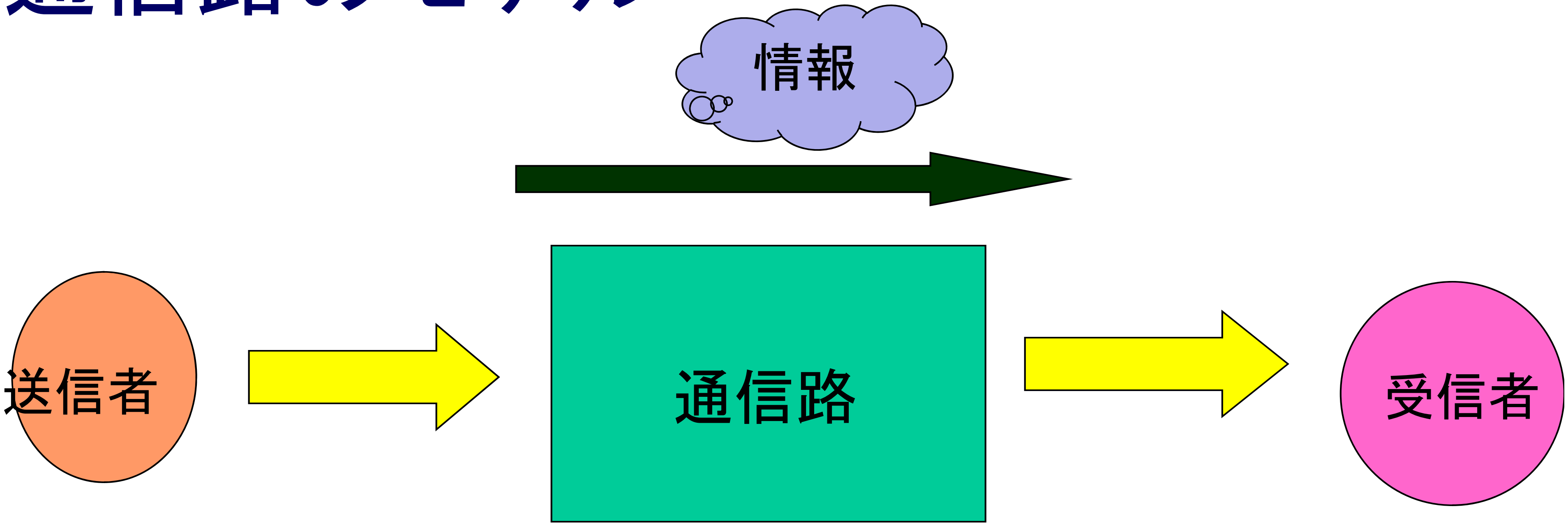
通信路（７章）

通信路のモデル



$$A = \left\{ \begin{matrix} a_1 & , & \cdots & , & a_n \\ P(a_1) & , & \cdots & , & P(a_n) \end{matrix} \right\}$$

外乱（雑音）

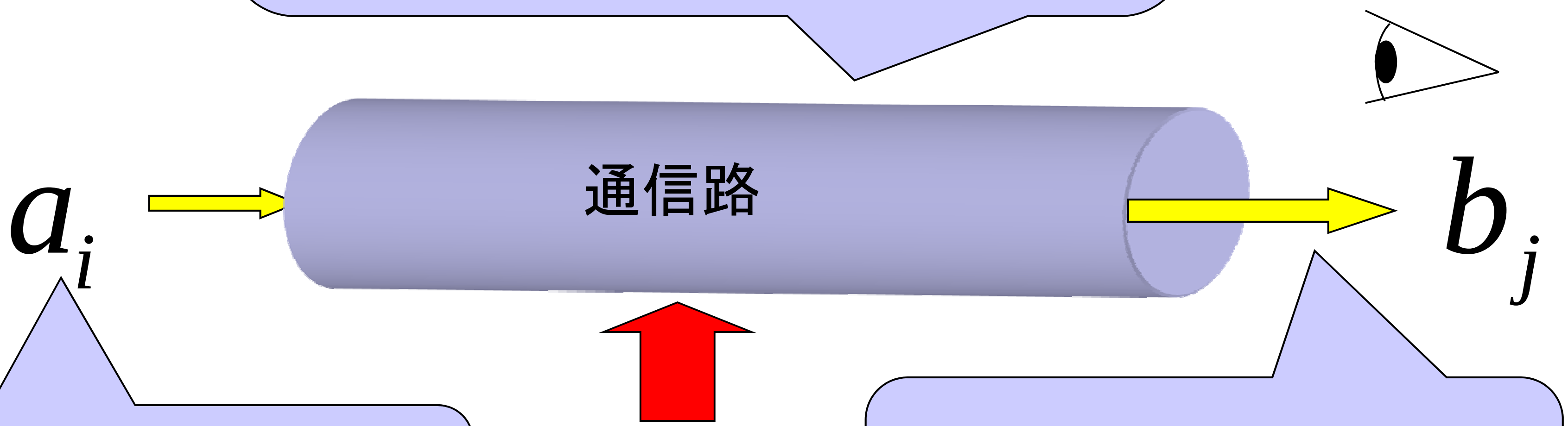
$$B = \left\{ \begin{matrix} b_1 & , & \cdots & , & b_m \\ P(b_1) & , & \cdots & , & P(b_m) \end{matrix} \right\}$$

送信情報源
（送信アルファベットと
生成確率）

受信情報源
（受信アルファベッッと
受信確率）
$m \neq n$ でもよい。

イメージ

外乱（雑音）により
記号 a_i を送信したら、
記号 b_j が受信される。
記号の種類や数は異なっていて
もかまわない。



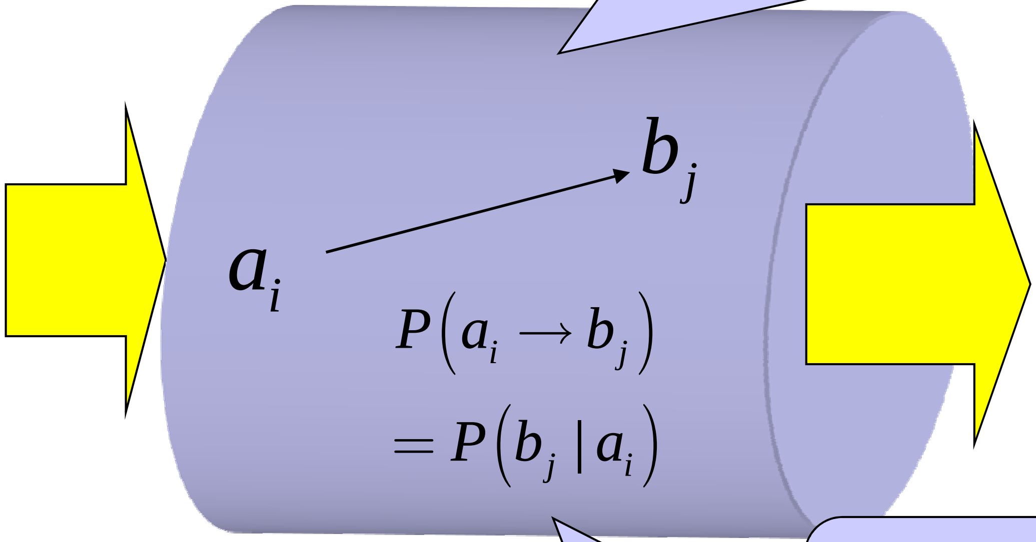
a_i を送信する。

外乱（雑音）

b_j を受信する。

通信路は、送信記号 a_i を送った時、受信記号 b_j が受信される確率 $P(a_i \rightarrow b_j)$ でモデル化される。すべての組み合わせの確率で一つの通信路が定義される。

$$
\begin{array}{ll}
P(a_1) & a_1 \\
P(a_2) & a_2 \\
\vdots & \vdots \\
P(a_n) & a_n
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{ll}
b_1 & P(b_1) \\
b_2 & P(b_2) \\
\vdots & \vdots \\
b_m & P(b_m)
\end{array}
$$

