

### 3. エントロピーの性質と各種情報量

# エントロピーの性質

事象系  $A = \left\{ \begin{array}{cccc} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_n \\ P(a_1) & , & P(a_2) & , & \cdots & , & P(a_n) \end{array} \right\}$

のエントロピーは次式で定義される。

$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) = -\sum_{k=1}^n P(a_k) \log P(a_k)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

ある事象が必ず起きるとき。

$$a_1 = 1, a_2 = \cdots = a_n = 0$$

全ての事象が等確率のとき。

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$$

前のスライドの式を導出するために、  
次の2つの事象系を考える。

カンマ“,”は  
“AND(かつ)”  
の意味

$$A = \left\{ \begin{array}{cccc} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_n \\ P_1 & , & P_2 & , & \cdots & , & P_n \end{array} \right\}, \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$B = \left\{ \begin{array}{cccc} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{array} \right\}, \quad \sum_{i=1}^n Q_i = 1$$

# 補題1 (lemma1)

$$-\sum_{i=1}^n P_i \log P_i \leq -\sum_{i=1}^n P_i \log Q_i$$

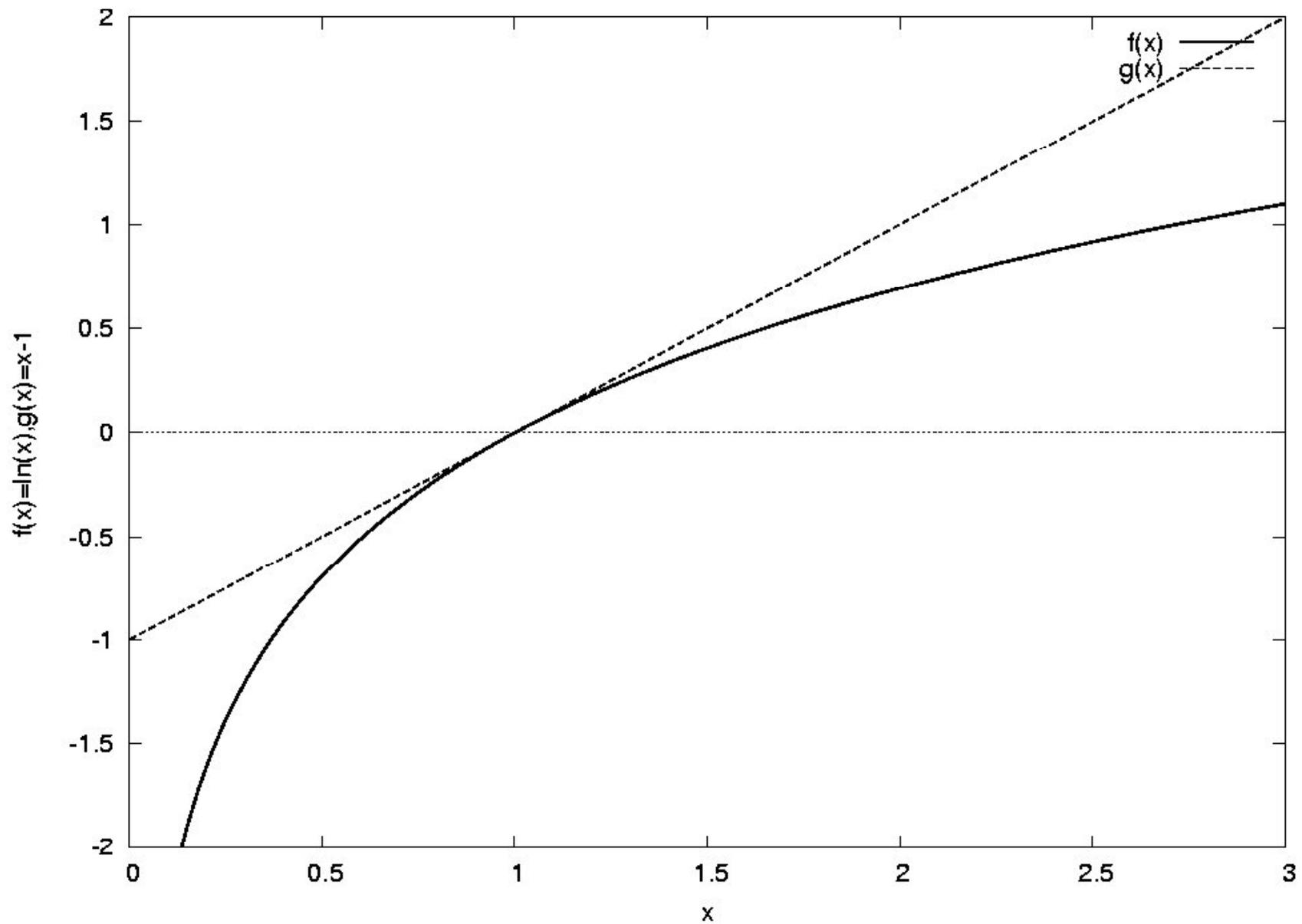
エントロピー

対数と係数の  
違いに注意する。

証明

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= \sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \ln \frac{Q_i}{P_i} \end{aligned}$$

