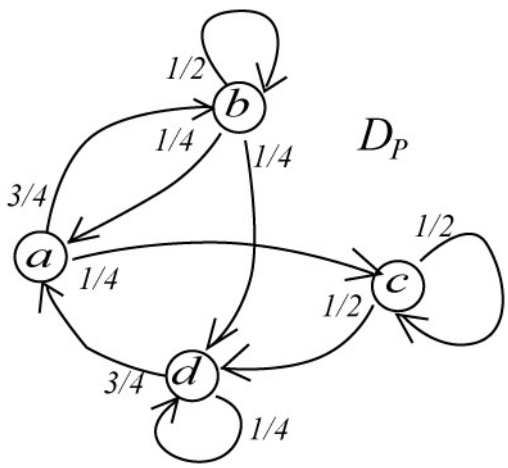
情報理論レポート３（マルコフ情報源）解答例

１．正規マルコフ情報源

情報源アルファベット $X=\{a,b,c,d\}$ 上で、次の状態遷移確率行列 P で定められるマルコフ情報源 S_P について問いに答えよ。

$$P=\begin{bmatrix} P(a\mid a) & P(b\mid a) & P(c\mid a) & P(d\mid a) \\ P(a\mid b) & P(b\mid b) & P(c\mid b) & P(d\mid b) \\ P(a\mid c) & P(b\mid c) & P(c\mid c) & P(d\mid c) \\ P(a\mid d) & P(b\mid d) & P(c\mid d) & P(d\mid d) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(1)マルコフ情報源 S_P の状態遷移図（シャノン線図） D_P を書け。



(2)マルコフ情報源 S_P の定常分布 $\boldsymbol{z}$ を求め、S_P の随伴情報源 $\overline{S_P}$ を求めよ。

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}P \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i = 1 \end{cases}$$

より求める。$\boldsymbol{z}=(z_a, z_b, z_c, z_d)$ とおく。

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}\boldsymbol{P}$$
$$\therefore\ {}^t\boldsymbol{z}={}^t\boldsymbol{P}\,{}^t\boldsymbol{z}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \\ z_d \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \\ z_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

係数行列を行基本変形する。

$$\begin{bmatrix} -1 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1\times(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 & -3/4 \\ 3/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 & -3/4 \\ 0 & -5/16 & 0 & 9/16 \\ 0 & 1/16 & -1/2 & 3/16 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{16}{5}\times(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -9/5 \\ 0 & 1/16 & -1/2 & 3/16 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -9/5 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2\times(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -9/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)-\frac{1}{2}\times(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -9/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、連立方程式は次と等価。

$$\begin{cases} z_a \qquad\qquad - \dfrac{6}{5} z_d = 0 \\ \qquad z_b \qquad - \dfrac{9}{5} z_d = 0 \\ \qquad\qquad z_c - \dfrac{3}{5} z_d = 0 \end{cases}$$

よって、

$$z_a + z_b + z_c + z_d = 1$$
$$\therefore \frac{6}{5} z_d + \frac{9}{5} z_d + \frac{3}{5} z_d + z_d = 1$$
$$\therefore z_d = \frac{5}{23}$$
$$\therefore \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ z_c \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/23 \\ 9/23 \\ 3/23 \\ 5/23 \end{bmatrix}$$

（験算）

$$\left(\frac{6}{23}, \quad \frac{9}{23}, \quad \frac{3}{23}, \quad \frac{5}{23}\right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{23}\left(\frac{9}{4} + \frac{15}{4}, \frac{18}{4} + \frac{9}{2}, \frac{6}{4} + \frac{3}{2}, \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{23}\left(6, \quad 9, \quad 3, \quad 5\right)$$

以上より、次のように随伴情報源が定まる。

$$\overline{S_P} = \begin{Bmatrix} a & , & b & , & c & , & d \\ \frac{6}{23} & , & \frac{9}{23} & , & \frac{3}{23} & , & \frac{5}{23} \end{Bmatrix}$$

(3) 随伴情報源 $\overline{S_P}$ のエントロピー $H(\overline{S_P})$ を求めよ。

$$H(\overline{S_P}) = -\frac{6}{23}\log\frac{6}{23} - \frac{9}{23}\log\frac{9}{23} - \frac{3}{23}\log\frac{3}{23} - \frac{5}{23}\log\frac{5}{23}$$
$$= \log 23 - \frac{6}{23}\left(\log 2 + \log 3\right) - 2 \times \frac{9}{23}\log 3 - \frac{3}{23}\log 3 - \frac{5}{23}\log 5$$
$$= \log 23 - \frac{6}{23} - \frac{27}{23}\log 3 - \frac{5}{23}\log 5$$
$$\simeq 1.90 \quad [bit\,/\,\text{記号}]$$

(4) マルコフ情報源 S_P のエントロピー $H(S_P \mid S_P)$ を求めよ。

各記号$\alpha \in X = \{a, b, c, d\}$に対する条件付きエントロピー$H(S_P \mid \alpha)$を求める。

$$
\begin{aligned}
&H(S_P \mid a)\\
&= -P(a \mid a)\log P(a \mid a) - P(b \mid a)\log P(b \mid a) - P(c \mid a)\log P(c \mid a) - P(d \mid a)\log P(d \mid a)\\
&= -\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\\
&= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)\\
&\simeq 0.811 \quad [bit\ /\ \text{記号}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H(S_P \mid b) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\\
&= \frac{2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4}\\
&= 1.5 \quad [bit\ /\ \text{記号}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H(S_P \mid c) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\\
&= \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= 1 \quad [bit\ /\ \text{記号}]
\end{aligned}
$$

$$
H(S_P \mid 3) = \mathcal{H}\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0.811 \quad [bit\ /\ \text{記号}]
$$