ある生成確率で、
送信記号が送信される。

条件付き確率
（順序に注意）

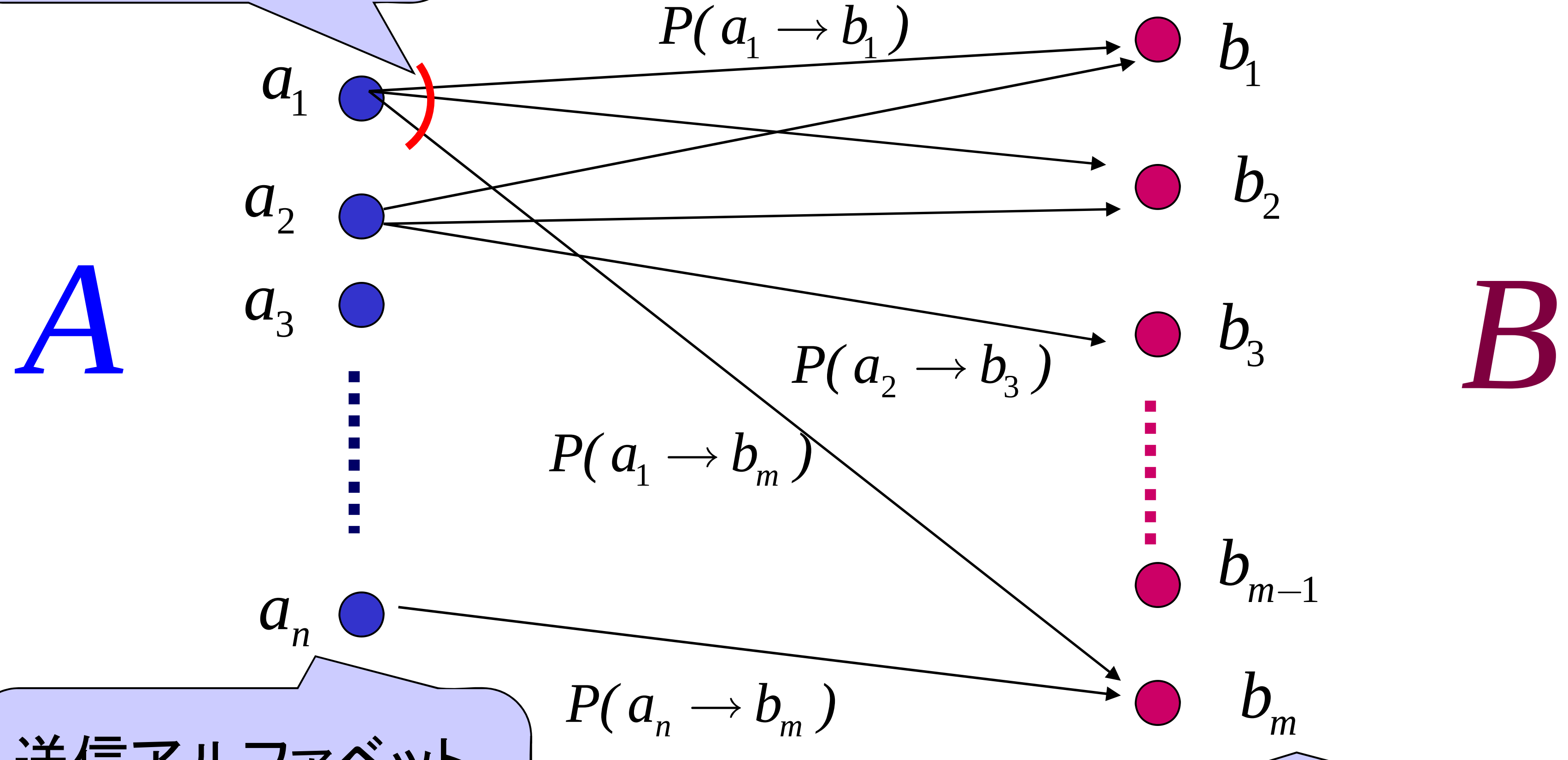
ある受信確率で、
受信記号が受信される。

通信路線図

$\forall i, 1 \le i \le n,$

$$\sum_{j=1}^{m} p(a_i \to b_j) = 1$$

雑音により、記号が変化する。



送信アルファベット
（ n 個の送信記号
の集合）

受信アルファベット
（ m 個の受信記号
の集合）

通信路行列

受信アルファベット

送信アルファベット

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} b_1 & \cdots & b_j & \cdots & b_m \end{array} \\
T = \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{array} &
\begin{bmatrix}
t_{11} & \cdots & \uparrow & \cdots & t_{1m} \\
\vdots & & \uparrow & & \vdots \\
\rightarrow & \rightarrow & t_{ij} & & \\
\vdots & & & & \vdots \\
t_{n1} & \cdots & & \cdots & t_{nm}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
P(a_1 \to b_1) & \cdots & P(a_1 \to b_j) & \cdots & P(a_1 \to b_m) \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
P(a_i \to b_1) & \cdots & P(a_i \to b_j) & \cdots & P(a_i \to b_m) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
P(a_n \to b_1) & \cdots & P(a_n \to b_j) & \cdots & P(a_n \to b_m)
\end{bmatrix}
$$

$\forall i, 1 \le i \le n,$

$$\sum_{j=1}^{m} t_{ij} = 1$$

行で和をとると1。
（確率ベクトル）

通信路行列(条件付き確率)

$$T = \begin{bmatrix} P(b_1 | a_1) & \cdots & P(b_j | a_1) & \cdots & P(b_m | a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ P(b_1 | a_i) & \cdots & P(b_j | a_i) & \cdots & P(b_m | a_i) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(b_1 | a_n) & \cdots & P(b_j | a_n) & \cdots & P(b_m | a_n) \end{bmatrix}$$

正方行列とは限らない。（行数と列数が違っていても良い。）

$$\sum_{\beta} P(\beta | \alpha = a) = 1$$

条件付き確率の性質。
ある条件を固定したとき、確率の総和は1.

通信路行列の意味

$$1 \le i \le n, 1 \le j \le m$$

$$t_{ij} = P(b_j \mid a_i) = P(a_i \to b_j)$$

通信路行列の要素

a_i を送る条件の下で、b_j が受信される確率

a_i を送信したら、b_j が受信される確率

通信路行列の関係式

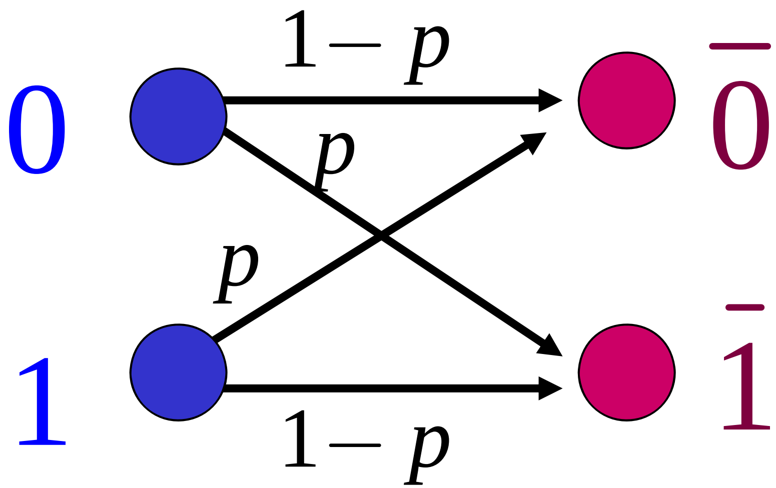
$$\begin{cases} \forall i, j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m & 0 \le t_{ij} \le 1 \\ \forall i, 1 \le i \le n & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} t_{ij} = 1 \end{cases}$$

確率の式。（行ベクトルが確率ベクトル）

通信路例1（2元対称通信路）

p:誤り確率

$A=\{0,1\}$



$B=\{\bar{0},\bar{1}\}$

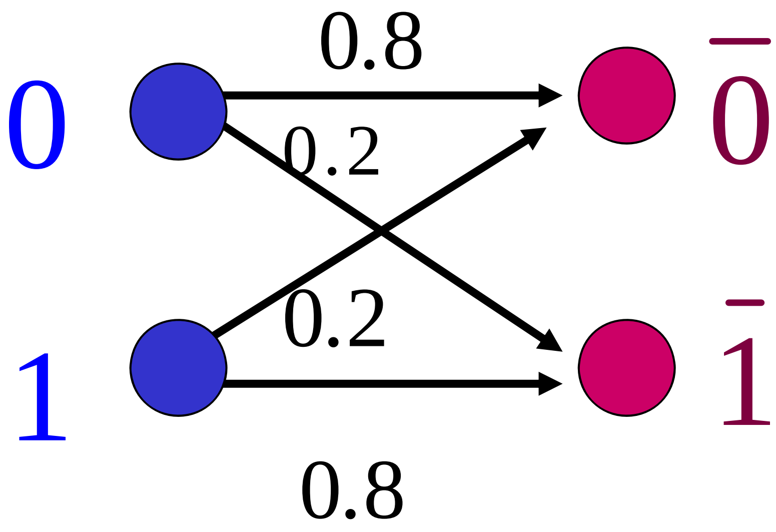
$$T_S=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}$$

応用上重要。
誤り確率により、対称的に送信記号が変化する。

具体的な2元対称通信路

誤り確率$p = 0.2$

$A = \{0,1\}$



$B = \{\bar{0},\bar{1}\}$

$$T_S = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

通信路行列は、
対称行列になる。

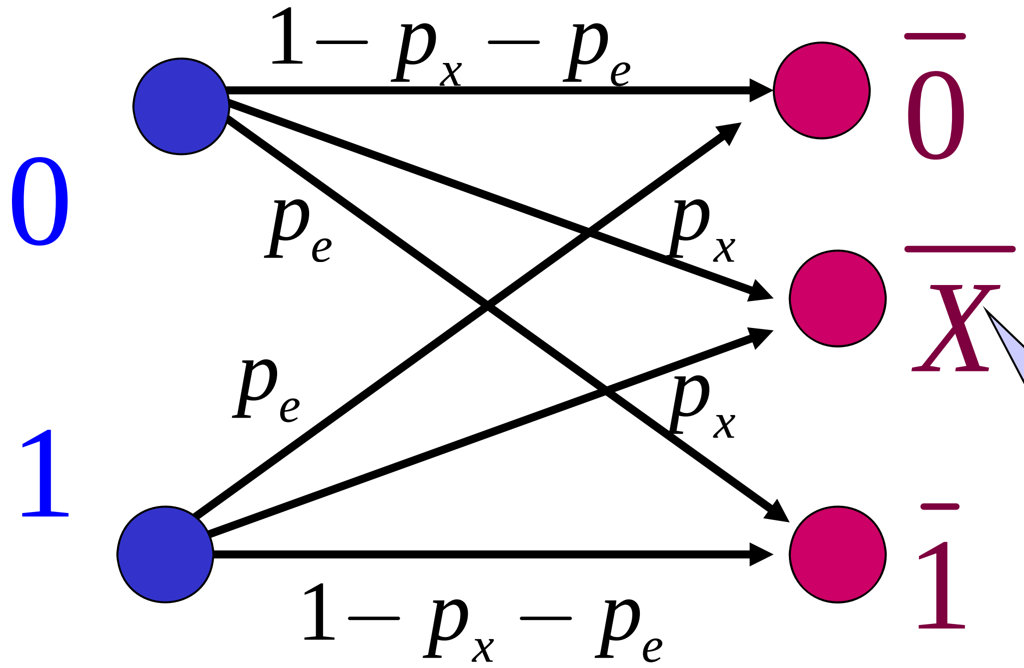
通信路例2（2元対称消失通信路）

p_e:誤り確率

p_x:消失確率

$B=\{\bar{0},\bar{X},\bar{1}\}$

$A=\{0,1\}$



Xは消失を意味する記号。

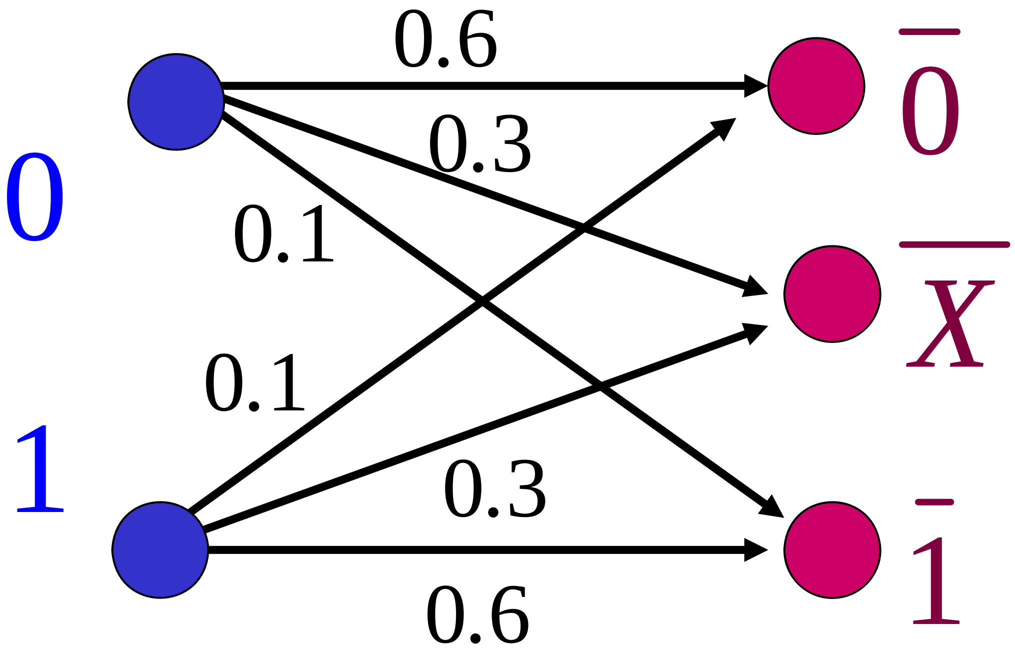
$$T_X=\begin{bmatrix}1-p_x-p_e & p_x & p_e\\ p_e & p_x & 1-p_x-p_e\end{bmatrix}$$