不等式の利用。  $\ln x \leq x - 1$



$$\sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$

$$\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \left( \frac{Q_i}{P_i} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n (Q_i - P_i)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n Q_i}_1 - \underbrace{\sum_{i=1}^n P_i}_1 \right)$$

$$= 0$$

この変形で、

$$x = \frac{Q_i}{P_i}$$

として  $n$  回不等式を利用する。

$$\sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} \leq 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \left( P_i \log \frac{1}{P_i} - P_i \log \frac{1}{Q_i} \right) \leq 0$$

$$\therefore -\sum_{i=1}^n (P_i \log P_i) + \sum_{i=1}^n (P_i \log Q_i) \leq 0$$

$$\therefore -\sum_{i=1}^n (P_i \log P_i) \leq -\sum_{i=1}^n (P_i \log Q_i)$$

*QED*

# エントロピー最大となる情報源

定理1

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

証明 (左の不等号)

各  $i, (1 \leq i \leq n)$  に対して、次式が成り立つ。

$$0 \leq P(a_i) \leq 1$$

$$\therefore 1 \leq \frac{1}{P(a_i)}$$

$$\therefore 0 \leq -\log P(a_i)$$

よって、

$$H(A) = -\sum_{i=1}^n P(a_i) \log P(a_i) \geq 0$$

(右の不等号)

$$B = \left\{ \begin{array}{cccc} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccc} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ \frac{1}{n} & , & \frac{1}{n} & , & \cdots & , & \frac{1}{n} \end{array} \right\}$$

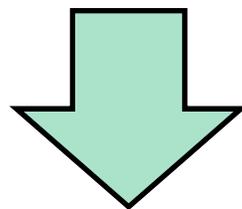
とおく。補題1より、

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n P_i \log P_i &\leq -\sum_{i=1}^n P_i \log Q_i \\ &= \sum_{i=1}^n P_i \log n \\ &= \log n \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \\ &= \log n \end{aligned}$$

**QED**

定理1より、全ての記号が均等に現れる情報源が最大のエントロピー(1記号あたりの平均情報量)を持つ。

しかし、実世界のアルファベットなどは、均等に現れない。



実世界の文章には、その分の冗長性が含まれている。  
(実は、人間の理解においてある程度の冗長性があった方がよい。)

ある情報形態に対して、同じ情報量を持つより小さい(短い)情報表現を得ることを圧縮という。圧縮からもとの情報形態を得ることを解凍という。

# 練習

次の事象系のエントロピー(平均情報量)を求めよ。

(1)

$$A = \left\{ \begin{array}{cccc} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \end{array} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{cccc} b_1 & , & b_2 & , & b_3 & , & b_4 \\ \frac{1}{8} & , & \frac{1}{8} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{cccc} c_1 & , & c_2 & , & c_3 & , & c_4 \\ \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

# 各種情報量

複数の事象系が互いに関係している場合に、それぞれの事象系に関する様々なエントロピー(平均情報量)が定義できる。

- 条件付きエントロピー
- 結合エントロピー
- 相互情報量

条件付き確率に基づいた平均情報量。

結合確率に基づいた平均情報量。

事象系同士の(情報量としての)関わりを表す。エントロピー、条件付きエントロピー、結合エントロピーにより定義される。

これらの情報量を例題を通じて調べたのちに、定義する。

# 例題

次のようなゲームを考える。

サイコロゲーム:

「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

この勝ち負けに関する情報を2つの事象系としてとらえる。

# サイコロゲームの勝敗表

サイコロゲーム:「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

乙 \ 甲	1	2	3	4	5	6
1	△	○	○	○	○	○
2	×	△	○	○	○	○
3	×	×	△	○	○	○
4	×	×	×	△	○	○
5	×	×	×	×	△	○
6	×	×	×	×	×	△

甲  
○:勝ち  
△:引分け  
×:負け

サイコロゲームより次の2つの事象系を考える。

事象系A: 甲の勝負に関する事象系

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{○, ○, ×} \\ \frac{15}{36}, \frac{6}{36}, \frac{15}{36} \end{array} \right\}$$

この2つの事象系は独立ではなく、互いに密接に関係している。

事象系B: 甲のサイコロの目に関する事象系

$$B = \left\{ \begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

# 補足1: 条件付き確率

ある条件の下で事象がおこる確率を条件付き確率といい、

$P(\text{事象} | \text{条件})$  と表す。

甲 \	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3			△			
4			×			
5			×			
6			×			

甲が3を出している条件の下で、甲が勝つ確率。

$$P(\text{○} | 3) = \frac{2}{6}$$

$$P(\text{△} | 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{×} | 3) = \frac{3}{6}$$

