

情報理論レポート 2(各種情報量)解答例

1. 各種情報量

男3人と女3人で合コンをすることになり、開催日を候補日集合 $D = \{1, 2, 3\}$ から希望調査で定めることとなった。希望人数が一番多い日に開催することとし、最大希望人数が同じ場合には、できるだけ早い時期に開催することにする。このような状況で、以下のような事象系を考えることにより、各種情報量を求めることを考える。

事象系 M を男子の希望次調査結果とし、すべての結果が均等に生じるとしよう。このとき、事象系は次のように定式化できる。

男性陣が1日に0人、2日に1人、3日に2人希望している場合に、 $M(0, 1, 2)$ と表そう。このとき、事象系 M は次のように定式化できる。

$$M = \left\{ \begin{array}{ccccc} M(0, 0, 3) & , & M(0, 3, 0) & , & M(3, 0, 0) & , & M(0, 1, 2) & , & M(1, 0, 2) & , \\ \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , \\ M(0, 2, 1) & , & M(1, 2, 0) & , & M(2, 0, 1) & , & M(2, 1, 0) & , & M(1, 1, 1) \\ \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} \end{array} \right\}$$

とする。同様に、女性陣の希望調査の事象系 F において、すべての結果が均等に生じるとしよう。

また、合コンの開催日に関する事象系を D とする。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 男性陣の希望調査の事象系 M にならい、女性陣の希望調査の事象系 F を定式化せよ。

また、各開催日が採用される確率を求め、事象系 D を定式化せよ。

事象系 F は次のように定式化できる。

$$F = \left\{ \begin{array}{ccccc} F(0, 0, 3) & , & F(0, 3, 0) & , & F(3, 0, 0) & , & F(0, 1, 2) & , & F(1, 0, 2) & , \\ \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , \\ F(0, 2, 1) & , & F(1, 2, 0) & , & F(2, 0, 1) & , & F(2, 1, 0) & , & F(1, 1, 1) \\ \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} & , & \frac{1}{10} \end{array} \right\}$$

事象系 M と事象系 F は独立なので、 $\alpha \in M, \beta \in F$ に対する各同時確率 $P(\alpha, \beta)$ は

$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{100}$ である。また、そのときの開催日は以下で次表で与えられる。

D	F(0,0,3)	F(0,3,0)	F(3,0,0)	F(0,1,2)	F(1,0,2)	F(0,2,1)	F(1,2,0)	F(2,0,1)	F(2,1,0)	F(1,1,1)
M(0,0,3)	3	2	1	3	3	3	3	3	3	3
M(0,3,0)	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2
M(3,0,0)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M(0,1,2)	3	2	1	3	3	2	2	3	1	3
M(1,0,2)	3	2	1	3	3	3	1	1	1	3
M(0,2,1)	3	2	1	2	3	2	2	1	2	2
M(1,2,0)	3	2	1	2	1	2	2	1	1	2
M(2,0,1)	3	2	1	3	1	1	1	1	1	1
M(2,1,0)	3	2	1	1	1	2	1	1	1	1
M(1,1,1)	3	2	1	3	3	2	2	1	1	1

各開催日を数えることにより、以下のように確率が求められる。

$$P(D=1) = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}, P(D=2) = \frac{31}{100}, P(D=3) = \frac{27}{100}$$

よって、事象系 D は次のように定式化できる。

$$D = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & , & 2 & , & 3 \\ \frac{42}{100} & , & \frac{31}{100} & , & \frac{27}{100} \end{array} \right\}$$

(2) 各事象系 M, F, D のエントロピー $H(M), H(F), H(D)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} H(M) &= -\sum_{\alpha \in M} P(\alpha) \log P(\alpha) \\ &= 10 \times \frac{1}{10} \log 10 \\ &= \log 10 \\ &\simeq 3.322 \quad [bit / 事象] \end{aligned}$$

$$H(F) = H(M) \simeq 3.322 \quad [bit / 事象]$$

$$\begin{aligned} H(D) &= -\frac{42}{100} \log \frac{42}{100} - \frac{31}{100} \log \frac{31}{100} - \frac{27}{100} \log \frac{27}{100} \\ &= \log 100 - \frac{42}{100} \log 42 - \frac{31}{100} \log 31 - \frac{27}{100} \log 27 \\ &\simeq 1.61 \quad [bit / 事象] \end{aligned}$$

