3.エントロピーの性質と各種情報量

1

エントロピーの性質

事象系
$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_n \\ P(a_1) & , & P(a_2) & , & \cdots & , & P(a_n) \end{Bmatrix}$$

のエントロピーは次式で定義される。

$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} P(a_i) \log P(a_i)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$0 \le H(A) \le \log n$$

ある事象が必ず起きるとき。
$a_1 = 1, a_2 = \cdots = a_n = 0$

全ての事象が等確率のとき。
$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$

前のスライドの式を導出するために、次の2つの事象系を考える。

カンマ“，”は“AND（かつ）”の意味

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_n \\ P_1 & , & P_2 & , & \cdots & , & P_n \end{Bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{Bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} Q_i = 1$$

3

補題１（lemma1）

$$-\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i \le -\sum_{i=1}^{n} P_i \log Q_i$$

エントロピー

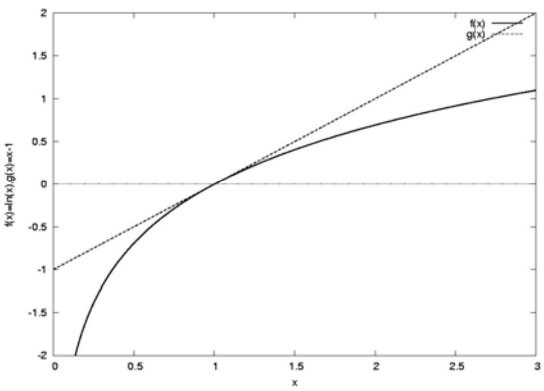
対数と係数の違いに注意する。

証明

$$左辺 - 右辺 = \sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i}$$
$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$

4

不等式の利用。 $\ln x \le x - 1$



$$\sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$
$$\le \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{Q_i}{P_i} - 1 \right)$$
$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} (Q_i - P_i)$$
$$= \frac{1}{\ln 2} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Q_i}_{1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_i}_{1} \right)$$
$$= 0$$

この変形で、

$$x = \frac{Q_i}{P_i}$$

として n回不等式を利用いる。

6

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i} \le 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\left(P_i \log \frac{1}{P_i} - P_i \log \frac{1}{Q_i}\right) \le 0$$

$$\therefore -\sum_{i=1}^{n}(P_i \log P_i) + \sum_{i=1}^{n}(P_i \log Q_i) \le 0$$

$$\therefore -\sum_{i=1}^{n}(P_i \log P_i) \le -\sum_{i=1}^{n}(P_i \log Q_i)$$

QED

7

エントロピー最大となる情報源

定理1

$$0 \le H(A) \le \log n$$

証明　（左の不等号）

各 $i, (1 \le i \le n)$ に対して、次式が成り立つ。

$$0 \le P(a_i) \le 1$$

$$\therefore 1 \le \frac{1}{P(a_i)}$$

$$\therefore 0 \le -\log P(a_i)$$

よって、

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} P(a_i) \log P(a_i) \ge 0$$

8

（右の不等号）

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ \frac{1}{n} & , & \frac{1}{n} & , & \cdots & , & \frac{1}{n} \end{Bmatrix}$$

とおく。補題1より、

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i &\le -\sum_{i=1}^{n} P_i \log Q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_i \log n \\ &= \log n \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right) \\ &= \log n \end{aligned}$$

QED

9

定理1より、全ての記号が均等に現れる情報源が最大のエントロピー（1記号あたりの平均情報量）を持つ。

しかし、実世界のアルファベットなどは、均等に現れない。

実世界の文章には、その分の冗長性が含まれている。
（実は、人間の理解においてある程度の冗長性があった方がよい。）

ある情報形態に対して、同じ情報量を持つより小さい（短い）情報表現を得ることを圧縮という。圧縮からもとの情報形態を得ることを解凍という。

10

練習

次の事象系のエントロピー（平均情報量）を求めよ。

（1）

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & b_3 & , & b_4 \\ \frac{1}{8} & , & \frac{1}{8} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$C = \begin{Bmatrix} c_1 & , & c_2 & , & c_3 & , & c_4 \\ \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

