情報理論レポート課題４（情報源符号）解答例

提示：2008/11/19(水)　提出：2008/11/26(水)

１．下の情報源$S_1$に対する符号$\phi_1,\phi_2,\phi_3$に関して問に答えよ。

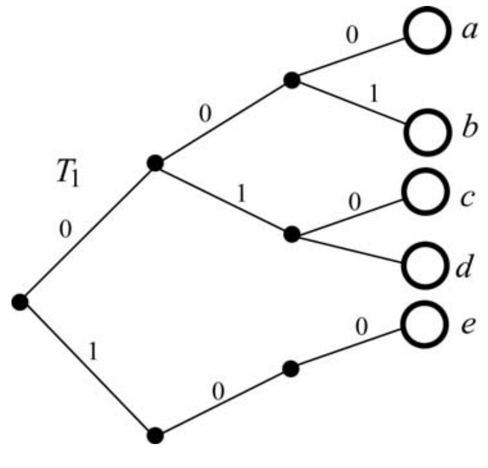
$$S_1=\begin{Bmatrix} a & , & b & , & c & , & d & , & e \\ \frac{4}{12} & , & \frac{3}{12} & , & \frac{2}{12} & , & \frac{2}{12} & , & \frac{1}{12} \end{Bmatrix}$$

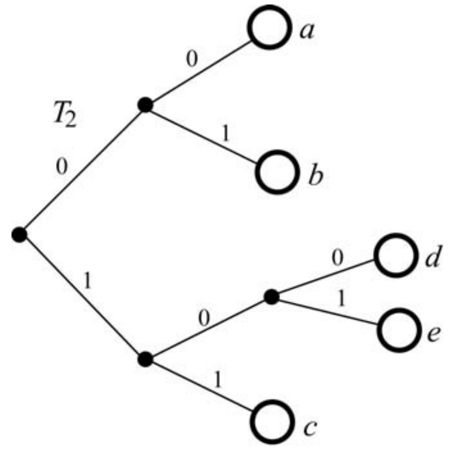
$$\phi_1=\left\{a\mapsto 000, b\mapsto 001, c\mapsto 010, d\mapsto 011, e\mapsto 100\right\},$$

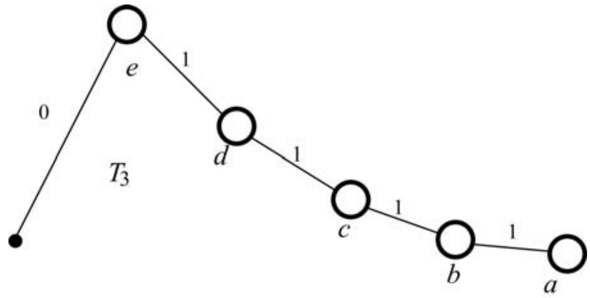
$$\phi_2=\left\{a\mapsto 00, b\mapsto 01, c\mapsto 11, d\mapsto 100, e\mapsto 101\right\},$$

$$\phi_3=\left\{a\mapsto 01111, b\mapsto 0111, c\mapsto 011, d\mapsto 01, e\mapsto 0\right\}$$

(1) 符号$\phi_1,\phi_2,\phi_3$の符号の木$T_1,T_2,T_3$を図示せよ。






(2) 符号 $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ が瞬時符号かどうかを判定せよ。

符号の木の葉にだけ情報源記号が割り当てられていれば瞬時符号である。よって、（１）の図 $T_1, T_2, T_3$ より、$\phi_1, \phi_2$ は瞬時符号であり、$\phi_3$ は非瞬時符号である。なお、$\phi_3$ はカンマ符号になっており、一意復号化は可能。

(3) 符号 $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ の平均符号長 $l_1, l_2, l_3$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
& l_1 = \sum_{\alpha \in S} P\left(\alpha\right) l\left(\phi_1\left(\alpha\right)\right) \\
& = \frac{4}{12} \times 3 + \frac{3}{12} \times 3 + \frac{2}{12} \times 3 + \frac{2}{12} \times 3 + \frac{1}{12} \times 3 \\
& = \left(\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right) \times 3 \\
& = 3 \quad \left[bit \,/\, \text{記号}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& l_2 = \frac{4}{12} \times 2 + \frac{3}{12} \times 2 + \frac{2}{12} \times 2 + \frac{2}{12} \times 3 + \frac{1}{12} \times 3 \\
& = \frac{8 + 6 + 4 + 6 + 3}{12} \\
& = \frac{27}{12} \\
& \simeq 2.25 \quad \left[bit \,/\, \text{記号}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_3 &= \frac{4}{12}\times 5+\frac{3}{12}\times 4+\frac{2}{12}\times 3+\frac{2}{12}\times 2+\frac{1}{12}\times 1 \\
&= \frac{20+12+6+4+1}{12} \\
&= \frac{43}{12} \\
&\simeq 3.58 \quad [bit\ /\ \text{記号}]
\end{aligned}
$$