応用上重要。送信記号の消失と誤りの両方が起こる。

具体的な2元対称消失通信路

誤り確率$p_e = 0.1$　　消失確率$p_x = 0.3$

$A = \{0,1\}$



$B = \{\bar{0}, \bar{X}, \bar{1}\}$

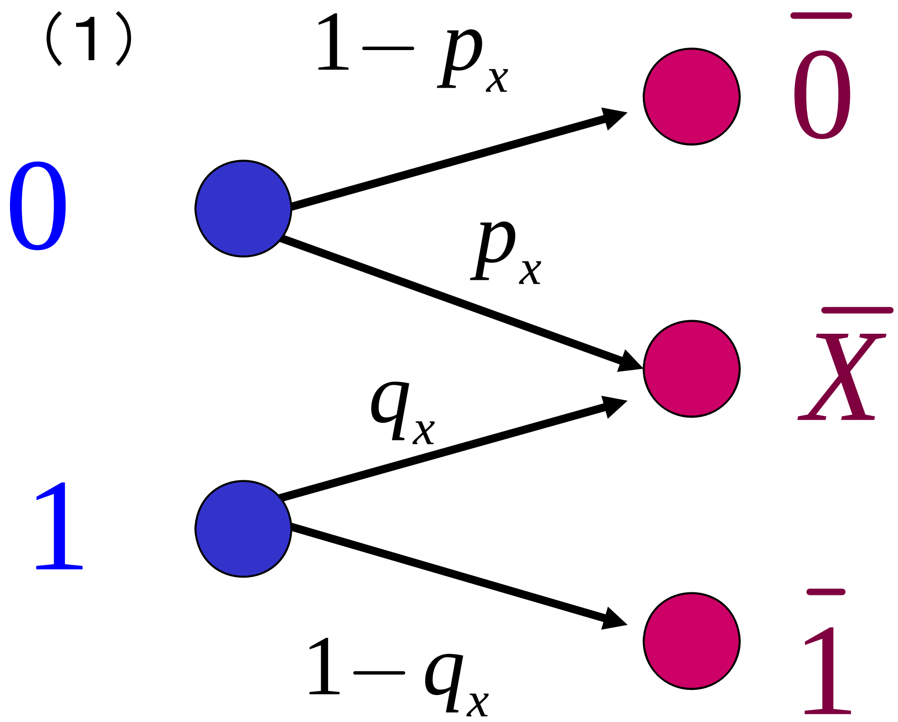
$$T_X = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

（数学的な対称行列ではないが）
ある種の対称性が存在する。

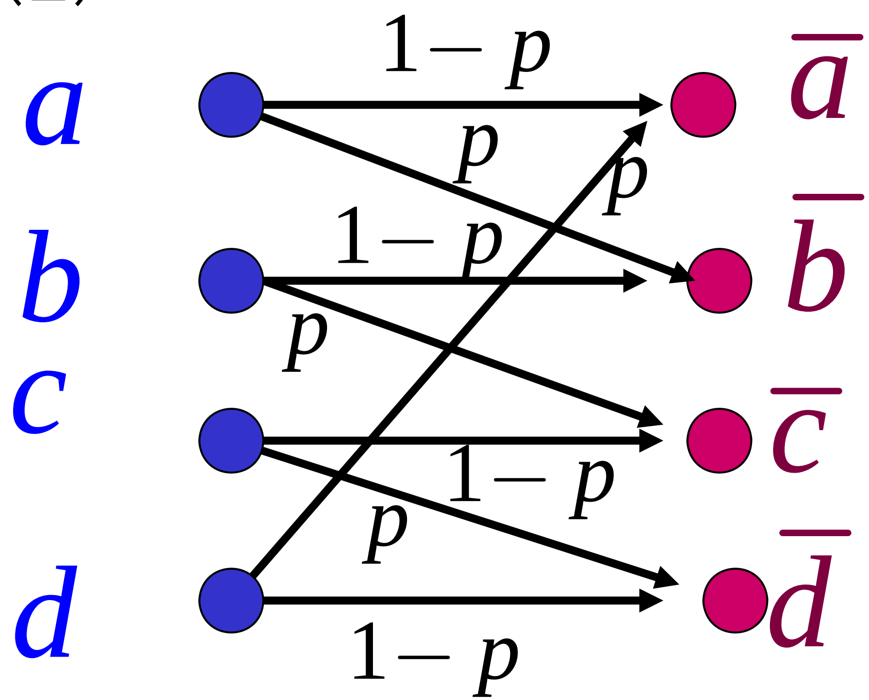
練習

次の通信路線図で表されている通信路の、
通信路行列を求めよ。

（１）



（２）



練習2

次の通信路行列で表されている通信路の通信路線図を示せ。

（1） 送信情報源 $A=\{a,b,c\}$

受信情報源 $B=\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$

$$T_1=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0.1 & 0.2 & 0.7\end{bmatrix}$$

（2） 送信情報源 $A=\{a,b,c,d\}$

受信情報源 $B=\{\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}\}$

$$T_2=\begin{bmatrix}1-p-q & p & 0 & q\\ p & 1-p-q & q & 0\\ 0 & p & 1-p-q & q\\ q & 0 & p & 1-p-q\end{bmatrix}$$

通信路での確率の関係1（全確率の公式）

通信路を通して受信される記号の受信確率は、送信記号の生成確率と通信路の確率的振る舞いで定まる。

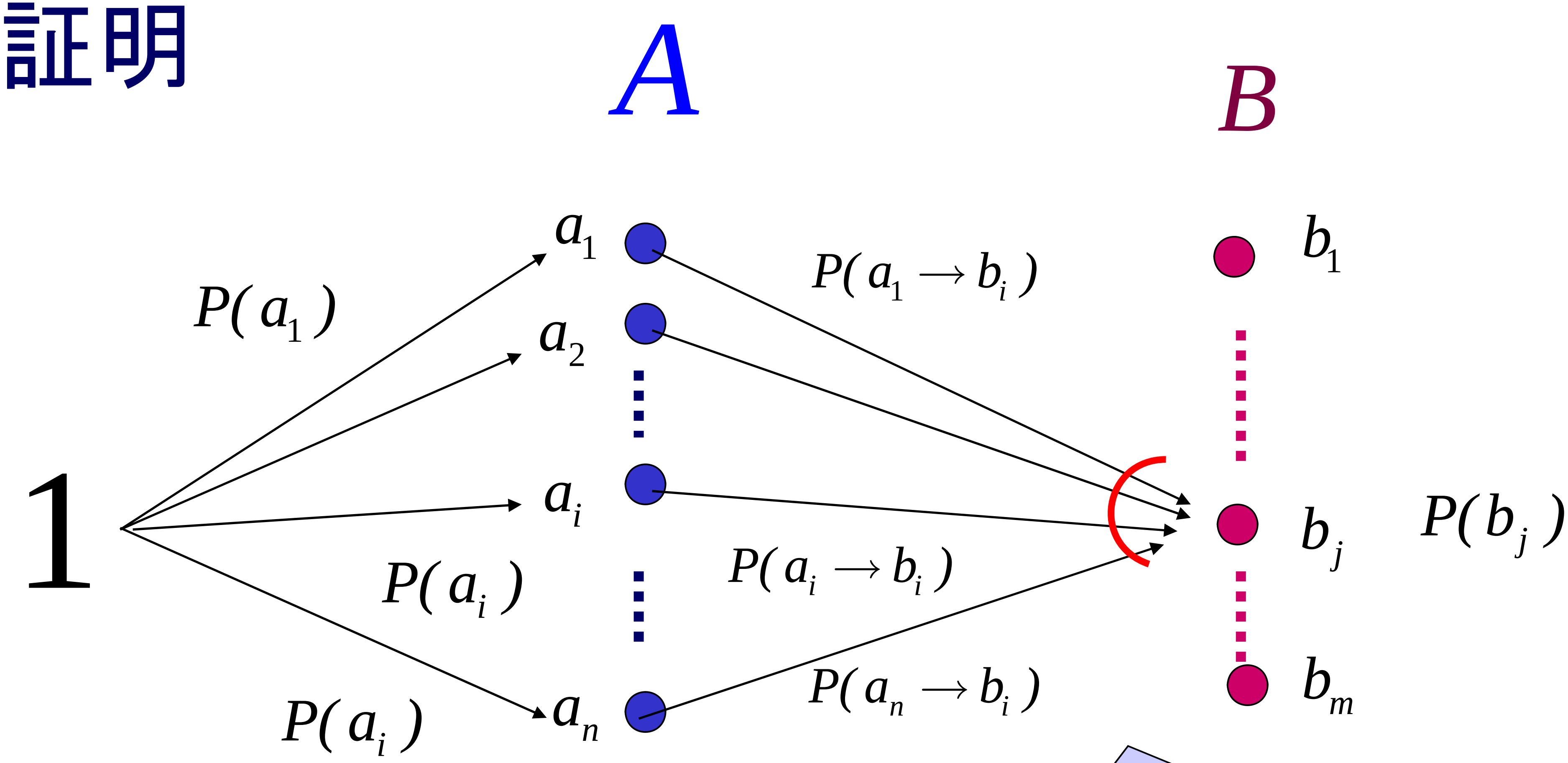
$$\forall j, 1 \le j \le m,$$

$$P(b_j) = \sum_{i=1}^{n} P(b_j \mid a_i) P(a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(a_i) P(a_i \to b_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i t_{ij}$$

証明



b_i が受信される全ての可能性（径路）を考えて総和をとる。

図より、成立する。

QED

別証明

結合確率と条件付き確率の関係式。

$$(1)\quad P(a_i, b_j) = P(b_j \mid a_i) P(a_i)$$

結合確率：事象 a_i が起こりかつ事象 b_j が起こる確率。
2つの事象が同時に起こる確率。

条件付き確率：事象 a_i が起こったとしたときに事象 b_j が起こる確率。

結合確率による確率の計算

$$(2)\quad P(b_j) = \sum_i P(a_i, b_j)$$

結合確率を片方の事象系において総和をとる。

（1）、（2）より成り立つ。

QED

通信路での確率の関係2（ベーズの定理）

ベーズの定理

$$\forall i, j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m,$$

$$P(a_i \mid b_j) = \frac{P(b_j \mid a_i) P(a_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(b_j \mid a_k) P(a_k)}$$

条件付き確率の条件と発生事象を交換する公式。（一般の確率論で成立する。）

通信路を通して記号 b_j が受信されたとき、送信側で記号 a_i を送っている確率が計算できることを表す式。通信路の性質と送信アルファベットの発生確率は既知であることに注意する。

証明

結合確率の式

$$P(a_i, b_j) = P(b_j | a_i)P(a_i) = P(a_i | b_j)P(b_j)$$

$$\therefore P(a_i | b_j) = \frac{P(a_i, b_j)}{P(b_j)} = \frac{P(b_j | a_i)P(a_i)}{P(b_j)}$$

全確率の式を適用する。

$$\therefore P(a_i | b_j)$$

$$= \frac{P(a_i, b_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(b_j | a_k)P(a_k)} = \frac{P(b_j | a_i)P(a_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(b_j | a_k)P(a_k)}$$