11

各種情報量

複数の事象系が互いに関係している場合に、それぞれの事象系に関する様々なエントロピー（平均情報量）が定義できる。

- 条件付きエントロピー
- 結合エントロピー
- 相互情報量

条件付き確率に基づいた平均情報量。

結合確率に基づいた平均情報量。

事象系同士の（情報量としての）関わりを表す。エントロピー、条件付きエントロピー、結合エントロピーにより定義される。

これらの情報量を例題を通じて調べたのちに、定義する。

12

例題

次のようなゲームを考える。

サイコロゲーム:

「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

この勝ち負けに関する情報を2つの事象系としてとらえる。

13

サイコロゲームの勝敗表

サイコロゲーム:「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

乙＼甲	1	2	3	4	5	6
1	△	○	○	○	○	○
2	×	△	○	○	○	○
3	×	×	△	○	○	○
4	×	×	×	△	○	○
5	×	×	×	×	△	○
6	×	×	×	×	×	△

甲

○:勝ち
△:引分け
×:負け

14

サイコロゲームより次の2つの事象系を考える。

事象系A:甲の勝負に関する事象系

$$A=\begin{Bmatrix} \bigcirc & , & \triangle & , & \times \\ \frac{15}{36} & , & \frac{6}{36} & , & \frac{15}{36} \end{Bmatrix}$$

この2つの事象系は独立ではなく、互いに密接に関係している。

事象系B:甲のサイコロの目に関する事象系

$$B=\begin{Bmatrix} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{Bmatrix}$$

15

補足1:条件付き確率

ある条件の下で事象がおこる確率を条件付き確率といい、

$P(事象 \mid 条件)$ と表す。

甲が3を出している条件の下で、甲が勝つ確率。

甲	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3			△			
4			×			
5			×			
6			×			

$$P(\bigcirc \mid 3)=\frac{2}{6}$$

$$P(\triangle \mid 3)=\frac{1}{6}$$

$$P(\times \mid 3)=\frac{3}{6}$$

16

補足2:同時確率(結合確率)

2つ以上の事象が同時におこる確率を同時確率(結合確率)という。

$P(事象1, 事象2)$ のように表す。

“And”の意味

甲が3を出ししかも勝つ確率。

甲	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3						
4						
5						
6						

$$P(\bigcirc, 3)=\frac{2}{36}$$

分母に注意する。

17

補足3:独立な事象における同時確率(結合確率)

定義

事象1と事象2の同時確率がそれぞれの事象の確率の積で表わされるとき、事象1と事象2は独立であるという。

$$P(事象1, 事象2)=P(事象1) \cdot P(事象2)$$

事象系1と事象系2の任意の2つの事象が独立のときに、事象系1と事象系2は独立である。

甲	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

事象系C:乙のサイコロの目に関する事象系

$$C=\begin{Bmatrix} 乙=1 & , & 乙=2 & , & 乙=3 & , & 乙=4 & , & 乙=5 & , & 乙=6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(甲=3, 乙=2) &= P(甲=3)P(乙=2) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

事象系Bと事象系Cは独立。

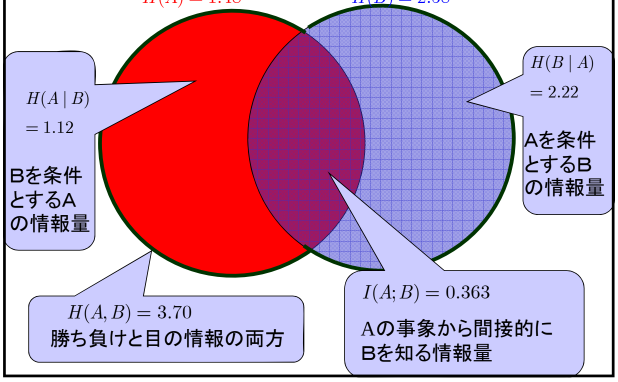
18

問題

確率を計算することにより、
事象系Aと事象系Bが独立でないことを示せ。

19

サイコロゲームにおける様々なエントロピー



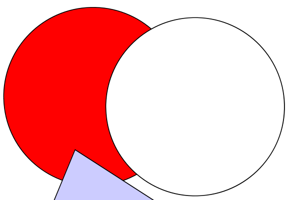
条件付エントロピー1(条件付エントロピーの定義)

甲の出た目の事象系を条件とする、
甲の勝ち負けの事象系の平均情報量

条件付確率で定義されるエントロピー

$$H(A \mid \beta) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid \beta) \log P(\alpha \mid \beta)$$

$$\begin{aligned} H(A \mid B) &= \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A \mid \beta) \\ &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid \beta) \log P(\alpha \mid \beta) \\ &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\alpha \mid \beta) \log P(\alpha \mid \beta) \\ &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha \mid \beta) \end{aligned}$$