## 補足2: 同時確率(結合確率)

2つ以上の事象が同時におこる確率を同時確率(結合確率)という。

$P(\text{事象1}, \text{事象2})$  のように表す。

“And”の意味

甲が3を出してしかも  
勝つ確率。

甲	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3						
4						
5						
6						

$$P(\text{3}) = \frac{2}{36}$$

分母に注意する。

## 補足3: 独立な事象における同時確率(結合確率)

### 定義

事象1と事象2の同時確率がそれぞれの事象の確率の積で表わされるとき、事象1と事象2は**独立**であるという。

$$P(\text{事象1}, \text{事象2}) = P(\text{事象1}) \cdot P(\text{事象2})$$

事象系1と事象系2の任意の2つの事象が独立のときに、事象系1と事象系2は**独立**である。

甲 \ 乙	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

事象系C: 乙のサイコロの目に関する事象系

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \text{乙} = 1, \text{乙} = 2, \text{乙} = 3, \text{乙} = 4, \text{乙} = 5, \text{乙} = 6 \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

$$P(\text{甲} = 3, \text{乙} = 2) = P(\text{甲} = 3)P(\text{乙} = 2)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{36}$$

事象系Bと事象系Cは独立。

# 問題

確率を計算することにより、  
事象系Aと事象系Bが独立でないことを示せ。

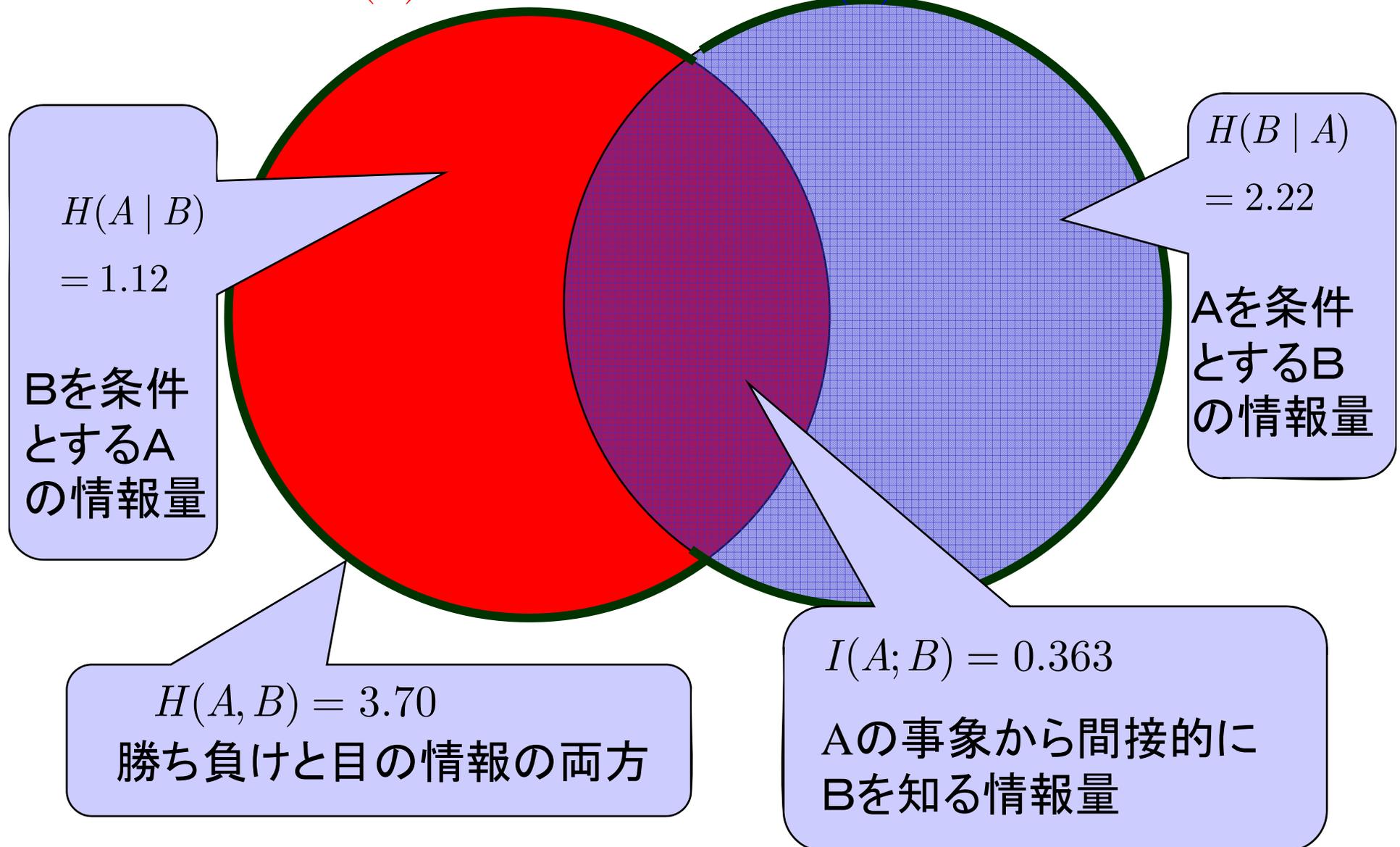
# サイコロゲームにおける様々なエントロピー

甲の勝負けの情報

$$H(A) = 1.48$$

甲の出た目の情報

$$H(B) = 2.58$$



# 条件付エントロピー1(条件付エントロピーの定義)

甲の出た目の事象系を条件とする、  
甲の勝ち負けの事象系の平均情報量

$$H(A | \beta) = - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | \beta) \log P(\alpha | \beta)$$