QED

通信路行列と確率

送信情報源の生成記号確率分布 $\boldsymbol{P}_A = (P(a_1),\cdots,P(a_n))$ と
受信情報源の受信記号確率分布 $\boldsymbol{P}_B = (P(b_1),\cdots,P(b_m))$ の関係は、通信路行 $\boldsymbol{T}$ を用いて次式で表される。

$$\boldsymbol{P}_B = \boldsymbol{P}_A \boldsymbol{T}$$

$$(P(b_1),\cdots,P(b_m)) = (P(a_1),\cdots,P(a_n)) \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nm} \end{bmatrix}$$

情報理論では、行ベクトル（横ベクトル）が確率ベクトルになるように扱うことが多い。

別表現

転地を行うと、左右が反転することに注意

$$ {}^{t}\boldsymbol{P}_B = {}^{t}\boldsymbol{T}\,{}^{t}\boldsymbol{P}_A $$

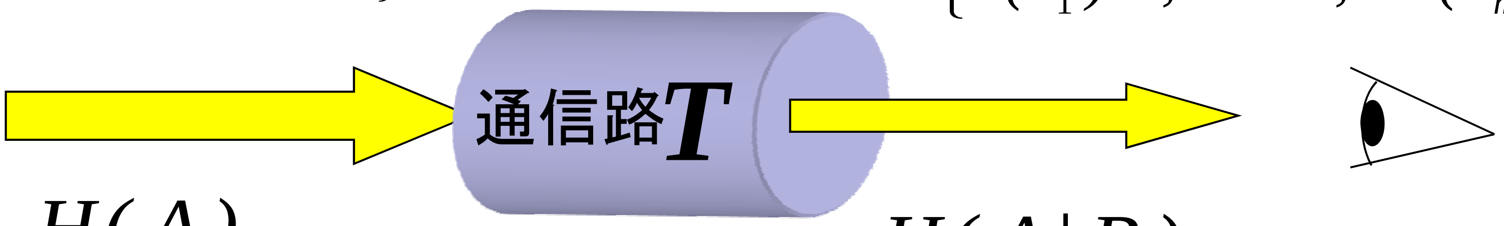
$$ \begin{bmatrix} P(b_1) \\ \vdots \\ P(b_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1m} & \cdots & t_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{bmatrix} $$

線形代数等では、列ベクトルを多く扱う。
これらを混同せずに扱う必要がある。

通信路で送信される情報量（相互情報量）

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & \cdots & , & a_n \\ P(a_1) & , & \cdots & , & P(a_n) \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & , & \cdots & , & b_m \\ P(b_1) & , & \cdots & , & P(b_m) \end{Bmatrix}$$



$H(A)$

$H(A|B)$

通信路を通さずに直に情報源Aに関する情報を得られる場合。

通信路を通して、間接的に情報源Aに関する情報を得る場合。

通信路で伝送
される情報量

＝

送信情報源の
情報量

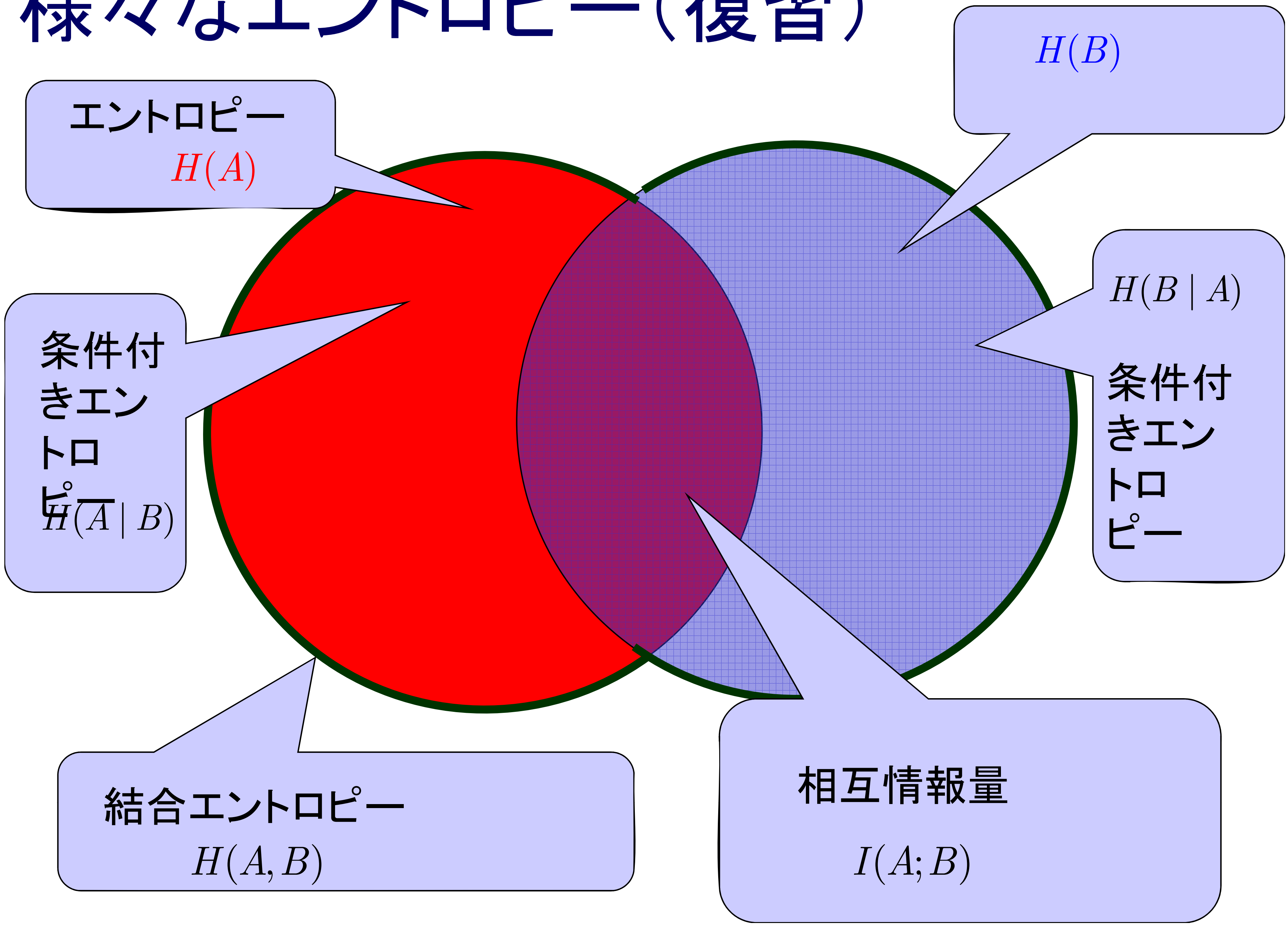
－

受信情報を条件と
する送信情報源
の情報量

$$I(A;B) = H(A) - H(A|B)$$

伝送される情報量は、
相互情報量として求め
られる。

様々なエントロピー（復習）



$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha)$$

$$H(A \mid B) = \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A \mid \beta)$$

$$= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid \beta) \log P(\alpha \mid \beta)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha \mid \beta)$$

$$H(B) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \log P(\beta)$$

$$H(B \mid A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B \mid \alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \alpha) \log P(\beta \mid \alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta \mid \alpha)$$

$$H(A, B) = -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta)$$

$$= H(A) + H(B) - I(A; B)$$

$$I(A; B) = H(A) - H(A \mid B)$$

$$= H(B) - H(B \mid A)$$

$$= H(A) + H(B) - H(A, B)$$

相互情報量の様々な計算式（公式）

$$I(A;B) = H(A) - H(A \mid B)$$

$$= -\sum_{\alpha\in A} P(\alpha)\log P(\alpha) - \left(-\sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha \mid \beta) \right)$$

$$= -\sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha) + \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha \mid \beta)$$

$$= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log \frac{P(\alpha \mid \beta)}{P(\alpha)}$$

$$= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log \frac{P(\alpha,\beta)}{P(\alpha)P(\beta)}$$

$$= \sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log \frac{P(\alpha,\beta)}{P(\alpha)P(\beta)}$$

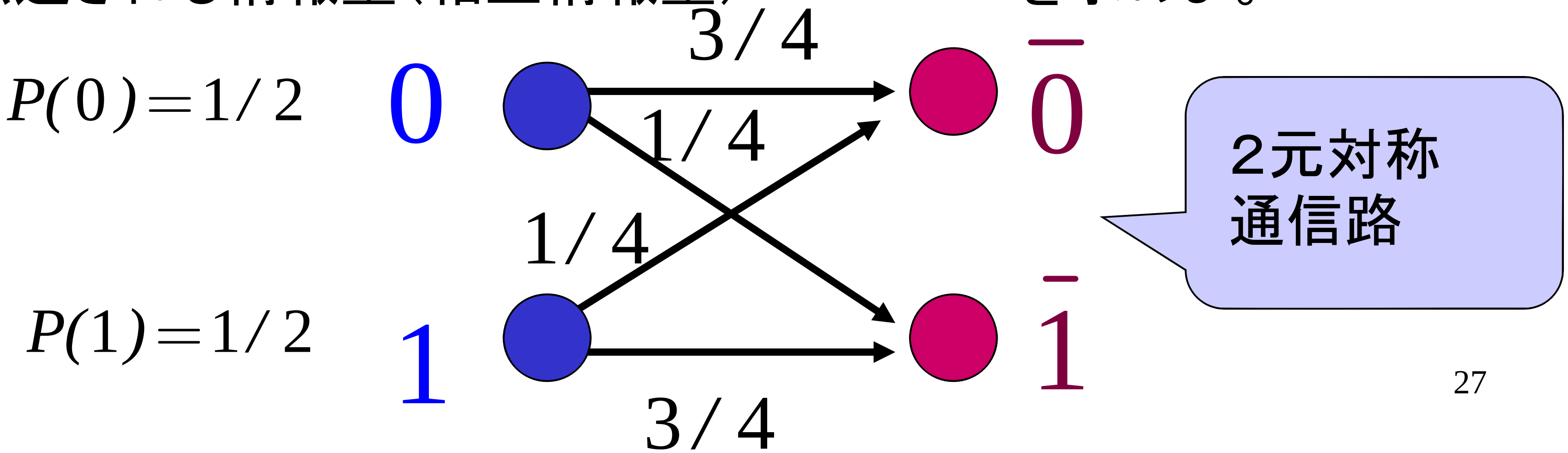
例1

通信路行列 $T=\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ の通信路で

情報源 $A=\begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ 1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix}$ を伝送するとき、

受信される情報源 $B=\begin{Bmatrix} \bar{0} & , & \bar{1} \\ P(\bar{0}) & , & P(\bar{1}) \end{Bmatrix}$ および、

伝送される情報量(相互情報量) $I(A;B)$ を求めよ。



（計算例）

まず、受信記号 $B=\left\{\bar{0},\bar{1}\right\}$ の生成確率 $P(\bar{0}),P(\bar{1})$ を求める。

$$\boldsymbol{P}_B=\boldsymbol{P}_A\boldsymbol{T}$$

$$\therefore (P(\bar{0}),P(\bar{1}))=(P(0),P(1))\boldsymbol{T}$$

$$\therefore (P(\bar{0}),P(\bar{1}))=(1/2,1/2)\begin{bmatrix}3/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{bmatrix}=(1/2,1/2)$$