Bを条件とすることによって、情報源Aの情報量がBと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

甲	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3			△			
4			×			
5			×			
6			×			

条件付エントロピーは、条件付き確率の平均の平均として定義される。
条件を1度固定しエントロピーを計算し、すべての条件で平均を求める。

$$H(A \mid 3) = -P(\bigcirc \mid 3) \log P(\bigcirc \mid 3) - P(\triangle \mid 3) \log P(\triangle \mid 3) - P(\times \mid 3) \log P(\times \mid 3)$$

$$\begin{aligned} H(A \mid B) &= P(1) H(A \mid 1) + P(2) H(A \mid 2) + P(3) H(A \mid 3) \\ &\quad + P(4) H(A \mid 4) + P(4) H(A \mid 4) + P(4) H(A \mid 4) \end{aligned}$$

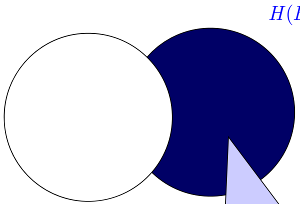
22

条件付エントロピー2

甲の勝ち負けの事象系を条件とする甲の目の事象系の平均情報量

$$H(B \mid \alpha) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \alpha) \log P(\beta \mid \alpha)$$

$$\begin{aligned} H(B \mid A) &= \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B \mid \alpha) \\ &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \alpha) \log P(\beta \mid \alpha) \\ &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\beta \mid \alpha) \log P(\beta \mid \alpha) \\ &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta \mid \alpha) \end{aligned}$$



Aを条件とすることによって、情報源Bの情報量がAと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

23

甲 乙	1	2	3	4	5	6
1		○	○	○	○	○
2			○	○	○	○
3				○	○	○
4					○	○
5						○
6						

$$P(3 \mid \bigcirc) = \frac{2}{15}$$

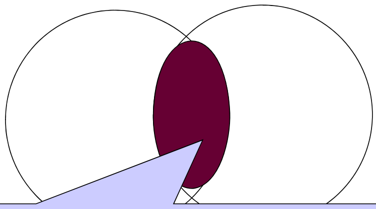
$$\begin{aligned} H(B \mid \bigcirc) &= -P(1 \mid \bigcirc) \log P(1 \mid \bigcirc) - P(2 \mid \bigcirc) \log P(2 \mid \bigcirc) - P(3 \mid \bigcirc) \log P(3 \mid \bigcirc) \\ &\quad - P(4 \mid \bigcirc) \log P(4 \mid \bigcirc) - P(5 \mid \bigcirc) \log P(5 \mid \bigcirc) - P(6 \mid \bigcirc) \log P(6 \mid \bigcirc) \end{aligned}$$

$$H(B \mid A) = P(\bigcirc) H(B \mid \bigcirc) + P(\triangle) H(B \mid \triangle) + P(\times) H(B \mid \times)$$

24

相互情報量

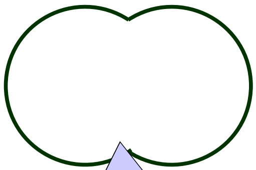
$$I(A;B)=H(A)-H(A\mid B)=H(B)-H(B\mid A)=I(B;A)$$



AとBが互いに関係している情報量。
Aを知ることによって、間接的にBに関する情報が得られる。
同様に、Bを知ることによって、間接的にAの情報が得られる。
これらは、等しい。

結合エントロピー（同時エントロピー）

$$H(A,B)=-\sum_{\alpha\in A,\beta\in B}P(\alpha,\beta)\log P(\alpha,\beta)=H(A)+H(B)-I(A;B)$$