条件付確率で定義されるエントロピー

$$H(A | B) = \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A | \beta)$$

$$= - \sum_{\beta \in B} P(\beta) \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | \beta) \log P(\alpha | \beta)$$

$$= - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\alpha | \beta) \log P(\alpha | \beta)$$

$$= - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha | \beta)$$

Bを条件とすることによって、情報源Aの情報量がBと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

甲 \	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3			△			
4			×			
5			×			
6			×			

条件付エントロピーは、条件付き確率の平均の平均として定義される。条件を1度固定しエントロピーを計算し、すべての条件で平均を求める。

$$H(A | 3) = -P(\text{○}|3) \log P(\text{○}|3) - P(\text{△}|3) \log P(\text{△}|3) - P(\text{×}|3) \log P(\text{×}|3)$$

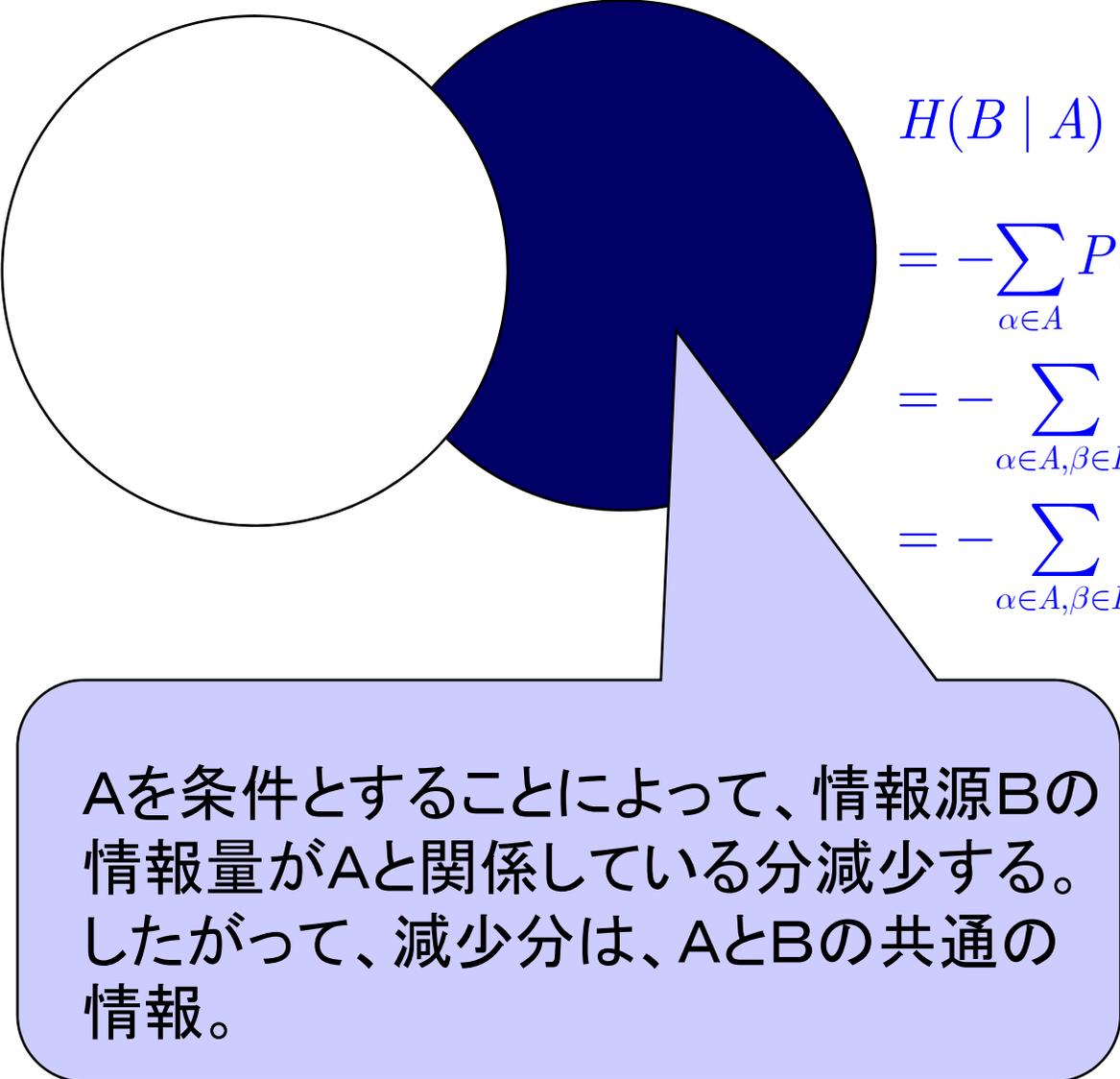
$$H(A | B) = P(1)H(A | 1) + P(2)H(A | 2) + P(3)H(A | 3) \\ + P(4)H(A | 4) + P(4)H(A | 4) + P(4)H(A | 4)$$

