0 & q \\ p & 1-p-q & q & 0 \\ 0 & p & 1-p-q & q \\ q & 0 & p & 1-p-q \end{bmatrix}$$

14

通信路での確率の関係1 (全確率の公式)

$$\forall j, 1 \leq j \leq m,$$

$$P(b_j) = \sum_{i=1}^n P(b_j | a_i) P(a_i)$$

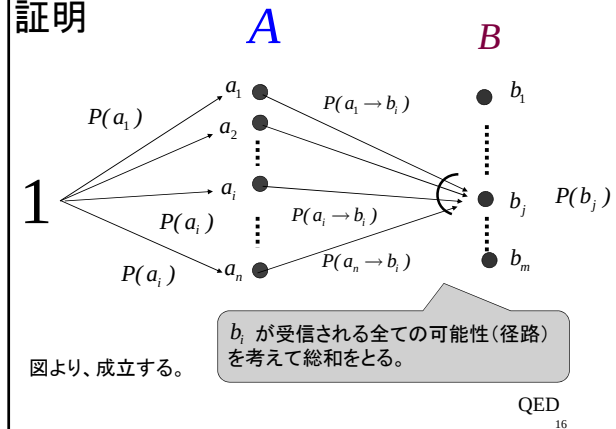
$$= \sum_{i=1}^n P(a_i) P(a_i \rightarrow b_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i t_{ij}$$

通信路を通して受信される
記号の受信確率は、送信記
号の生成確率と通信路の確
率の振る舞いで定まる。

15

証明



別証明

結合確率と条件付き確率の関係式。

$$(1) P(a_i, b_j) = P(b_j | a_i) P(a_i)$$

結合確率: 事象 a_i が起こりかつ
事象 b_j が起こる確率。
2つの事象が同時に起こる確率。

条件付き確率: 事象 a_i
が起こったとしたときに事
象 b_j が起こる確率。

結合確率による確率の計算

$$(2) P(b_j) = \sum_i P(a_i, b_j)$$

結合確率を片方の事象系において総和をとる。

(1)、(2)より成り立つ。

QED 17

通信路での確率の関係2(ベイズの定理)

ベイズの定理

$$\forall i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

$$P(a_i | b_j) = \frac{P(b_j | a_i) P(a_i)}{\sum_{k=1}^n P(b_j | a_k) P(a_k)}$$

条件付き確
率の条件と
発生事象を
交換する公
式。(一般の
確率論で成
立する。)

通信路を通して記号 b_j が受信されたとき、
送信側で記号 a_i を送っている確率が計算で
きることを表す式。通信路の性質と送信アルファ
ベットの発生確率は既知であることに注意する。

18

証明

結合確率の式

$$P(a_i, b_j) = P(b_j | a_i) P(a_i) = P(a_i | b_j) P(b_j)$$

$$\therefore P(a_i | b_j) = \frac{P(a_i, b_j)}{P(b_j)} = \frac{P(b_j | a_i) P(a_i)}{P(b_j)}$$

全確率の式を適用する。

$$\begin{aligned} \therefore P(a_i | b_j) &= \frac{P(a_i, b_j)}{\sum_{k=1}^n P(b_j | a_k) P(a_k)} = \frac{P(b_j | a_i) P(a_i)}{\sum_{k=1}^n P(b_j | a_k) P(a_k)} \end{aligned}$$

QED 19

通信路行列と確率

送信情報源の生成記号確率分布 $P_A = (P(a_1), \dots, P(a_n))$ と受信情報源の受信記号確率分布 $P_B = (P(b_1), \dots, P(b_m))$ の関係は、通信路行 T を用いて次式で表される。

$$P_B = P_A T$$

$$(P(b_1), \dots, P(b_m)) = (P(a_1), \dots, P(a_n)) \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nm} \end{bmatrix}$$

情報理論では、行ベクトル(横ベクトル)が確率ベクトルになるように扱うことが多い。

20

別表現

転地を行うと、左右が反転することに注意

$${}^t P_B = {}^t T {}^t P_A$$

$$\begin{bmatrix} P(b_1) \\ \vdots \\ P(b_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1m} & \dots & t_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{bmatrix}$$