次に、結合確率を求める。

$$P(0,\bar{0})=P(\bar{0}\,|\,0)P(0)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P(0,\bar{1})=P(\bar{1}\,|\,0)P(0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

0を送信

$$P(1,\bar{0})=P(\bar{0}\,|\,1)P(1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(1,\bar{1})=P(\bar{1}\,|\,1)P(1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

1を送信

以上より、相互情報量を求める。

$$I(A;B)=\sum_{\alpha\in A,\beta\in B}P(\alpha,\beta)log\frac{P(\alpha,\beta)}{P(\alpha)P(\beta)}$$

$$=P(0,\bar{0})log\frac{P(0,\bar{0})}{P(0)P(\bar{0})}+P(0,\bar{1})log\frac{P(0,\bar{1})}{P(0)P(\bar{1})}+$$

$$P(1,\bar{0})log\frac{P(1,\bar{0})}{P(1)P(\bar{0})}+P(1,\bar{1})log\frac{P(1,\bar{1})}{P(1)P(\bar{1})}$$

$$=\frac{3}{8}log\frac{3}{2}+\frac{1}{8}log\frac{1}{2}+\frac{1}{8}log\frac{1}{2}+\frac{3}{8}log\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3}{4}log3-1\simeq0.189\left[bit/\text{記号}\right]$$

練習

通信路行列 $T=\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ の通信路で

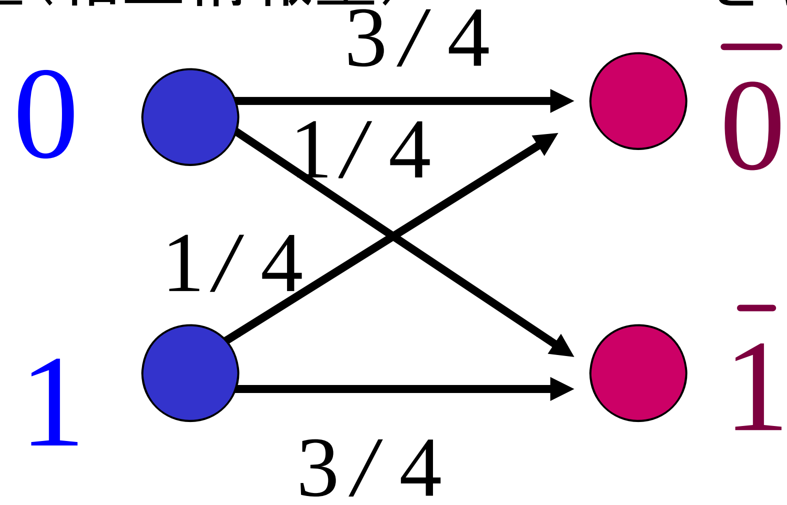
情報源 $A=\begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ 1/3 & , & 2/3 \end{Bmatrix}$ を伝送するとき、

受信される情報源 $B=\begin{Bmatrix} \bar{0} & , & \bar{1} \\ P(\bar{0}) & , & P(\bar{1}) \end{Bmatrix}$ および、

伝送される情報量（相互情報量）$I(A;B)$ を求めよ。

$P(0)=1/3$

$P(1)=2/3$



2元対称
通信路

通信路容量（重要）

（定義）：通信路容量

通信路 T に対して、次式で表される値を通信路容量という。

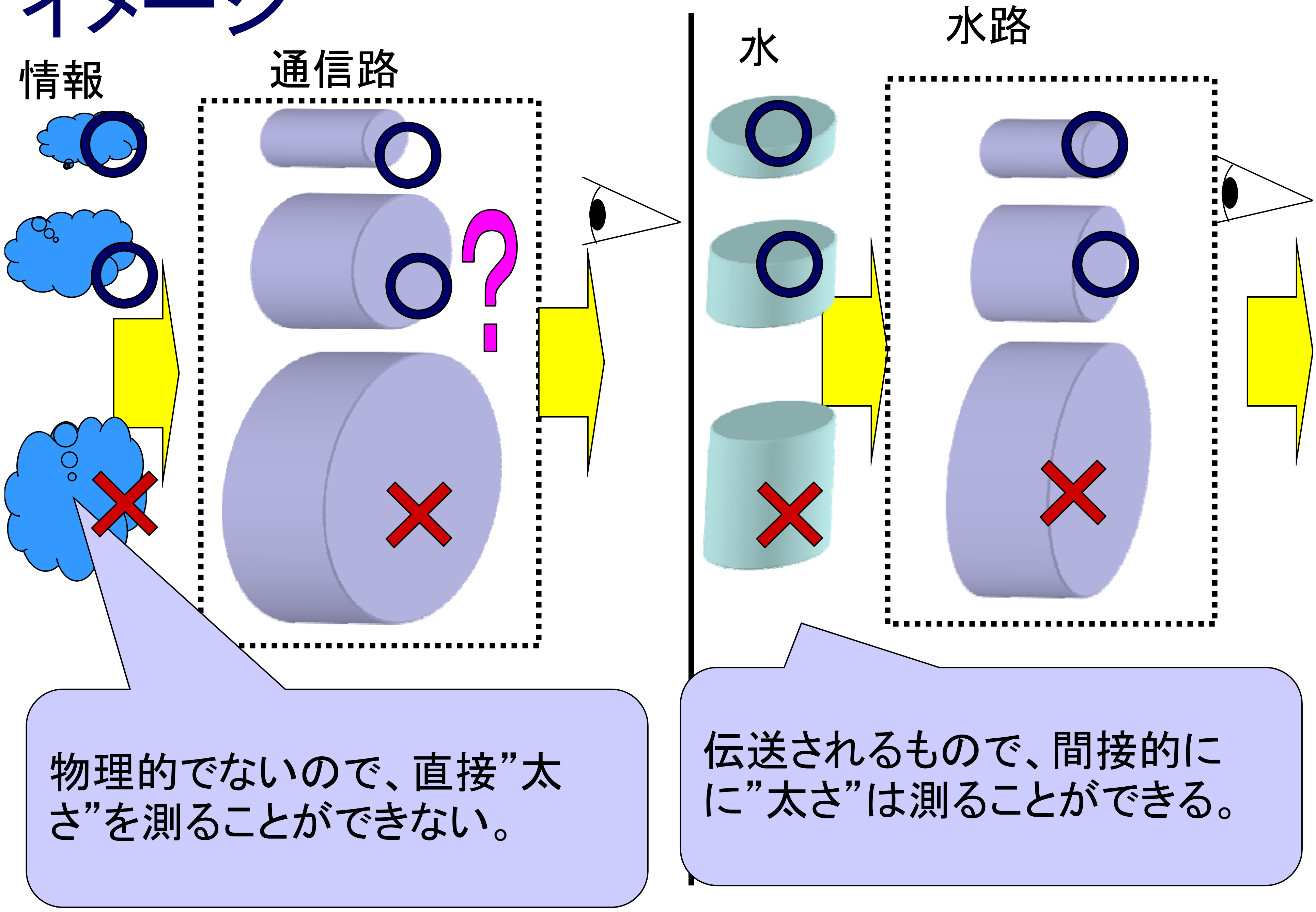
$$C = \max_{A} I(A;B)$$

ここで, $\max_{A}$ は送信情報源の確率的な組み合わせ全ての中で最大値を選ぶ。

相互情報量は、情報源Aと情報源Bの組み合わせで定まる。
また、受信情報源Bは送信情報源Aと通信路Tで定まる。
一番多く情報を伝達できるよう送信側の確率を定めて送信する。

通信路の”太さ”を表す式。情報を伝送してみて最大の情報量で定義する。

イメージ


情報
通信路
?
水
水路
物理的でないので、直接”太さ”を測ることができない。
伝送されるもので、間接的に”太さ”は測ることができる。

例

通信路行列 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ の通信路の通信路容量 C_T を求めよ。(誤り確率　$p=1/4$　の2元対称通信路)

(解答例)

送信情報源を $A=\begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ p_A & , & 1-p_A \end{Bmatrix}$ とし、

受信情報源を $B=\begin{Bmatrix} \bar{0} & , & \bar{1} \\ p_B & , & 1-p_B \end{Bmatrix}$ とする。

誤り確率と記号発生確率、記号受信確率を混同しないこと。

また、 $\boldsymbol{P}_A=(p_A,1-p_A),\boldsymbol{P}_B=(p_B,1-p_B)$ とする。

まず、受信記号の生起確率を求める。

$$\boldsymbol{P_B} = \boldsymbol{P_A T}$$

$$\therefore (p_B, 1-p_B) = (p_A, 1-p_A)\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (p_B, 1-p_B) = (\frac{1}{4}+\frac{p_A}{2}, \frac{3}{4}-\frac{p_A}{2})$$

$$\therefore p_B = \frac{1}{4}+\frac{p_A}{2} = \frac{1+2p_A}{4}$$

次に、結合確率を求める。

0 を送信して、しかも $\overline{0}$ が受信される確率

0を送信という条件で、$\overline{0}$ を受信する確率

0を送信する確率

$$P(0,\overline{0}) = P(\overline{0}\,|\,0)P(0) = \frac{3}{4}p_A$$

$$P(0,\overline{1}) = P(\overline{1}\,|\,0)P(0) = \frac{1}{4}p_A$$

$$P(1,\bar{0}) = P(\bar{0}|1)P(1) = \frac{1}{4}(1-p_A)$$

1を送信

$$P(1,\bar{1}) = P(\bar{1}|0)P(1) = \frac{3}{4}(1-p_A)$$

条件付きエントロピー $H(B|A)$ を求める。

$$H(B|A) = -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta) log\, P(\beta|\alpha)$$

$$= \frac{3}{4}p_A\, log\frac{4}{3} + \frac{1}{4}p_A\, log\, 4 + \frac{1}{4}(1-p_A) log\, 4 + \frac{3}{4}(1-p_A) log\frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{4} log\, 4 + \frac{3}{4} log\frac{4}{3}$$

$$= \mathcal{H}(\frac{1}{4})$$

$$= \mathcal{H}(p)$$

通信路の誤り確率だけで定まる。

$\mathcal{H}(p)$ は2元のエントロピー関数

$$\mathcal{H}(p) = -p\, log\, p - (1-p) log(1-p)$$

従って、相互情報量 $I(A;B)$ は次式で求められる。

$$
\begin{aligned}
I(A;B) &= H(B) - H(B|A) \\
&= \mathcal{H}(p_B) - \mathcal{H}(p) \\
&= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p_A\right) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}
$$

よって、通信路容量 C_T は以下のように求められる。

$$
\begin{aligned}
C_T &= \max_A I(A;B) \\
&= \max_{p_A \in [0,1]} \left\{ \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2}\right) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \right\} \\
&= \max_{p_A \in [0,1]} \left\{ \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2}\right) \right\} - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{4}\log 4 + \frac{3}{4}\log\frac{4}{3}\right) \simeq 0.189
\end{aligned}
$$

ここで、最大値は

$$\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore p_A = \frac{1}{2}$$

のときに実現される。また、このときの p_B は以下である。

$$p_B = \frac{1}{4} + \frac{p_A}{2} = \frac{1}{2}$$

練習

通信路行列 $T=\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ の通信路の通信路容量 C_T を求めよ。