# 条件付エントロピー<sup>o</sup>-2

甲の勝ち負けの事象系を条件とする甲の目の事象系の平均情報量

$$H(B | \alpha) = - \sum_{\beta \in B} P(\beta | \alpha) \log P(\beta | \alpha)$$

$$\begin{aligned} H(B | A) &= \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B | \alpha) \\ &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta | \alpha) \log P(\beta | \alpha) \\ &= - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\beta | \alpha) \log P(\beta | \alpha) \\ &= - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta | \alpha) \end{aligned}$$



Aを条件とすることによって、情報源Bの情報量がAと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

甲 \ 乙	1	2	3	4	5	6
1		○	○	○	○	○
2			○	○	○	○
3				○	○	○
4					○	○
5						○
6						

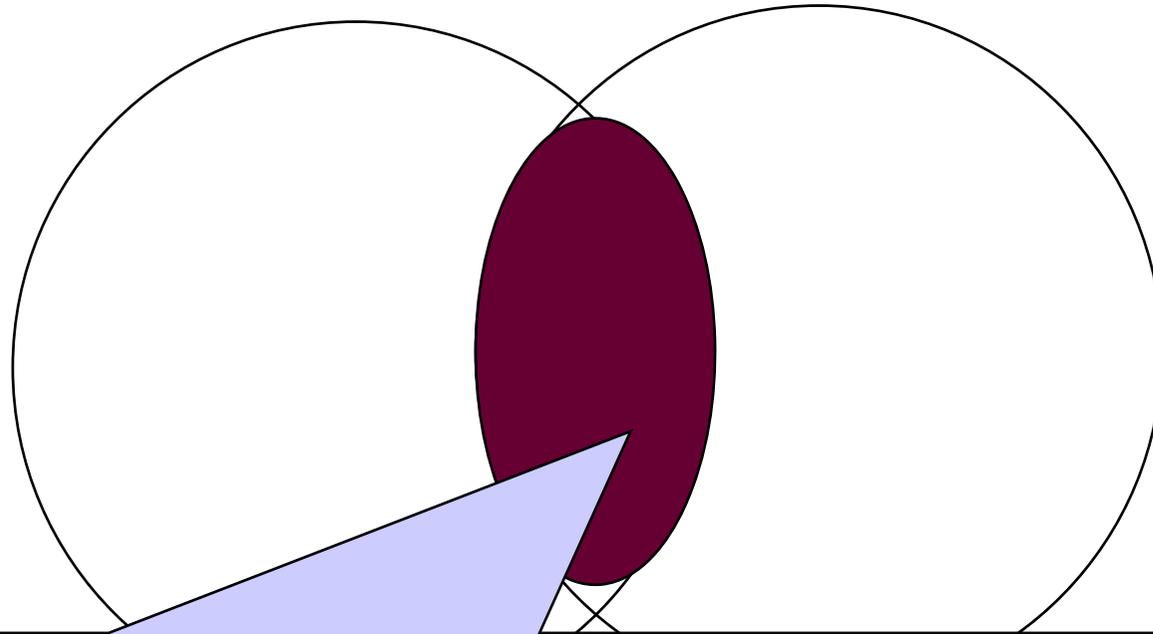
$$P(3 | \quad) = \frac{2}{15}$$

$$H(B | \quad) = -P(1 | \quad) \log P(1 | \quad) - P(2 | \quad) \log P(2 | \quad) - P(3 | \quad) \log P(3 | \quad) \\ - P(4 | \quad) \log P(4 | \quad) - P(5 | \quad) \log P(5 | \quad) - P(6 | \quad) \log P(6 | \quad)$$

$$H(B | A) = P(\quad) H(B | \quad) + P(\quad) H(B | \quad) + P(\times) H(B | \times)$$

# 相互情報量

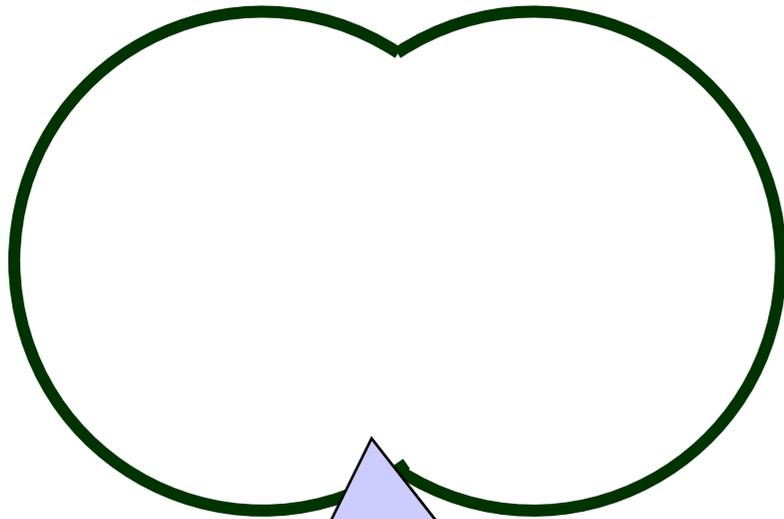
$$I(A; B) = H(A) - H(A | B) = H(B) - H(B | A) = I(B; A)$$