次に、定常分布$\boldsymbol{z} = \left(\frac{6}{23}, \ \frac{9}{23}, \ \frac{3}{23}, \ \frac{5}{23}\right)$を用いて平均を求めることで、条件付きエントロピー$H(S_P \mid S_P)$を求める。

$$
\begin{aligned}
&H(S_P \mid S_P) = \sum_{\alpha \in X} z_\alpha H(S_P \mid \alpha)\\
&= z_a H(S_P \mid a) + z_b H(S_P \mid b) + z_c H(S_P \mid c) + z_d H(S_P \mid d)\\
&\simeq \frac{6}{23} \times 0.811 + \frac{9}{23} \times 1.50 + \frac{3}{23} \times 1.00 + \frac{5}{23} \times 0.811\\
&\simeq 1.11 \quad [bit\ /\ \text{記号}]
\end{aligned}
$$

(5)マルコフ情報源のエントロピー$H(S_P \mid S_P)$と随伴情報源のエントロピー$H(\overline{S_P})$の大小

関係を比較考察せよ。
マルコフ情報源のエントロピーは随伴情報源のエントロピー以下になる。即ち、次式が成り立つ。

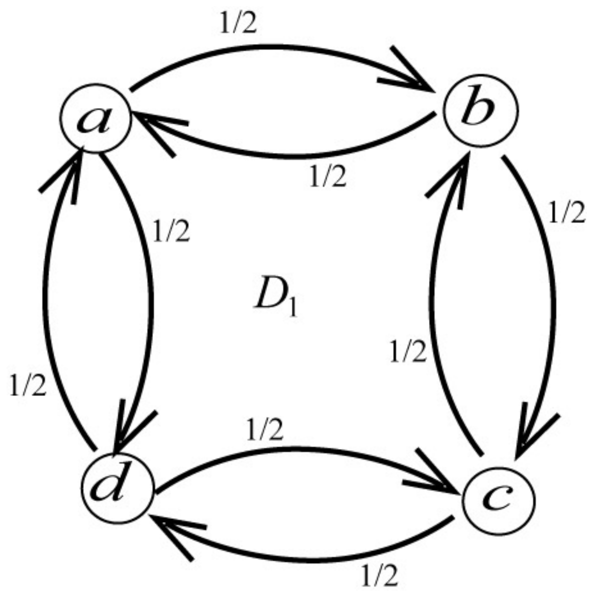
$$H(S_P \mid S_P) \le H\left(\overline{S_P}\right)$$

これは、マルコフ情報源がある記号の次の記号をある程度予測できるのに対して、随伴情報源は予測できないことに対応する。従って、一般に、情報源アルファベットの出現確率が同一だったとしても、記憶のある情報源のエントロピーは無記憶情報源のエントロピーより小さくなる。

２.マルコフ情報源の類別
以下に、１つづつ例を与える。（アルファベットが小さいのでシャノン線図から作った方が作りやすいかもしれない。）

（１）情報源アルファベット $X = \{a, b, c, d\}$ 上の周期的マルコフ情報源 S_1 を１つ考案し、

状態遷移行列 P_1 およびシャノンン線図 D_1 を示せ。



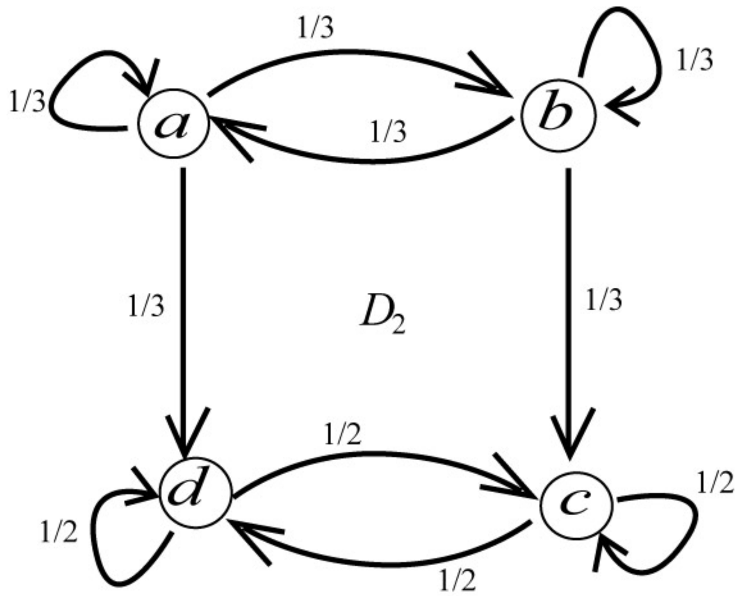
$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

周期は２であり、べき乗したとき交互に繰り返す。

$$\left(P_1\right)^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left(P_1\right)^{2k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

（２）情報源アルファベット $X = \{a, b, c, d\}$ 上の過渡的マルコフ情報源 S_2 を１つ考案し、

状態遷移行列 P_2 およびシャノンン線図 D_2 を示せ。



$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

過渡的マルコフ情報源では、状態遷移行列のべき乗で、ある列ベクトルが０ベクトルに収束する。

$$\lim_{k\to\infty}\left(P_2\right)^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$