α と β が同時に起こる確率。
結合確率。

$$\sum_{\alpha\in A,\beta\in B}P(\alpha,\beta)=1$$

AとBがのすべての情報量。
Aだけの情報量と、Bだけの情報量を加えて、
関係する相互情報量を減ずる。

26

各種エントロピーの計算。
まず、2つの事象系のエントロピーを求める。

$$H(A)=-\sum_{\alpha\in A}P(\alpha)\log P(\alpha)$$
$$=\frac{15}{36}\log\frac{36}{15}+\frac{6}{36}\log\frac{36}{6}+\frac{15}{36}\log\frac{36}{15}$$
$$=\frac{5}{6}(\log 4+\log 3-\log 5)+\frac{1}{6}(\log 2+\log 3)$$
$$=\frac{11}{6}+\log 3-\frac{5}{6}\log 5$$
$$\simeq(1.833)+(1.585)-(1.93)$$
$$=1.4833\cdots$$

$$H(B)=-\sum_{\beta\in B}P(\beta)\log P(\beta)$$
$$=\frac{1}{6}\log 6+\frac{1}{6}\log 6+\frac{1}{6}\log 6+\frac{1}{6}\log 6+\frac{1}{6}\log 6+\frac{1}{6}\log 6$$
$$=\log 6$$
$$\simeq 2.5849\cdots$$

27

次に、Bの事象系において、事象が既知である場合の個々の
エントロピーを求める。

$$H(A\mid 1)=-\sum_{\alpha\in A}P(\alpha\mid 1)\log P(\alpha\mid 1)$$
$$=-P(\bigcirc\mid 1)\log P(\bigcirc\mid 1)-P(\triangle\mid 1)\log P(\triangle\mid 1)-P(\times\mid 1)P(\times\mid 1)$$
$$=0+\frac{1}{6}\log 6+\frac{5}{6}\log\frac{6}{5}$$

$$H(A\mid 2)=-\sum_{\alpha\in A}P(\alpha\mid 2)\log P(\alpha\mid 2)$$
$$=\frac{1}{6}\log 6+\frac{1}{6}\log 6+\frac{4}{6}\log\frac{6}{4}$$

$$H(A\mid 3)=-\sum_{\alpha\in A}P(\alpha\mid 3)\log P(\alpha\mid 3)$$
$$=\frac{2}{6}\log\frac{6}{2}+\frac{1}{6}\log 6+\frac{3}{6}\log\frac{6}{3}$$

28

$$H(A\mid 4)=-\sum_{\alpha\in A}P(\alpha\mid 4)\log P(\alpha\mid 4)$$
$$=\frac{3}{6}\log\frac{6}{3}+\frac{1}{6}\log 6+\frac{2}{6}\log\frac{6}{2}$$

$$H(A\mid 5)=-\sum_{\alpha\in A}P(\alpha\mid 5)\log P(\alpha\mid 5)$$
$$=\frac{4}{6}\log\frac{6}{4}+\frac{1}{6}\log 6+\frac{1}{6}\log 6$$

$$H(A\mid 6)=-\sum_{\alpha\in A}P(\alpha\mid 6)\log P(\alpha\mid 6)$$
$$=\frac{5}{6}\log\frac{6}{5}+\frac{1}{6}\log 6+0$$

29

以上より、事象系Bを条件とする、条件付エントロピー $H(A\mid B)$
が求められる。

$$H(A\mid B)=\sum_{\beta\in B}P(\beta)H(A\mid\beta)$$
$$=\frac{1}{6}H(A\mid 1)+\frac{1}{6}H(A\mid 2)+\frac{1}{6}H(A\mid 3)+\frac{1}{6}H(A\mid 4)+\frac{1}{6}H(A\mid 5)+\frac{1}{6}H(A\mid 6)$$
$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{6}\log 6+\frac{5}{6}\log\frac{6}{5})+\frac{1}{3}(\frac{2}{6}\log 6+\frac{4}{6}\log\frac{6}{4})+\frac{1}{3}(\frac{3}{6}\log\frac{6}{3}+\frac{1}{6}\log 6+\frac{2}{6}\log\frac{6}{2})$$
$$=\frac{1}{3}(3\log 6-\frac{5}{6}\log 5-\frac{2}{3}\log 4-\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{3}\log 2)$$
$$=\log 6-\frac{5}{18}\log 5-\frac{1}{6}\log 3-\frac{5}{9}$$
$$=\frac{4}{9}+\frac{5}{6}\log 3-\frac{5}{18}\log 5$$
$$\simeq(0.444)+(1.321)-(0.645)$$
$$=1.12$$