AとBが互いに関係している情報量。  
Aを知ることによって、間接的にBに関する情報が得られる。  
同様に、Bを知ることによって、間接的にAの情報が得られる。  
これらは、等しい。

# 結合エントロピー（同時エントロピー）

$$H(A, B) = - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) = H(A) + H(B) - I(A; B)$$



$\alpha$  と  $\beta$  が同時に起こる確率。  
結合確率。

$$\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) = 1$$

AとBがのすべての情報量。  
Aだけの情報量と、Bだけの情報量を加えて、  
関係する相互情報量を減ずる。

各種エントロピーの計算。

まず、2つの事象系のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned} H(A) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) \\ &= \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} + \frac{6}{36} \log \frac{36}{6} + \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} \\ &= \frac{5}{6} (\log 4 + \log 3 - \log 5) + \frac{1}{6} (\log 2 + \log 3) \\ &= \frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \\ &\simeq (1.833) + (1.585) - (1.93) \\ &= 1.4833 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(B) &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \log P(\beta) \\ &= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 \\ &= \log 6 \\ &\simeq 2.5849 \dots \end{aligned}$$

次に、Bの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned} H(A | 1) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 1) \log P(\alpha | 1) \\ &= -P(\quad | 1) \log P(\quad | 1) - P(\quad | 1) \log P(\quad | 1) - P(\times | 1) P(\times | 1) \\ &= 0 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 2) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 2) \log P(\alpha | 2) \\ &= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 3) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 3) \log P(\alpha | 3) \\ &= \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 4) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 4) \log P(\alpha | 4) \\ &= \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 5) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 5) \log P(\alpha | 5) \\ &= \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 6) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 6) \log P(\alpha | 6) \\ &= \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \log 6 + 0 \end{aligned}$$

以上より、事象系Bを条件とする、条件付エントロピー  $H(A | B)$  が求められる。

$$\begin{aligned}
 H(A | B) &= \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A | \beta) \\
 &= \frac{1}{6} H(A | 1) + \frac{1}{6} H(A | 2) + \frac{1}{6} H(A | 3) + \frac{1}{6} H(A | 4) + \frac{1}{6} H(A | 5) + \frac{1}{6} H(A | 6) \\
 &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{6} \log 6 + \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{6} \log 6 + \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left( 3 \log 6 - \frac{5}{6} \log 5 - \frac{2}{3} \log 4 - \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{3} \log 2 \right) \\
 &= \log 6 - \frac{5}{18} \log 5 - \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \\
 &= \frac{4}{9} + \frac{5}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5 \\
 &\simeq (0.444) + (1.321) - (0.645) \\
 &= 1.12
 \end{aligned}$$

今度は、逆にAの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned}H(B | A) &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta | A) \log P(\beta | A) \\&= -P(1 | A) \log P(1 | A) - P(2 | A) \log P(2 | A) - \dots - P(6 | A) \log P(6 | A) \\&= 0 + \frac{1}{15} \log 15 + \frac{2}{15} \log \frac{15}{2} + \frac{3}{15} \log \frac{15}{3} + \frac{4}{15} \log \frac{15}{4} + \frac{5}{15} \log \frac{15}{5} \\&= \log 15 - \frac{2}{15} \log 2 - \frac{3}{15} \log 3 - \frac{4}{15} \log 4 - \frac{5}{15} \log 5 \\&= \frac{12}{15} \log 3 + \frac{10}{15} \log 5 - \frac{10}{15} \\&= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$H(B | \cdot) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta | \cdot) \log P(\beta | \cdot)$$

$$= 6 \times \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \log 6$$

$$H(B | \times) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta | \times) \log P(\beta | \times)$$

$$= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}$$

以上より、事象系Aを条件とする、条件付エントロピー  $H(B | A)$  が求められる。

$$H(B | A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B | \alpha)$$

$$= \frac{30}{36} \left( \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \frac{5}{6} \log 3 + \frac{5}{9} \log 5 - \frac{7}{18}$$

$$\simeq (1.321) + (1.290) - (0.389)$$

$$= 2.221$$

$$\begin{aligned}
& H(A) - H(A | B) \\
&= \left( \frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \right) - \left( \frac{4}{9} + \frac{5}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5 \right) \\
&= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H(B) - H(B | A) \\
&= \log 6 - \left( \frac{5}{6} \log 3 + \frac{5}{9} \log 5 - \frac{7}{18} \right) \\
&= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I(A; B) &= H(A) - H(A | B) = H(B) - H(B | A) \\
&= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5 \\
&\simeq (1.389) + (0.264) - (1.290) \\
&= 0.363
\end{aligned}$$