2元対称通信路の通信路容量

2元対称通信路の通信路容量

誤り確率 p の2元対称通信路の通信路容量 C は次式で求められる。

$$C = 1 - \mathcal{H}(p)$$

通信路容量が達成されるとき、送信、受信の各確率は以下で表される。

$$P_A = (P(0), P(1)) = \left(1/2, 1/2\right)$$

$$P_B = (P(\overline{0}), P(\overline{1})) = \left(1/2, 1/2\right)$$

対称性より、送信を均等に行うと、受信も均等になる。
（式で計算して確かめると良い。）

証明　通信路行列は、次式のようになる。

$$T_p = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

例題と同様にして以下のように求められる。

$$(p_B, 1-p_B) = (p_A, 1-p_A)\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$\therefore p_B = p_A + p - 2p_A p$$

$$C_T = \max_A I(A;B)$$

$$= \max_{p_A \in [0,1]} \{\mathcal{H}(p_B) - \mathcal{H}(p)\}$$

$$= \max_{p_A \in [0,1]} \{\mathcal{H}(p_B)\} - \mathcal{H}(p)$$

$$= 1 - \mathcal{H}(p)$$

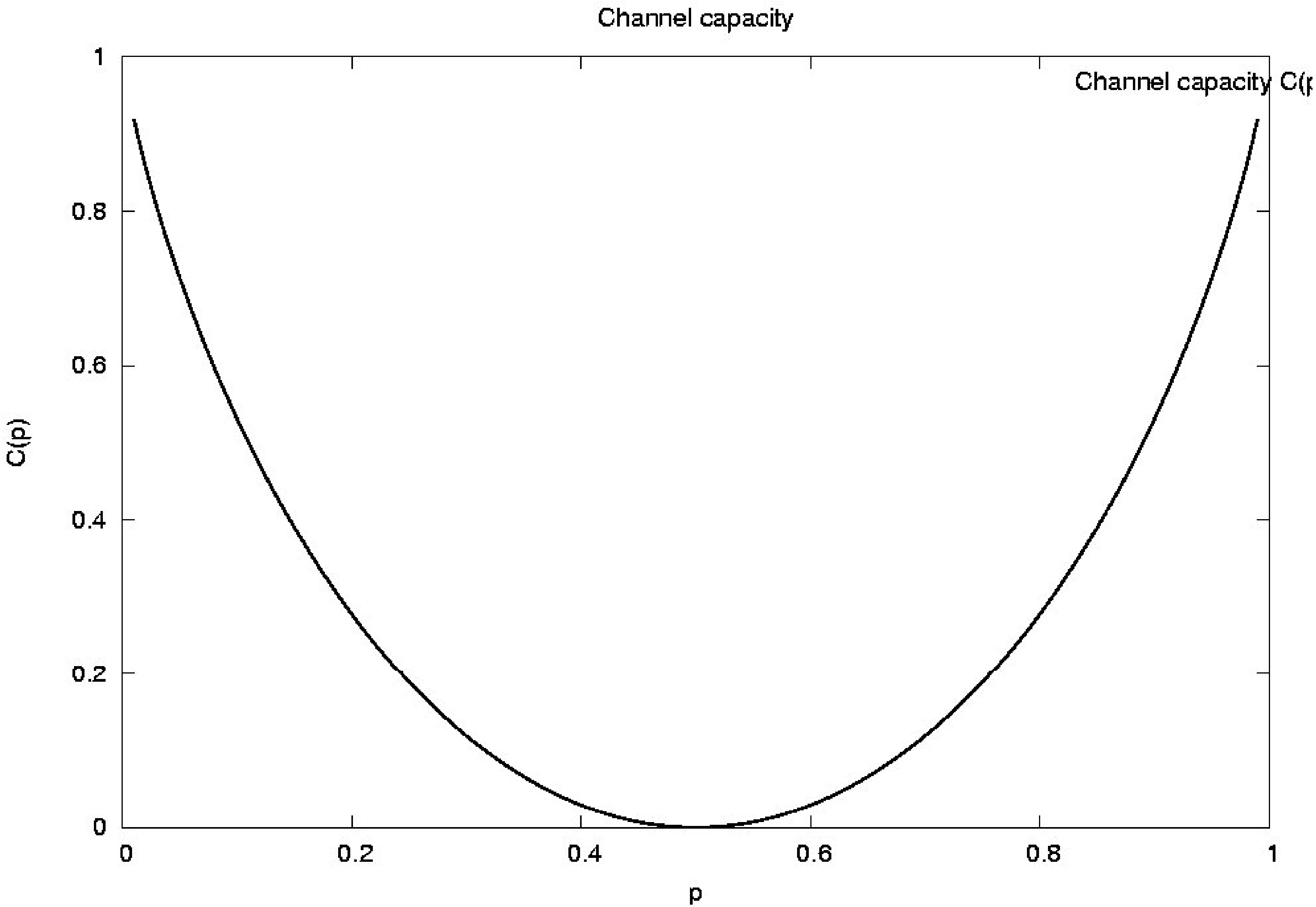
$$\because (p_A = 1/2$$

$$\to p_B = 1/2$$

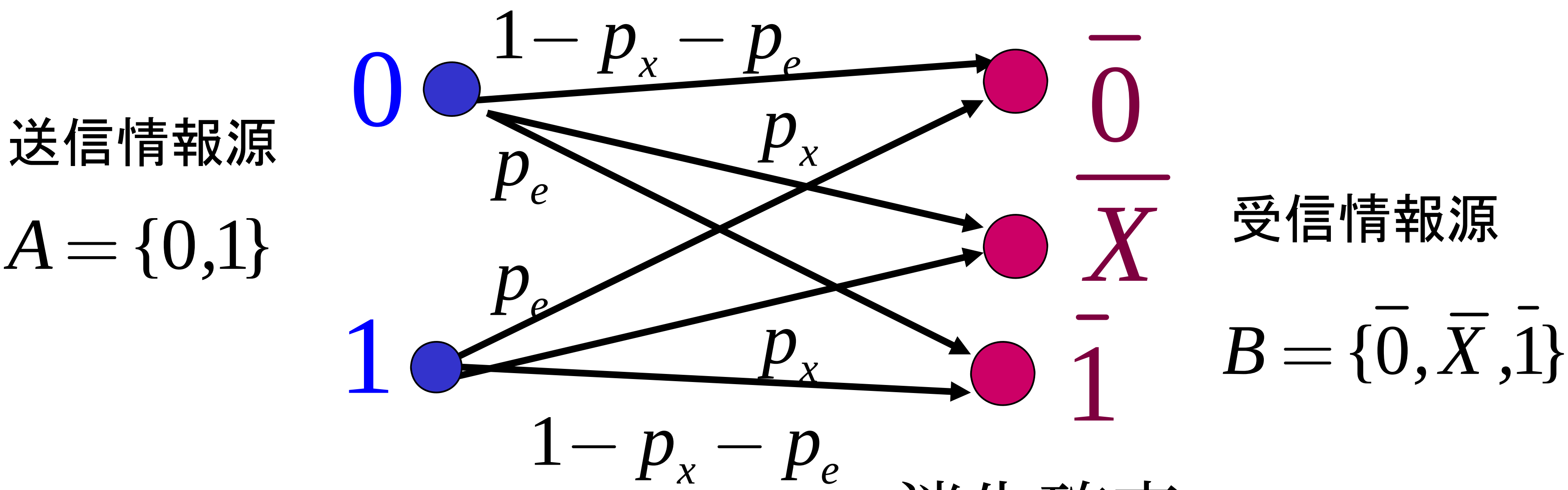
$$\to \mathcal{H}(p_B) = 1)$$

QED

2元対称通信路の通信路容量(概形)



2元対称消失通信路の通信路容量



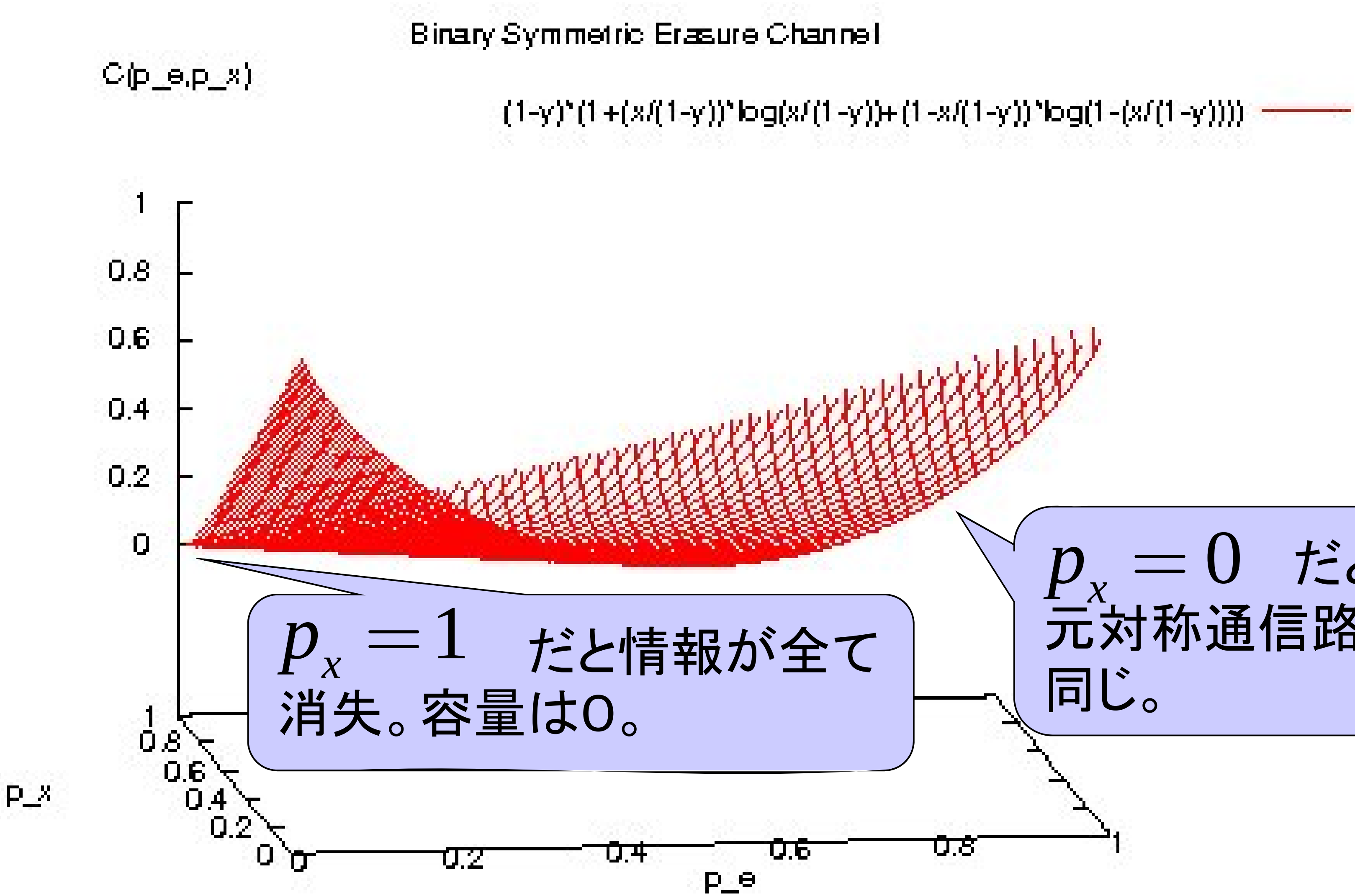
p_e:誤り確率　　　p_x:消失確率

$$T_X = \begin{bmatrix} 1 - p_x - p_e & p_x & p_e \\ p_e & p_x & 1 - p_x - p_e \end{bmatrix}$$

$$C_{T_X} = (1 - p_x)\left[1 - \mathcal{H}\left(\frac{p_e}{1 - p_x}\right)\right]$$