(3) 次の条件付きエントロピーを求めよ。 $H(M | F), H(D | M), H(M | D)$

事象系 M と事象系 F は独立なので、

$$H(M | F) = H(M) = \log 10 \simeq 3.322 \quad [bit / \text{事象}]$$

と求められる。

ちなみに、各 $\alpha \in M$ に対して、

$$H(F | M(0,0,3)) = H(F | M(0,3,0)) = \dots = H(F | M(1,1,1)) \\ = \log 10$$

であり、

$$H(F | M) = \sum_{\alpha \in M} P(\alpha) H(F | M = \alpha) \\ = P(M(0,0,3)) H(F | M(0,0,3)) + \dots + P(M(1,1,1)) H(F | M(1,1,1)) \\ = \log 10$$

である。

開催日と男性希望調査に関して、男性希望調査を条件とする条件付き確率 $P(D | M)$ は次の表で表される。

P(D M)	M(0,0,3)	M(0,3,0)	M(3,0,0)	M(0,1,2)	M(1,0,2)	M(0,2,1)	M(1,2,0)	M(2,0,1)	M(2,1,0)	M(1,1,1)
D=1	1/10	1/10	1	2/10	4/10	2/10	4/10	7/10	7/10	4/10
D=2	1/10	9/10	0	3/10	1/10	6/10	5/10	1/10	2/10	3/10
D=3	8/10	0	0	5/10	5/10	2/10	1/10	2/10	1/10	3/10

まず、各事象 $\alpha \in M$ に関して、は $H(D | M = \alpha)$ 次のように求められる。

$$P(D | M(0,0,3)) = -\frac{1}{10} \log \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \log \frac{1}{10} - \frac{8}{10} \log \frac{8}{10} \simeq 0.922$$

$$P(D | M(0,3,0)) = -\frac{1}{10} \log \frac{1}{10} - \frac{9}{10} \log \frac{9}{10} - 0 \log 0 \simeq 0.469$$

$$P(D | M(3,0,0)) = -1 \log 1 - 0 \log 0 - 0 \log 0 = 0$$

$$P(D | M(0,1,2)) = -\frac{2}{10} \log \frac{2}{10} - \frac{3}{10} \log \frac{3}{10} - \frac{5}{10} \log \frac{5}{10} \simeq 1.485$$

$$P(D | M(1,0,2)) = -\frac{4}{10} \log \frac{4}{10} - \frac{1}{10} \log \frac{1}{10} - \frac{5}{10} \log \frac{5}{10} \simeq 1.361$$

$$P(D | M(0,2,1)) = -\frac{2}{10} \log \frac{2}{10} - \frac{6}{10} \log \frac{6}{10} - \frac{2}{10} \log \frac{2}{10} \simeq 1.371$$

$$P(D | M(1,2,0)) = -\frac{4}{10} \log \frac{4}{10} - \frac{5}{10} \log \frac{5}{10} - \frac{1}{10} \log \frac{1}{10} \simeq 1.361$$

$$P(D | M(2,0,1)) = -\frac{7}{10} \log \frac{7}{10} - \frac{1}{10} \log \frac{1}{10} - \frac{2}{10} \log \frac{2}{10} \simeq 1.157$$

$$P(D | M(2,1,0)) = -\frac{7}{10} \log \frac{7}{10} - \frac{2}{10} \log \frac{2}{10} - \frac{1}{10} \log \frac{1}{10} \simeq 1.157$$

$$P(D | M(1,1,1)) = -\frac{4}{10} \log \frac{4}{10} - \frac{3}{10} \log \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \log \frac{3}{10} \simeq 1.571$$

よって、条件付きエントロピー $H(D | M)$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned} H(D | M) &= \sum_{\alpha \in M} P(M = \alpha) H(D | M = \alpha) \\ &= \frac{1}{10} H(D | M(0,0,3)) + \dots + \frac{1}{10} H(D | M(1,1,1)) \\ &\simeq 1.085 \quad [bit / \text{事象}] \end{aligned}$$

開催日と男性希望調査に関して、開催日を条件とする条件付き確率 $P(M | D)$ は次の表で表される。

P(M D)	D=1	D=2	D=3
M(0,0,3)	1/42	1/31	8/27
M(0,3,0)	1/42	9/31	0
M(3,0,0)	10/42	0	0
M(0,1,2)	2/42	3/31	5/27
M(1,0,2)	4/42	1/31	5/27
M(0,2,1)	2/42	6/31	2/27
M(1,2,0)	4/42	5/31	1/27
M(2,0,1)	7/42	1/31	2/27
M(2,1,0)	7/42	2/31	1/27
M(1,1,1)	4/42	3/31	3/27