結合エントロピーを求めるためには、A、Bの積の事象系を考えても良い。サイコロゲームの勝敗表より以下の事象系が得られる。

$$(A, B) = \left\{ \begin{array}{l} ( \cdot, 1) , ( \cdot, 1) , (\times, 1) , ( \cdot, 2) , ( \cdot, 2) , (\times, 2) , \\ 0 , \frac{1}{36} , \frac{5}{36} , \frac{1}{36} , \frac{1}{36} , \frac{4}{36} , \\ ( \cdot, 3) , ( \cdot, 3) , (\times, 3) , ( \cdot, 4) , ( \cdot, 4) , (\times, 4) , \\ \frac{2}{36} , \frac{1}{36} , \frac{3}{36} , \frac{3}{36} , \frac{1}{36} , \frac{2}{36} , \\ ( \cdot, 5) , ( \cdot, 5) , (\times, 5) , ( \cdot, 6) , ( \cdot, 6) , (\times, 6) \\ \frac{4}{36} , \frac{1}{36} , \frac{1}{36} , \frac{5}{36} , \frac{1}{36} , 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
H(A, B) &= - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) \\
&= \frac{8}{36} \log 36 + \frac{4}{36} \log \frac{36}{2} + \frac{6}{36} \log \frac{36}{3} + \frac{8}{36} \log \frac{36}{4} + \frac{10}{36} \log \frac{36}{5} \\
&= \frac{36}{36} \log 36 - \frac{1}{9} \log 2 - \frac{1}{6} \log 3 - \frac{2}{9} \log 4 - \frac{5}{18} \log 5 \\
&= \frac{13}{9} + \frac{11}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5
\end{aligned}$$

$$H(A, B) = H(A) + H(B) - I(A; B)$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \right) + (\log 6) - \left( \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5 \right) \\
&= \frac{13}{9} + \frac{11}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5
\end{aligned}$$

# 練習

コインゲームを考える。

「甲と乙がそれぞれコインを投げる。  
表より裏が強いとする。」

このゲームを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系（勝負）:

「甲の勝負けを表す事象系」

事象系（裏表）:

「甲の出したコインの裏表を表す事象系」

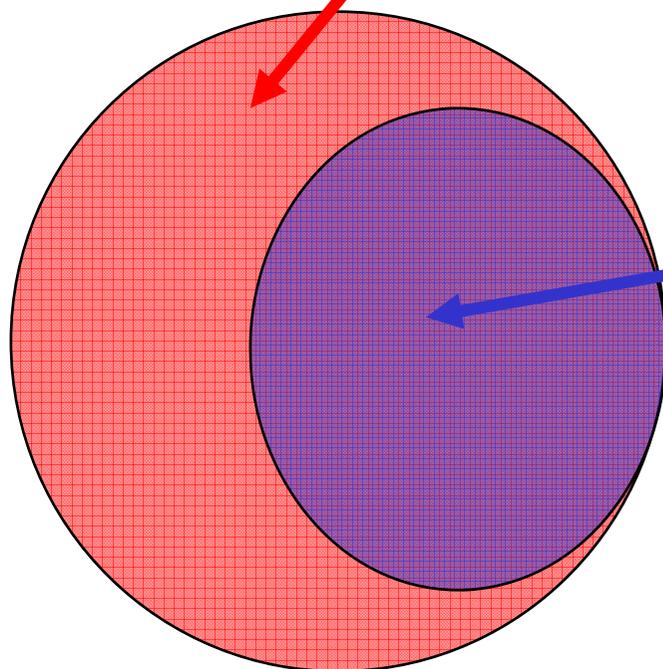
次の各種エントロピーを求めよ。

$H(\text{勝負}), H(\text{裏表}), H(\text{勝負} | \text{裏表}), H(\text{裏表} | \text{勝負}), I(\text{勝負}; \text{裏表})$

# 部分的な情報源

サイコロを投げて出た目に従って、以下の2つの情報源を考える。

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$



$$D = \left\{ \begin{array}{cc} \text{偶数} & , & \text{奇数} \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$H(B) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58[\text{bit} / \text{記号}]$$

$$H(D) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1[\text{bit} / \text{記号}]$$

$$H(B | \text{偶数}) = \underbrace{0}_1 + \underbrace{\frac{1}{3} \log 3}_2 + \underbrace{0}_3 + \underbrace{\frac{1}{3} \log 3}_4 + \underbrace{0}_5 + \underbrace{\frac{1}{3} \log 3}_6 = \log 3$$

$$H(B | \text{奇数}) = \underbrace{\frac{1}{3} \log 3}_1 + \underbrace{0}_2 + \underbrace{\frac{1}{3} \log 3}_3 + \underbrace{0}_4 + \underbrace{\frac{1}{3} \log 3}_5 + \underbrace{0}_6 = \log 3$$

$$H(B | D) = \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \log 3 = \log 3 \simeq 1.58[\text{bit} / \text{記号}]$$

$$I(B; D) = H(B) - H(B | D) = 1[\text{bit} / \text{記号}]$$

Dのエントロピーと等しい。

$$I(D; B) = H(D) - H(D | B)$$

$$\therefore H(D | B) = H(D) - I(D; B) = 0$$

Bを条件とすれば、Dに関する残された情報が無いことを意味する。すなわち、サイコロの目がわかれば、偶数か奇数かもわかる。

$$H(D | 1) = \underbrace{-1 \log 1}_{\text{奇数}} \underbrace{-0 \log 0}_{\text{偶数}} = 0$$