(4) 符号 $\phi_1,\phi_2,\phi_3$ の効率 $e_1,e_2,e_3$ を求めよ。

まず、情報源のエントロピー $H(S_1)$ を求める。

$$
\begin{aligned}
H(S_1) &= -\sum_{\alpha\in S_1} P(\alpha)\log P(\alpha) \\
&= -\frac{4}{12}\log\frac{4}{12}-\frac{3}{12}\log\frac{3}{12}-\frac{2}{12}\log\frac{2}{12}-\frac{2}{12}\log\frac{2}{12}-\frac{1}{12}\log\frac{1}{12} \\
&= \log 12-\left(\frac{4}{12}\log 4+\frac{3}{12}\log 3+\frac{2}{12}\log 2+\frac{2}{12}\log 2\right) \\
&= (2+\log 3)-1-\frac{1}{4}\log 3 \\
&= 1+\frac{3}{4}\log 3 \\
&\simeq 2.19\,[bit\ /\ \text{記号}]
\end{aligned}
$$

よって、効率は以下のように求められる。

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{H(S_1)}{l_1} \\
&\simeq \frac{2.19}{3} \\
&\simeq 0.73
\end{aligned}
$$

$$
e_2 \simeq \frac{2.19}{2.25} \simeq 0.97
$$

$$
e_3 \simeq \frac{2.19}{3.58} \simeq 0.61
$$

なお、以下の二つの事項に注意すると効率の定義式中の分母分子を間違うことはない。

・エントロピー　≦　平均符号長

・０≦　符号の効率　≦１

２．　クラフトの不等式により、次の符号長を持つ２元符号が瞬時符号として実現可能かどうかを判定せよ。

符号長が$L=\left(l_1,l_2,\cdots,l_n\right)$のクラフトの不等式は、次式である。

$$\sum_{i=1}^{n}2^{-l_i}\leq 1$$

この式を満足するとき、符号長$L=\left(l_1,l_2,\cdots,l_n\right)$の瞬時符号を“ 構成 ”できる。

(1) $L_1=\left(1,2,2,2\right)$

左辺$=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{4}>1$

よって、クラフトの不等式を満たさないので、瞬時符号を実現不可能。

(2) $L_2=\left(1,2,3,3\right)$

左辺$=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{4+2+1+1}{8}=\dfrac{8}{8}=1\leq 1$

よって、クラフトの不等式を満たし、瞬時符号を実現可能。

(3) $L_3=\left(2,2,3,3,3,3\right)$

左辺$=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{2+2+1+1+1+1}{8}=\dfrac{8}{8}=1\leq 1$

よって、クラフトの不等式を満たし、瞬時符号を実現可能。

(4) $L_4=\left(2,2,2,3,3,3\right)$

左辺$=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{2+2+2+1+1+1}{8}=\dfrac{9}{8}>1$

よって、クラフトの不等式を満たさないので、瞬時符号を実現不可能。

(5) $L_5=\left(2,2,2,3,4,4\right)$

左辺$=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{4+4+4+2+1+1}{16}=\dfrac{16}{16}=1\leq 1$

よって、クラフトの不等式を満たし、瞬時符号を実現可能。

3.　次の情報源$S_3$に対して、問に答えよ。

$$S_3 = \begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ \frac{1}{4} & , & \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$$

(1) 拡大情報源$S_3{}^2$および$S_3{}^3$求めよ。

$$S_3^2 = \begin{Bmatrix} 00 & , & 01 & , & 10 & , & 11 \\ \frac{1}{16} & , & \frac{3}{16} & , & \frac{3}{16} & , & \frac{9}{16} \end{Bmatrix}$$

$$S_3^3 = \begin{Bmatrix} 000 & , & 001 & , & 010 & , & 100 & , & 011 & , & 101 & , & 110 & , & 111 \\ \frac{1}{64} & , & \frac{3}{64} & , & \frac{3}{64} & , & \frac{3}{64} & , & \frac{9}{64} & , & \frac{9}{64} & , & \frac{9}{64} & , & \frac{27}{64} \end{Bmatrix}$$

(2) 各エントロピー$H(S_3), H(S_3{}^2), H(S_3{}^3)$を求めよ。

$$\begin{aligned} H(S_3) &= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log\frac{3}{4} \\ &= \log 4 - \frac{3}{4}\log 3 \\ &\simeq 0.811\ [bit\ /\ \text{記号}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(S_3^2) &= -\frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{16} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{16} - \frac{9}{16}\log\frac{9}{16} \\ &= 2\times\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right) + 2\times\left(-\frac{1}{4}\frac{3}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}\right) + 2\times\left(-\frac{3}{4}\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}\right) \\ &= 2\times\left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log\frac{3}{4}\right)\right] \\ &= 2\times\left[\frac{1}{4}\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)\right] \\ &= 2\times\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\simeq 1.623\ [bit\ /\ \text{記号}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H(S_3^3) &= -\frac{1}{64}\log\frac{1}{64} - 3\times\frac{3}{64}\log\frac{3}{64} - 3\times\frac{9}{64}\log\frac{9}{64} - \frac{27}{64}\log\frac{27}{64} \\
&= \log 64 - \left(\frac{9}{64}\log 3 + \frac{27}{64}\log 9 + \frac{27}{64}\log 27\right) \\
&= 6 - \frac{9+54+81}{64}\log 3 \\
&= 6 - \frac{144}{64}\log 3 \\
&= 6 - \frac{9}{4}\log 3 \\
&= 3\times\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \\
&\simeq 2.434\ [bit\ /\ \text{記号}]
\end{aligned}
$$

一般に、情報源 $S$ の $n$ 次拡大情報源 $S^n$ のエントロピー $H(S^n)$ はもとの情報源のエントロピー $H(S)$ の $n$ 倍である。すなわち次式が成り立つ。

$$H(S^n) = nH(S)$$