誤り確率と消失確率の関数。（導出は省略。）

2元対称消失通信路の通信路容量



$p_x = 1$ だと情報が全て消失。容量は0。

$p_x = 0$ だと2元対称通信路と同じ。

雑音のない通信路

（定義）雑音の無い通信路

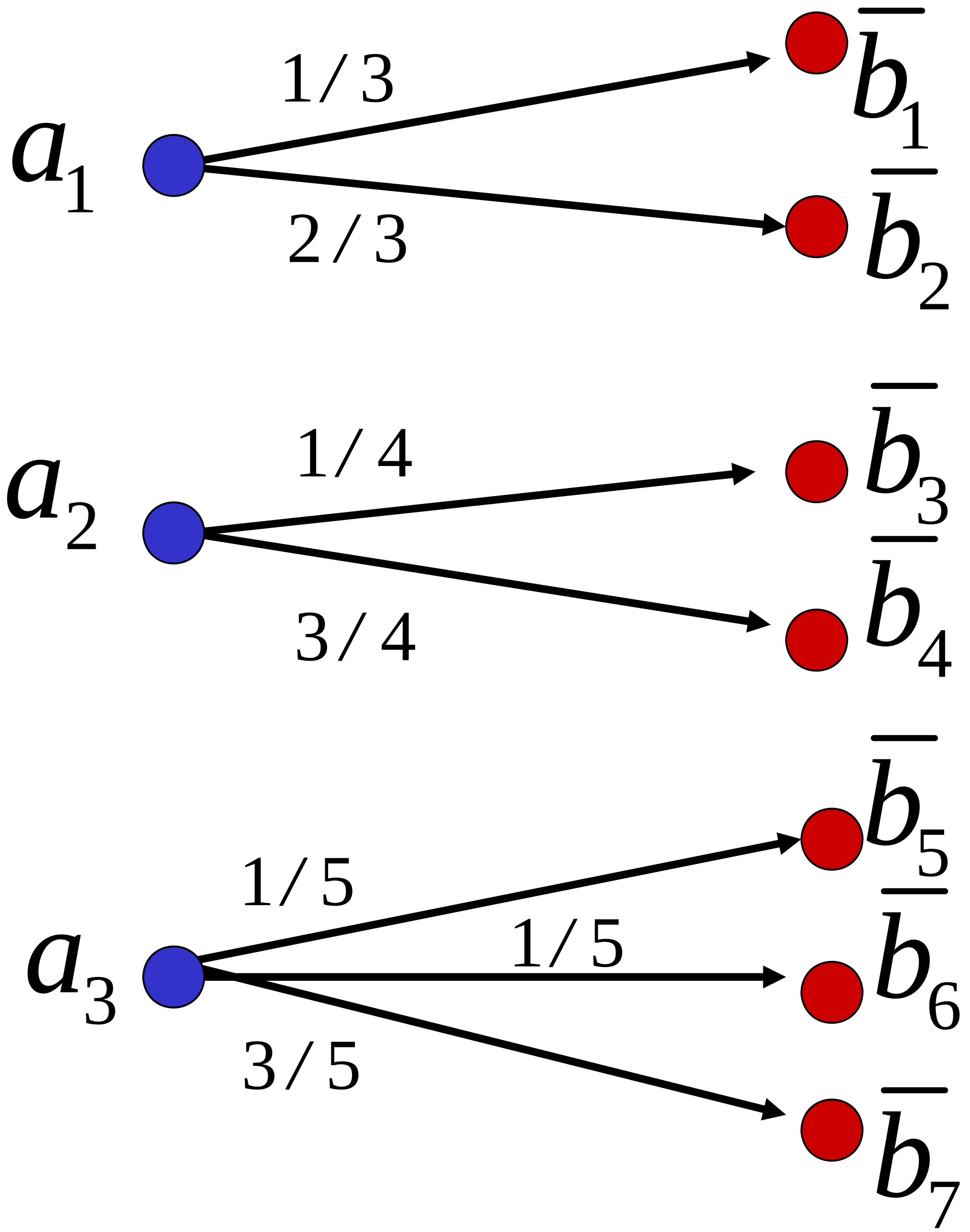
受信記号から送信記号が一意に確定できるような通信路を雑音の無い通信路という。

雑音の無い通信路の通信路行列

$$T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

列ベクトルが全て、1要素以外0。
（行ベクトルは確率ベクトル）

雑音の無い通信路の通信路線図



雑音がないので、受信記号から送信記号を特定できる。

雑音のない通信路の通信路容量

雑音の無い通信路では、受信記号を条件とする条件付き確率が必ず1または0となる。すなわち、

$$\forall \alpha \in A, \beta \in B \quad P(\alpha \mid \beta) = 1 \quad or \quad 0$$

$$\therefore \forall \beta \in B \quad H(A \mid \beta) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid \beta) \log P(\alpha \mid \beta) = 0$$

$$\therefore H(A \mid B) = \sum_{\beta \in A} P(\beta) H(A \mid \beta) = 0$$

よって、

$$I(A;B) = H(A) - H(A \mid B) = H(A)$$

したがって、

$$C = \max_{A} I(A;B) = \max_{A} H(A) = \log n$$

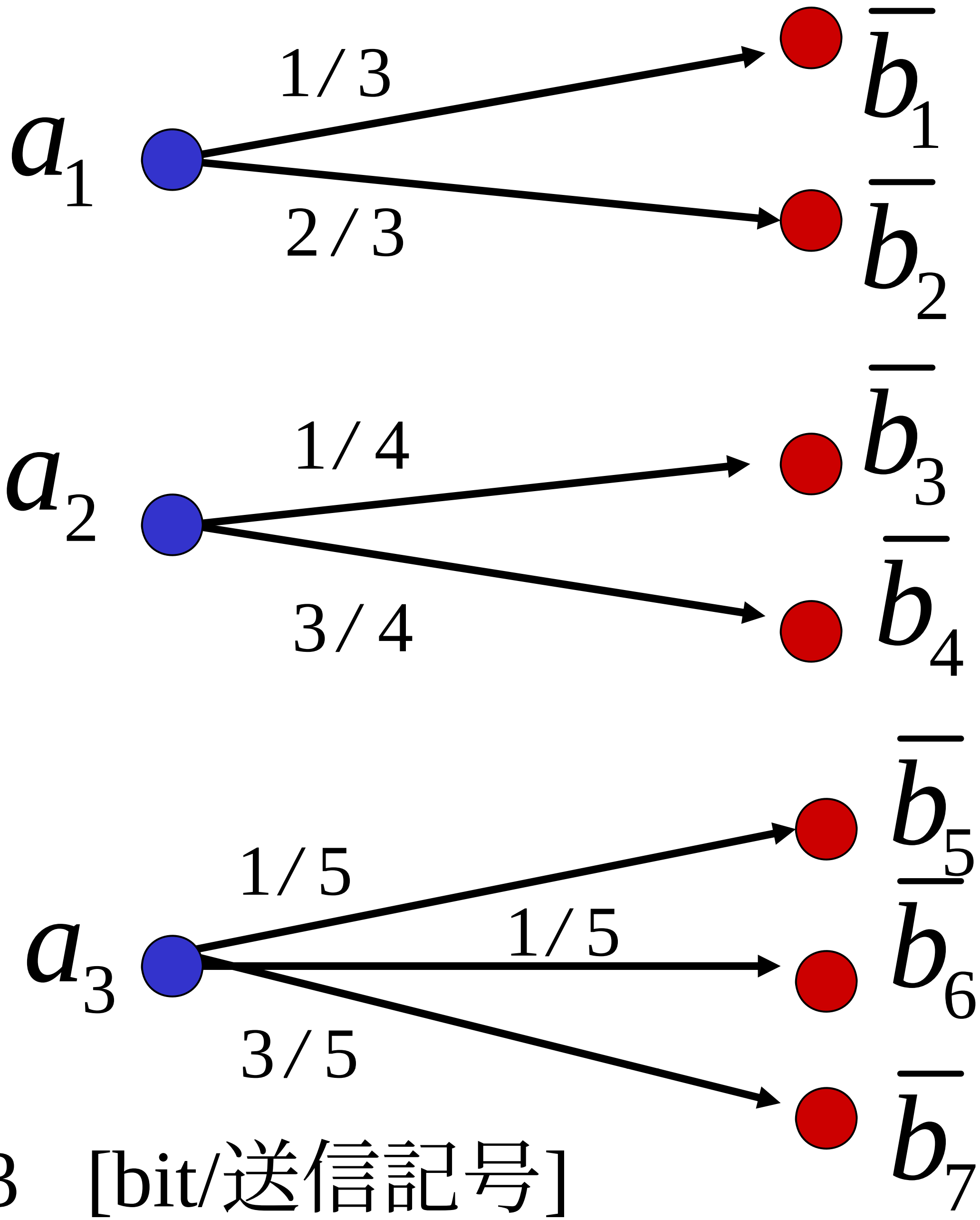
ただし、 $P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n)$

雑音の無い通信路の通信路容量例

$P(a_1)=1/3$

$P(a_2)=1/3$

$P(a_3)=1/3$



$log\,3$ [bit/送信記号]

練習

送信アルファベット $A = \{a_1, a_2\}$

受信アルファベット $B = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \overline{b_4}, \overline{b_5}\}$