30

今度は、逆にAの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$H(B\mid ○) = -\sum_{\beta\in B} P(\beta\mid ○)\log P(\beta\mid ○)$$
$$= -P(1\mid ○)\log P(1\mid ○) - P(2\mid ○)\log P(2\mid ○) - \cdots - P(6\mid ○)\log P(6\mid ○)$$
$$= 0 + \frac{1}{15}\log 15 + \frac{2}{15}\log\frac{15}{2} + \frac{3}{15}\log\frac{15}{3} + \frac{4}{15}\log\frac{15}{4} + \frac{5}{15}\log\frac{15}{5}$$
$$= \log 15 - \frac{2}{15}\log 2 - \frac{3}{15}\log 3 - \frac{4}{15}\log 4 - \frac{5}{15}\log 5$$
$$= \frac{12}{15}\log 3 + \frac{10}{15}\log 5 - \frac{10}{15}$$
$$= \frac{4}{5}\log 3 + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{2}{3}$$

31

$$H(B\mid △) = -\sum_{\beta\in B} P(\beta\mid △)\log P(\beta\mid △)$$
$$= 6\times\frac{1}{6}\log 6$$
$$= \log 6$$
$$H(B\mid ×) = -\sum_{\beta\in B} P(\beta\mid ×)\log P(\beta\mid ×)$$
$$= \frac{4}{5}\log 3 + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{2}{3}$$

以上より、事象系Aを条件とする、条件付エントロピー $H(B\mid A)$ が求められる。

$$H(B\mid A) = \sum_{\alpha\in A} P(\alpha)H(B\mid\alpha)$$
$$= \frac{30}{36}\left(\frac{4}{5}\log 3 + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6}\log 6$$
$$= \frac{5}{6}\log 3 + \frac{5}{9}\log 5 - \frac{7}{18}$$
$$\simeq (1.321) + (1.290) - (0.389)$$
$$= 2.221$$

32

$$H(A) - H(A\mid B)$$
$$= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6}\log 5\right) - \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5\right)$$
$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$
$$H(B) - H(B\mid A)$$
$$= \log 6 - \left(\frac{5}{6}\log 3 + \frac{5}{9}\log 5 - \frac{7}{18}\right)$$
$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$
$$\therefore I(A;B) = H(A) - H(A\mid B) = H(B) - H(B\mid A)$$
$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$
$$\simeq (1.389) + (0.264) - (1.290)$$
$$= 0.363$$

33

結合エントロピーを求めるためには、A、Bの積の事象系を考えても良い。サイコロゲームの勝敗表より以下の事象系が得られる。

$$(A,B) = \left\{\begin{array}{cccccc}
(○,1), & (△,1), & (×,1), & (○,2), & (△,2), & (×,2), \\
0, & \frac{1}{36}, & \frac{5}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{4}{36}, \\
(○,3), & (△,3), & (×,3), & (○,4), & (△,4), & (×,4), \\
\frac{2}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{3}{36}, & \frac{3}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{2}{36}, \\
(○,5), & (△,5), & (×,5), & (○,6), & (△,6), & (×,6) \\
\frac{4}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{1}{36}, & \frac{5}{36}, & \frac{1}{36}, & 0
\end{array}\right\}$$

34

$$H(A,B) = -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha,\beta)$$
$$= \frac{8}{36}\log 36 + \frac{4}{36}\log\frac{36}{2} + \frac{6}{36}\log\frac{36}{3} + \frac{8}{36}\log\frac{36}{4} + \frac{10}{36}\log\frac{36}{5}$$
$$= \frac{36}{36}\log 36 - \frac{1}{9}\log 2 - \frac{1}{6}\log 3 - \frac{2}{9}\log 4 - \frac{5}{18}\log 5$$
$$= \frac{13}{9} + \frac{11}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5$$

$$H(A,B) = H(A) + H(B) - I(A;B)$$
$$= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6}\log 5\right) + (\log 6) - \left(\frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5\right)$$
$$= \frac{13}{9} + \frac{11}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5$$

35

練習

コインゲームを考える。

「甲と乙がそれぞれコインを投げる。
表より裏が強いとする。」

このゲームを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系 （勝負）:
「甲の勝負けを表す事象系」

事象系 （裏表）:
「甲の出したコインの裏表を表す事象系」

次の各種エントロピーを求めよ。

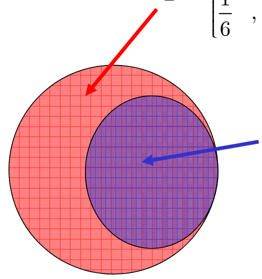
$$H(勝負), H(裏表), H(勝負\mid 裏表), H(裏表\mid 勝負), I(勝負;裏表)$$