⋮

$$H(D | 6) = \underbrace{-0 \log 0}_{\text{奇数}} \underbrace{-1 \log 1}_{\text{偶数}} = 0$$

$$\therefore H(D | B) = \sum_{\alpha \in B} P(\alpha) H(D | \alpha) = 0$$

# 練習

試行T「トランプから1枚カードを引く」

この試行Tを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系（数）：  
「引いたカードの数」

事象系（絵札）：  
「引いたカードが絵札かどうか」

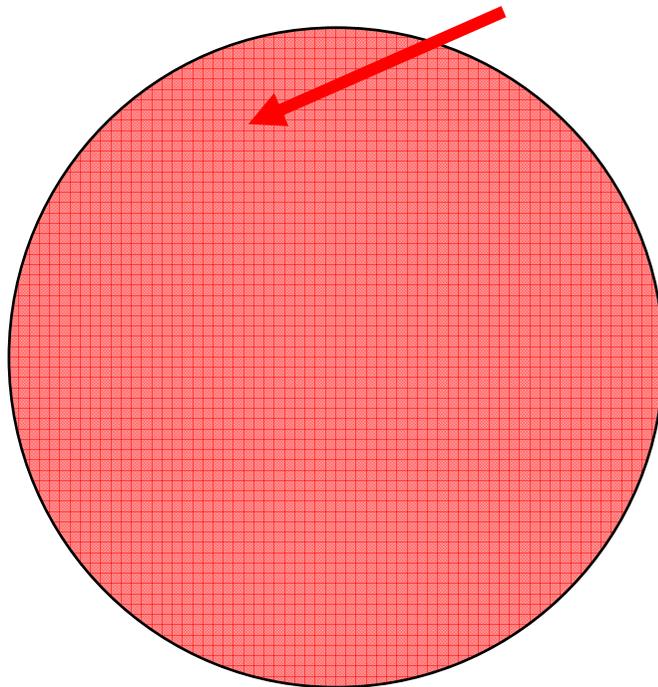
次の各種エントロピーを求めよ。

$H(\text{数}), H(\text{絵札}), H(\text{数} | \text{絵札}), H(\text{絵札} | \text{数}), I(\text{数}; \text{絵札})$

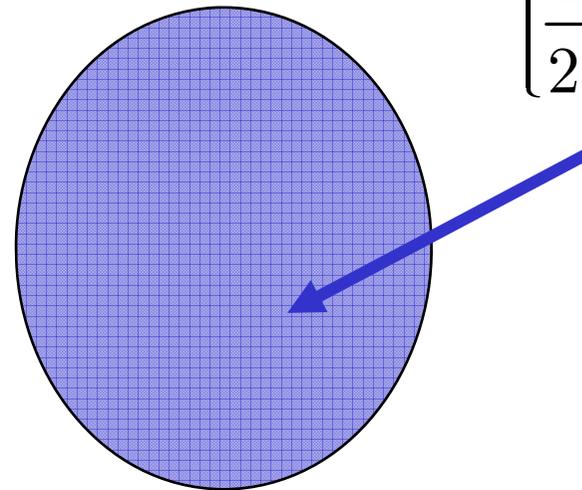
# 独立な情報源

サイコロを投げて得られる情報源と、コインを投げて得られる情報源を考える。

$$B = \left\{ \begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$



$$E = \left\{ \begin{array}{l} \text{表}, \text{裏} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$



$$H(B) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58[\text{bit} / \text{記号}]$$

$$H(E) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1[\text{bit} / \text{記号}]$$

$$H(B | \text{表}) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(B | \text{裏}) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(B | E) = \frac{1}{2} \log 6 + \frac{1}{2} \log 6 = \log 6$$

$$I(B; E) = H(B) - H(B | E) = 0[\text{bit} / \text{記号}]$$

コインの試行からは、サイコロに関する情報が得られないことを意味する。

$$I(E; B) = H(E) - H(E | B)$$

$$H(E | B) = H(E) - I(E; B) = \log 2 = 1[\text{bit} / \text{記号}]$$

Bを条件としても、Eに関する平均情報量に変化がない。

# 練習

試行T「トランプから1枚カードを引く」

この試行Tを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系（数）：  
「引いたカードの数」

事象系（マーク）：  
「引いたカードがマーク」

次の各種エントロピーを求めよ。

$H(\text{数}), H(\text{マーク}), H(\text{数}|\text{マーク}), H(\text{マーク}|\text{数}), I(\text{数}; \text{マーク})$