線形代数等では、列ベクトルを多く扱う。これらを混同せずに扱う必要がある。

21

通信路で送信される情報量
(相互情報量)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ P(a_1) & \dots & P(a_n) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m \\ P(b_1) & \dots & P(b_m) \end{bmatrix}$$



通信路を通さずに直に情報源Aに関する情報を得られる場合。

通信路を通して、間接的に情報源Aに関する情報を得る場合。

22

通信路で伝送される情報量

送信情報源の情報量

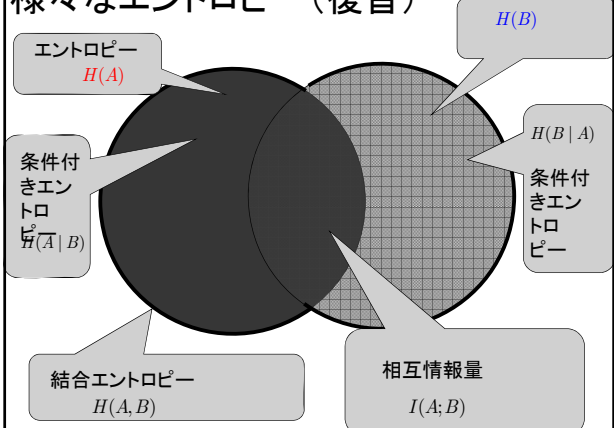
受信情報を条件とする送信情報源の情報量

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B)$$

伝送される情報量は、相互情報量として求められる。

23

様々なエントロピー(復習)



$$\begin{aligned}
 H(A) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) \\
 H(A|B) &= \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A|\beta) \\
 &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|\beta) \log P(\alpha|\beta) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha|\beta) \\
 H(B) &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \log P(\beta) \\
 H(B|A) &= \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) \log P(\beta|\alpha) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta|\alpha) \\
 H(A, B) &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) \\
 &= H(A) + H(B) - I(A; B) \\
 I(A; B) &= H(A) - H(A|B) \\
 &= H(B) - H(B|A) \\
 &= H(A) + H(B) - H(A, B)
 \end{aligned}$$

25

相互情報量の様々な計算式(公式)

$$\begin{aligned}
 I(A; B) &= H(A) - H(A|B) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) - \left(-\sum_{\beta \in B} \sum_{\alpha \in A} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha|\beta) \right) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha) + \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha|\beta) \\
 &= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} P(\alpha, \beta) \log \frac{P(\alpha|\beta)}{P(\alpha)} \\
 &= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} P(\alpha, \beta) \log \frac{P(\alpha, \beta)}{P(\alpha)P(\beta)} \\
 &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log \frac{P(\alpha, \beta)}{P(\alpha)P(\beta)}
 \end{aligned}$$

26

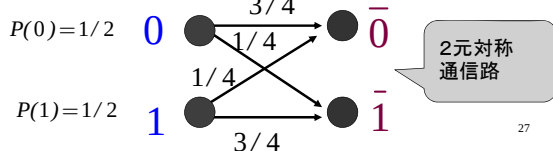
例1

通信路行列 $T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ の通信路で

情報源 $A = \left\{ \begin{matrix} 0 & , & 1 \\ 1/2 & , & 1/2 \end{matrix} \right\}$ を伝送するとき、

受信される情報源 $B = \left\{ \begin{matrix} \bar{0} & , & \bar{1} \\ P(\bar{0}) & , & P(\bar{1}) \end{matrix} \right\}$ および、

伝送される情報量(相互情報量) $I(A; B)$ を求めよ。



27

(計算例)

まず、受信記号 $B = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ の生成確率 $P(\bar{0}), P(\bar{1})$ を求める。

$$P_B = P_A T$$

$$\therefore (P(\bar{0}), P(\bar{1})) = (P(0), P(1))T$$

$$\therefore (P(\bar{0}), P(\bar{1})) = (1/2, 1/2) \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = (1/2, 1/2)$$