まず、各事象 $\beta \in D$ に関して、は $H(M | D = \beta)$ 次のように求められる。

$$\begin{aligned}
P(M \mid D = 1) &= -\frac{1}{42} \log \frac{1}{42} - \frac{1}{42} \log \frac{1}{42} - \frac{10}{42} \log \frac{10}{42} - \frac{2}{42} \log \frac{2}{42} - \frac{4}{42} \log \frac{4}{42} \\
&\quad - \frac{2}{42} \log \frac{2}{42} - \frac{4}{42} \log \frac{4}{42} - \frac{7}{42} \log \frac{7}{42} - \frac{7}{42} \log \frac{7}{42} - \frac{4}{42} \log \frac{4}{42} \\
&\simeq 2.999
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(M \mid D = 2) &= -\frac{1}{31} \log \frac{1}{31} - \frac{9}{31} \log \frac{9}{31} - \frac{0}{31} \log \frac{0}{31} - \frac{3}{31} \log \frac{3}{31} - \frac{1}{31} \log \frac{1}{31} \\
&\quad - \frac{6}{31} \log \frac{6}{31} - \frac{5}{31} \log \frac{5}{31} - \frac{1}{31} \log \frac{1}{31} - \frac{2}{31} \log \frac{2}{31} - \frac{3}{31} \log \frac{3}{31} \\
&\simeq 2.788
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(M \mid D = 3) &= -\frac{8}{27} \log \frac{8}{27} - \frac{0}{27} \log \frac{0}{27} - \frac{0}{27} \log \frac{0}{27} - \frac{5}{27} \log \frac{5}{27} - \frac{5}{27} \log \frac{5}{27} \\
&\quad - \frac{2}{27} \log \frac{2}{27} - \frac{1}{27} \log \frac{1}{27} - \frac{2}{27} \log \frac{2}{27} - \frac{1}{27} \log \frac{1}{27} - \frac{3}{27} \log \frac{3}{27} \\
&\simeq 2.682
\end{aligned}$$

よって、条件付きエントロピー $H(M \mid D)$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
H(M \mid D) &= \sum_{\beta \in D} P(\beta) H(M \mid D = \beta) \\
&= \frac{42}{100} \times H(M \mid D = 1) + \frac{31}{100} \times H(M \mid D = 2) + \frac{27}{100} \times H(M \mid D = 3) \\
&\simeq 2.85 \quad [\text{bit} / \text{事象}]
\end{aligned}$$

(4) 次の結合エントロピーを求めよ。 $H(M, F), H(D, M)$

$$\begin{aligned}
H(M, F) &= -\sum_{\alpha \in M} \sum_{\beta \in F} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) \\
&= 100 \times \frac{1}{100} \log 100 \\
&= \log 100 \\
&\simeq 6.644 \quad [\text{bit} / \text{事象}]
\end{aligned}$$

なお、事象系 M と事象系 F は独立なので、次式が成り立つ。

$$H(M, F) = H(M) + H(F)$$

同時確率は次の表のように求められる。

P(D,M)	M(0,0,3)	M(0,3,0)	M(3,0,0)	M(0,1,2)	M(1,0,2)	M(0,2,1)	M(1,2,0)	M(2,0,1)	M(2,1,0)	M(1,1,1)
D=1	1/100	1/100	10/100	2/100	4/100	2/100	4/100	7/100	7/100	4/100
D=2	1/100	9/100	0	3/100	1/100	6/100	5/100	1/100	2/100	3/100
D=3	8/100	0	0	5/100	5/100	2/100	1/100	2/100	1/100	3/100

よって、結合エントロピーは次のように求められる。

$$\begin{aligned}
H(D,M) &= -\sum_{\alpha \in D} \sum_{\beta \in M} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) \\
&= -\frac{1}{100} \log \frac{1}{100} - \dots - \frac{3}{100} \log \frac{3}{100} \\
&\simeq 4.407 \quad [bit / 事象]
\end{aligned}$$

(5) 次の相互情報量を求めよ。 $I(M;F), I(D;M)$

事象系 M と事象系 F は独立なので、相互情報量 $I(M;F)$ は無い。すなわち、

$$I(M;F) = 0 \quad [bit / 事象]$$

実際、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
I(M;F) &= H(M) - H(M | F) \\
&= H(F) - H(F | M) \\
&= H(M, F) - H(M) - H(F) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(D;M) &= H(D) - H(D | M) \\
&= H(M) - H(M | D) \\
&= H(D, M) - H(D) - H(M) \\
&\simeq 0.465 \quad [bit / 事象]
\end{aligned}$$