36

部分的な情報源

サイコロを投げて出た目に従って、以下の2つの情報源を考える。

$$B=\begin{Bmatrix}1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6\\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6}\end{Bmatrix}$$



$$D=\begin{Bmatrix}\text{偶数} & , & \text{奇数}\\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2}\end{Bmatrix}$$

37

$$H(B)=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\log 6=\log 6\simeq 2.58[bit\,/\,\text{記号}]$$

$$H(D)=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\log 2=\log 2=1[bit\,/\,\text{記号}]$$

$$H(B\mid\text{偶数})=\underbrace{0}_{1}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{2}+\underbrace{0}_{3}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{4}+\underbrace{0}_{5}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{6}=\log 3$$

$$H(B\mid\text{奇数})=\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{1}+\underbrace{0}_{2}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{3}+\underbrace{0}_{4}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{5}+\underbrace{0}_{6}=\log 3$$

$$H(B\mid D)=\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{2}\log 3=\log 3\simeq 1.58[bit\,/\,\text{記号}]$$

$$I(B;D)=H(B)-H(B\mid D)=1[bit\,/\,\text{記号}]$$

Dのエントロピーと等しい。

38

$$I(D;B)=H(D)-H(D\mid B)$$

$$\therefore H(D\mid B)=H(D)-I(D;B)=0$$

Bを条件とすれば、Dに関する残された情報が無いことを意味する。すなわち、サイコロの目がわかれば、偶数か奇数かもわかる。

$$H(D\mid 1)=\underbrace{-1\log 1}_{\text{奇数}}\underbrace{-0\log 0}_{\text{偶数}}=0$$

$$\vdots$$

$$H(D\mid 6)=\underbrace{-0\log 0}_{\text{奇数}}\underbrace{-1\log 1}_{\text{偶数}}=0$$

$$\therefore H(D\mid B)=\sum_{\alpha\in B}P(\alpha)H(D\mid\alpha)=0$$

39

練習

試行T「トランプから1枚カードを引く」

この試行Tを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系 （数）:
「引いたカードの数」

事象系 （絵札）:
「引いたカードが絵札かどうか」

次の各種エントロピーを求めよ。

$$H(\text{数}),H(\text{絵札}),H(\text{数}\mid\text{絵札}),H(\text{絵札}\mid\text{数}),I(\text{数};\text{絵札})$$

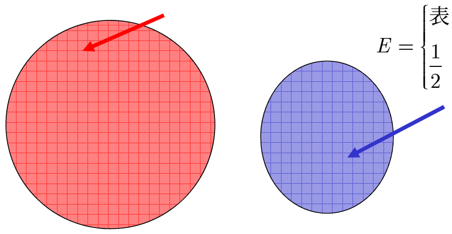
40

独立な情報源

サイコロを投げて得られる情報源と、コインを投げて得られる情報源を考える。

$$B=\begin{Bmatrix}1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6\\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6}\end{Bmatrix}$$

$$E=\begin{Bmatrix}\text{表} & , & \text{裏}\\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2}\end{Bmatrix}$$



41

$$H(B)=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\log 6=\log 6\simeq 2.58[bit\,/\,\text{記号}]$$

$$H(E)=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\log 2=\log 2=1[bit\,/\,\text{記号}]$$

$$H(B\mid\text{表})=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\log 6=\log 6$$

$$H(B\mid\text{裏})=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\log 6=\log 6$$

$$H(B\mid E)=\frac{1}{2}\log 6+\frac{1}{2}\log 6=\log 6$$

$$I(B;E)=H(B)-H(B\mid E)=0[bit\,/\,\text{記号}]$$

コインの試行からは、サイコロに関する情報が得られないことを意味する。

42

$$I(E;B) = H(E) - H(E \mid B)$$
$$H(E \mid B) = H(E) - I(E;B) = \log 2 = 1[bit\,/\,記号]$$

Bを条件としても、Eに関する平均情報量に変化がない。

43

練習

試行T「トランプから1枚カードを引く」

この試行Tを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系 （数）:
「引いたカードの数」

事象系 （マーク）:
「引いたカードがマーク」

次の各種エントロピーを求めよ。

$$H(数), H(マーク), H(数 \mid マーク), H(マーク \mid 数), I(数;マーク)$$

44