次に、結合確率を求める。

$$P(0, \bar{0}) = P(\bar{0}|0)P(0) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

0を送信

$$P(0, \bar{1}) = P(\bar{1}|0)P(0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(1, \bar{0}) = P(\bar{0}|1)P(1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

1を送信

$$P(1, \bar{1}) = P(\bar{1}|1)P(1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

28

以上より、相互情報量を求める。

$$\begin{aligned}
 I(A; B) &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log \frac{P(\alpha, \beta)}{P(\alpha)P(\beta)} \\
 &= P(0, \bar{0}) \log \frac{P(0, \bar{0})}{P(0)P(\bar{0})} + P(0, \bar{1}) \log \frac{P(0, \bar{1})}{P(0)P(\bar{1})} + \\
 &\quad P(1, \bar{0}) \log \frac{P(1, \bar{0})}{P(1)P(\bar{0})} + P(1, \bar{1}) \log \frac{P(1, \bar{1})}{P(1)P(\bar{1})} \\
 &= \frac{3}{8} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \log \frac{3}{2} \\
 &= \frac{3}{4} \log 3 - 1 \simeq 0.189 [\text{bit / 記号}]
 \end{aligned}$$

29

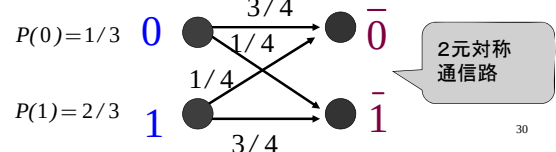
練習

通信路行列 $T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ の通信路で

情報源 $A = \left\{ \begin{matrix} 0 & , & 1 \\ 1/3 & , & 2/3 \end{matrix} \right\}$ を伝送するとき、

受信される情報源 $B = \left\{ \begin{matrix} \bar{0} & , & \bar{1} \\ P(\bar{0}) & , & P(\bar{1}) \end{matrix} \right\}$ および、

伝送される情報量(相互情報量) $I(A; B)$ を求めよ。



30

通信路容量(重要)

(定義): 通信路容量

通信路 T に対して、次式で表される値を通信路容量という。

$$C = \max_A I(A; B)$$

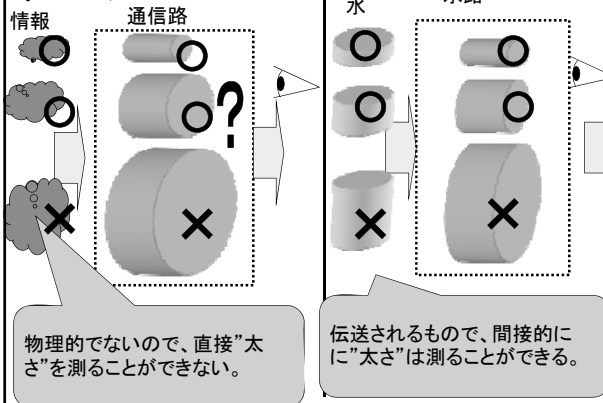
ここで、 $\max$ は送信情報源の確率的な組み合わせ全ての中で最大値を選ぶ。

通信路の"太さ"を表す式。情報を伝送してみても最大の情報量で定義する。

相互情報量は、情報源Aと情報源Bの組み合わせで定まる。また、受信情報源Bは送信情報源Aと通信路Tで定まる。一番多く情報を伝達できるように送信側の確率を定めて送信する。

31

イメージ



例

通信路行列 $T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ の通信路の通信路容量 C_T を求めよ。(誤り確率 $p = 1/4$ の2元対称通信路)

(解答例)

送信情報源を $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_A & 1-p_A \end{bmatrix}$ とし、

受信情報源を $B = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ p_B & 1-p_B \end{bmatrix}$ とする。