通信路行列

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

で表わされる(雑音の無い)通信路の通信路容量 C_T と、
C_T を実現する際の送信情報源、および受信情報源を定めよ。

確定的通信路

（定義）確定的通信路

各送信記号が唯一つの受信記号に伝送されるような通信路を**確定的通信路**という。

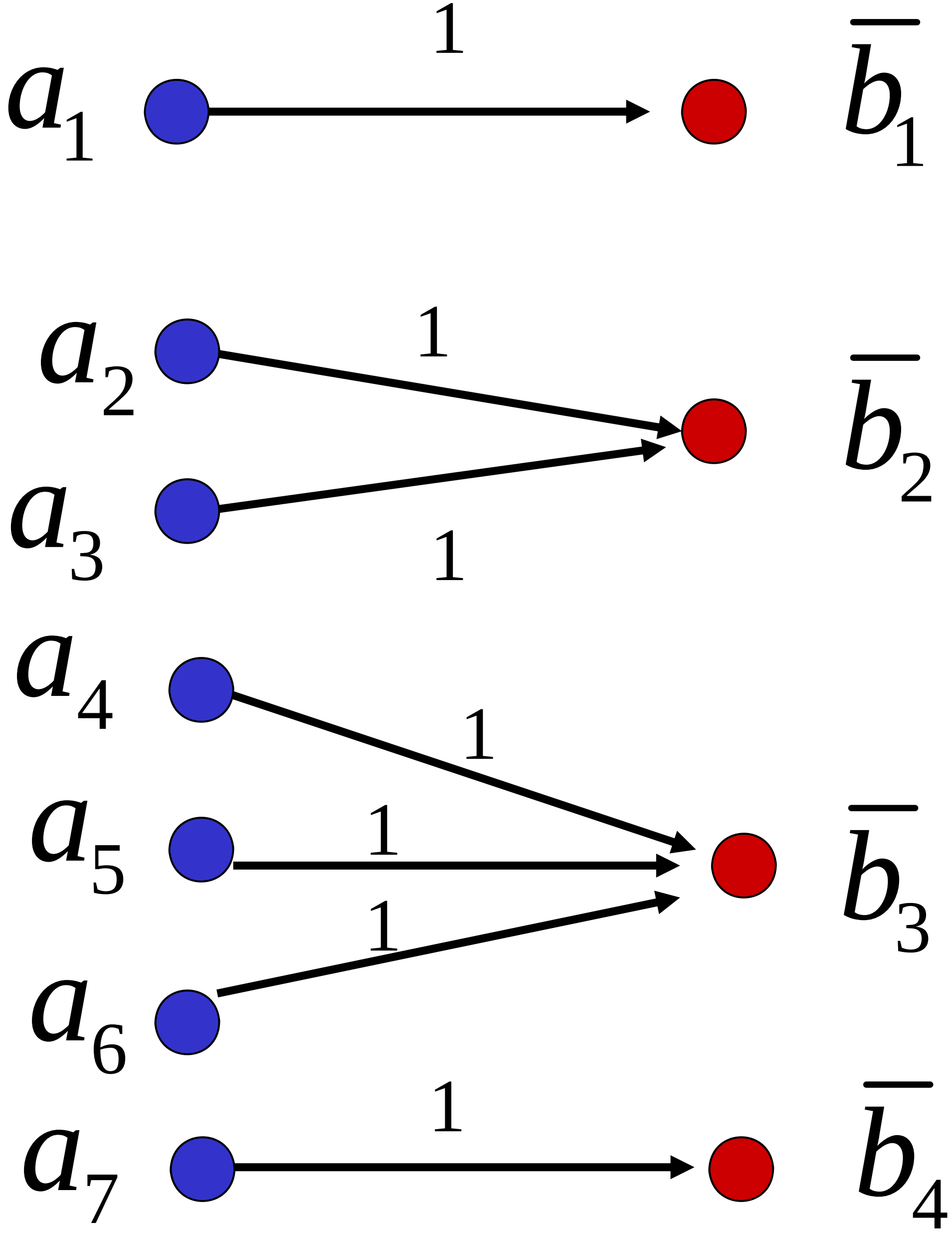
確定的通信路の通信路行列

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行ベクトルが全て、1要素以外0。
（行ベクトルは確率ベクトル）

確定的通信路の通信路線図

送信先の受信記号が1つに確定されるので確定的通信路



確定的通信路の通信路容量

順序に注意

確定的通信路では、送信記号を条件とする条件付き確率が必ず1または0となる。すなわち、

$$\forall \alpha \in A, \beta \in B \quad P(\beta|\alpha) = 1 \quad or \quad 0$$

$$\therefore \forall \alpha \in A \quad H(B|\alpha) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) log P(\beta|\alpha) = 0$$

$$\therefore H(B|A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha) = 0$$

よって、

$$I(A;B) = H(B) - H(B|A) = H(B)$$

したがって、

$$C = \max_{A} I(A;B) = \max_{A} H(B) = log\, m$$

ただし、 $P(b_1) = P(b_2) = \cdots = P(b_m)$

受信側の確率が均等になるように、送信記号の確率選べる。

確定的通信路の通信容量例

$P(a_1)=1/4$

$P(a_2)=1/8$

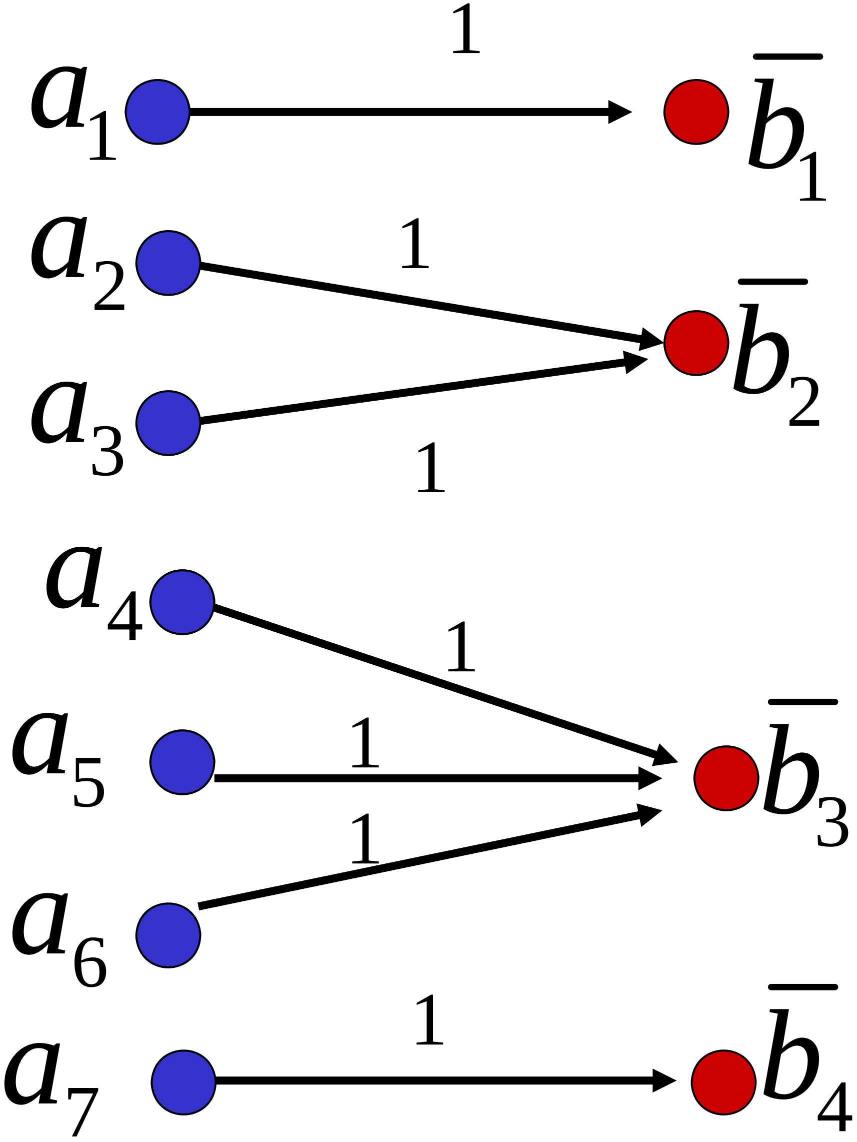
$P(a_3)=1/8$

$P(a_4)=1/12$

$P(a_5)=1/12$

$P(a_6)=1/12$

$P(a_7)=1/4$



$P(\bar{b}_1)=1/4$

$P(\bar{b}_2)=1/4$

$P(\bar{b}_3)=1/4$

$P(\bar{b}_4)=1/4$

$log\,4$ [bit/送信記号]

通信路容量を満足する送信情報源例2

$P(a_1) = 1/4$

$P(a_2) = 1/12$

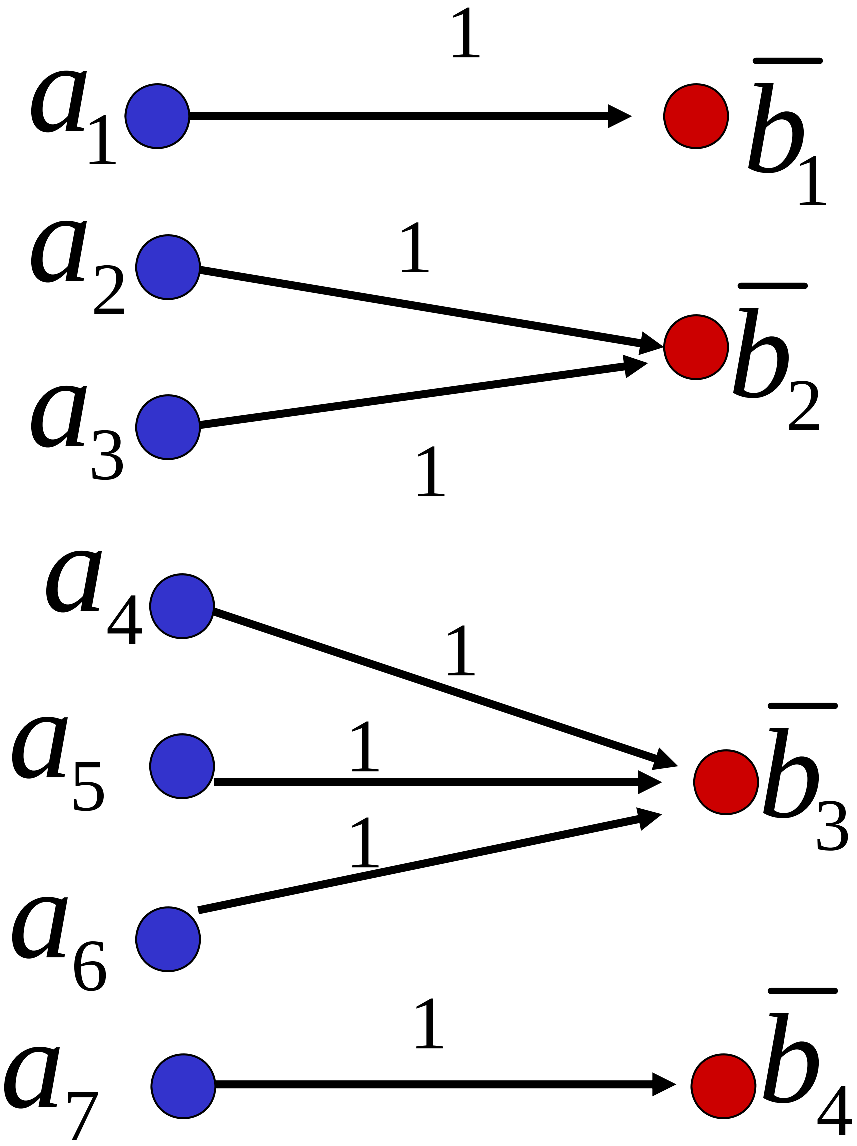
$P(a_3) = 2/12$

$P(a_4) = 1/24$

$P(a_5) = 2/24$

$P(a_6) = 3/24$

$P(a_7) = 1/4$



$P(\bar{b}_1) = 1/4$

$P(\bar{b}_2) = 1/4$

$P(\bar{b}_3) = 1/4$

$P(\bar{b}_4) = 1/4$

$\log 4$ [bit/送信記号]

練習

送信アルファベット $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

受信アルファベット $B = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}\}$

通信路行列

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表わされる(確定的)通信路の通信路容量 C_T と、
C_T を実現する際の送信情報源、および受信情報源を定めよ。