また、 $P_A = (p_A, 1-p_A), P_B = (p_B, 1-p_B)$ とする。

誤り確率と記号発生確率、記号受信確率を混同しないこと。

33

まず、受信記号の生起確率を求める。

$$P_B = P_A T$$

$$\therefore (p_B, 1-p_B) = (p_A, 1-p_A) \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (p_B, 1-p_B) = \left(\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2}, \frac{3}{4} - \frac{p_A}{2} \right)$$

$$\therefore p_B = \frac{1}{4} + \frac{p_A}{2} = \frac{1+2p_A}{4}$$

次に、結合確率を求める。

0を送信して、しかも0が受信される確率

0を送信という条件で、0を受信する確率

0を送信する確率

$$P(0, \bar{0}) = P(\bar{0} | 0)P(0) = \frac{3}{4} p_A$$

$$P(0, \bar{1}) = P(\bar{1} | 0)P(0) = \frac{1}{4} p_A$$

34

$$P(1, \bar{0}) = P(\bar{0} | 1)P(1) = \frac{1}{4}(1-p_A)$$

$$P(1, \bar{1}) = P(\bar{1} | 1)P(1) = \frac{3}{4}(1-p_A)$$

条件付きエントロピー $H(B|A)$ を求める。

$$H(B|A) = - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta | \alpha)$$

$$= \frac{3}{4} p_A \log \frac{4}{3} + \frac{1}{4} p_A \log 4 + \frac{1}{4} (1-p_A) \log 4 + \frac{3}{4} (1-p_A) \log \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{4} \log 4 + \frac{3}{4} \log \frac{4}{3}$$

$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \mathcal{H}(p)$$

通信路の誤り確率だけで定まる。

$\mathcal{H}(p)$ は2元のエントロピー関数

$$\mathcal{H}(p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$$

35

従って、相互情報量 $I(A; B)$ は次式で求められる。

$$I(A; B) = H(B) - H(B|A)$$

$$= \mathcal{H}(p_B) - \mathcal{H}(p)$$

$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} p_A\right) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

よって、通信路容量 C_T は以下のように求められる。

$$C_T = \max_A I(A; B)$$

$$= \max_{p_A \in [0, 1]} \left\{ \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2}\right) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \right\}$$

$$= \max_{p_A \in [0, 1]} \left\{ \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2}\right) \right\} - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4} \log 4 + \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} \right) \simeq 0.189$$

ここで、最大値は

$$\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore p_A = \frac{1}{2}$$

のときに実現される。また、このときの p_B は以下である。

$$p_B = \frac{1}{4} + \frac{p_A}{2} = \frac{1}{2}$$

36

練習

通信路行列 $T = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ の通信路の通信路容量 C_T を求めよ。

37

2元対称通信路の通信路容量

2元対称通信路の通信路容量

誤り確率 p の2元対称通信路の通信路容量 C は次式で求められる。

$$C = 1 - \mathcal{H}(p)$$

通信路容量が達成されるとき、送信、受信の各確率は以下で表される。

$$P_A = (P(0), P(1)) = (1/2, 1/2)$$

$$P_B = (P(\bar{0}), P(\bar{1})) = (1/2, 1/2)$$

対称性より、送信を均等に行うと、受信も均等になる。
(式で計算して確かめると良い。)

38

証明 通信路行列は、次式のようになる。

$$T_p = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

例題と同様に以下のように求められる。

$$(p_B, 1-p_B) = (p_A, 1-p_A) \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$\therefore p_B = p_A + p - 2p_A p$$

$$C_T = \max_A I(A; B)$$

$$= \max_{p_A \in [0,1]} \{\mathcal{H}(p_B) - \mathcal{H}(p)\}$$

$$= \max_{p_A \in [0,1]} \{\mathcal{H}(p_B)\} - \mathcal{H}(p)$$

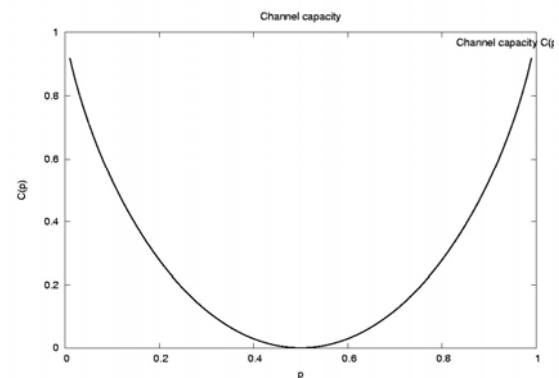
$$= 1 - \mathcal{H}(p)$$

$$\begin{aligned} \because (p_A = 1/2) \\ \rightarrow p_B = 1/2 \\ \rightarrow \mathcal{H}(p_B) = 1 \end{aligned}$$

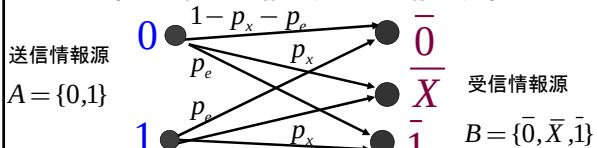
QED

39

2元対称通信路の通信路容量(概形)



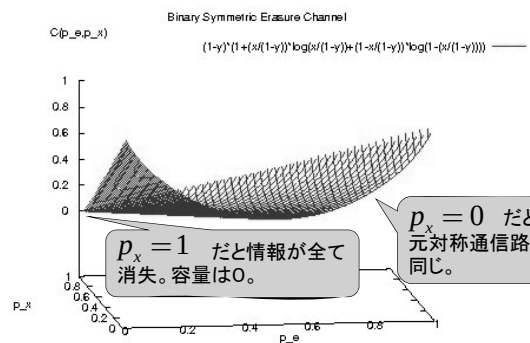
2元対称消失通信路の通信路容量



誤り確率と消失確率の関数。
(導出は省略。)

41

2元対称消失通信路の通信路容量



雑音のない通信路

(定義) 雑音のない通信路

受信記号から送信記号が一意に確定できるような通信路を雑音のない通信路という。

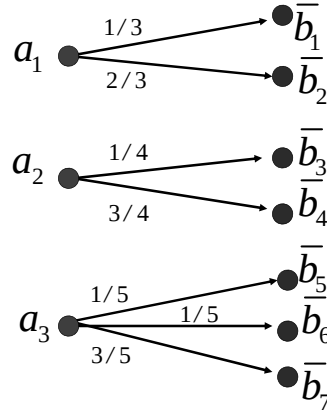
雑音のない通信路の通信路行列

$$T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

列ベクトルが全て、1要素以外0。
(行ベクトルは確率ベクトル)

43

雑音のない通信路の通信路線図



雑音がないので、受信記号から送信記号を特定できる。

44

雑音のない通信路の通信路容量

雑音のない通信路では、受信記号を条件とする条件付き確率が必ず1または0となる。すなわち、

$$\forall \alpha \in A, \beta \in B \quad P(\alpha | \beta) = 1 \text{ or } 0$$

$$\therefore \forall \beta \in B \quad H(A | \beta) = - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | \beta) \log P(\alpha | \beta) = 0$$

$$\therefore H(A | B) = \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A | \beta) = 0$$

よって、

$$I(A; B) = H(A) - H(A | B) = H(A)$$

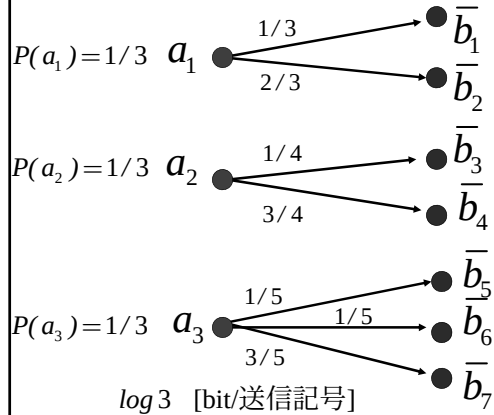
したがって、

$$C = \max_A I(A; B) = \max_A H(A) = \log n$$

ただし、 $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n)$

45

雑音のない通信路の通信路容量例



46

練習

送信アルファベット $A = \{a_1, a_2\}$ 受信アルファベット $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4, \bar{b}_5\}$

通信路行列

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

で表わされる(雑音のない)通信路の通信路容量 C_T と、 C_T を実現する際の送信情報源、および受信情報源を定めよ。

47

確定的通信路

(定義) 確定的通信路

各送信記号が唯一つの受信記号に伝送されるような通信路を確定的通信路という。

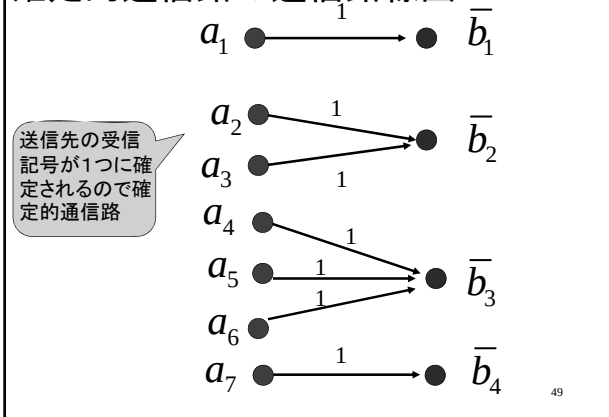
確定的通信路の通信路行列

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行ベクトルが全て、1要素以外0。
(行ベクトルは確率ベクトル)

48

確定的通信路の通信路線図

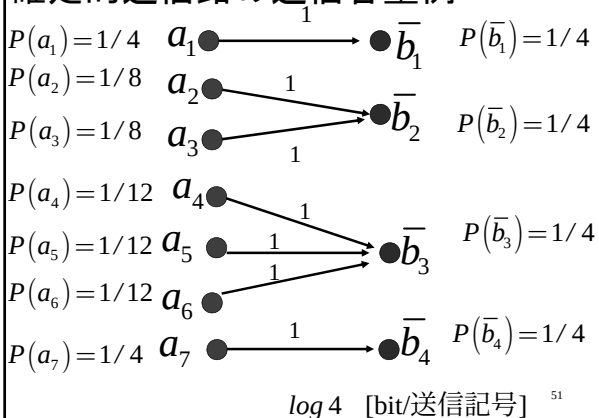


確定的通信路の通信路容量

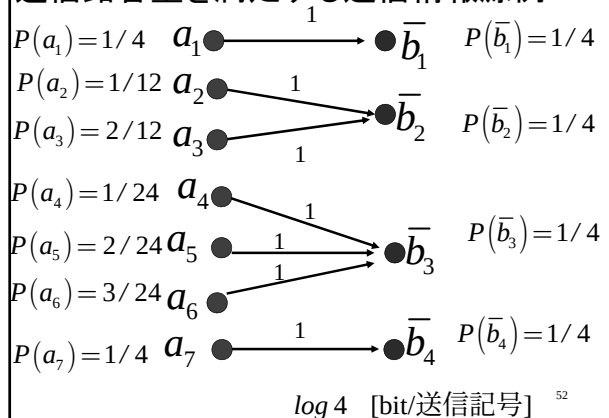
確定的通信路では、送信記号を条件とする条件付き確率が必ず1または0となる。すなわち、
 $\forall \alpha \in A, \beta \in B \quad P(\beta|\alpha) = 1 \text{ or } 0$
 $\therefore \forall \alpha \in A \quad H(B|\alpha) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) \log P(\beta|\alpha) = 0$
 $\therefore H(B|A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha) = 0$
 よって、 $I(A; B) = H(B) - H(B|A) = H(B)$
 したがって、 $C = \max_A I(A; B) = \max_A H(B) = \log m$
 ただし、 $P(b_1) = P(b_2) = \dots = P(b_m)$

順序に注意
 受信側の確率が均等になるように、送信記号の確率を選ぶ。

確定的通信路の通信容量例



通信路容量を満足する送信情報源例2



練習

送信アルファベット $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

受信アルファベット $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$

通信路行列

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表わされる(確定的)通信路の通信路容量 C_T と、
 C_T を実現する際の送信情報源、および受信情報源を定めよ。