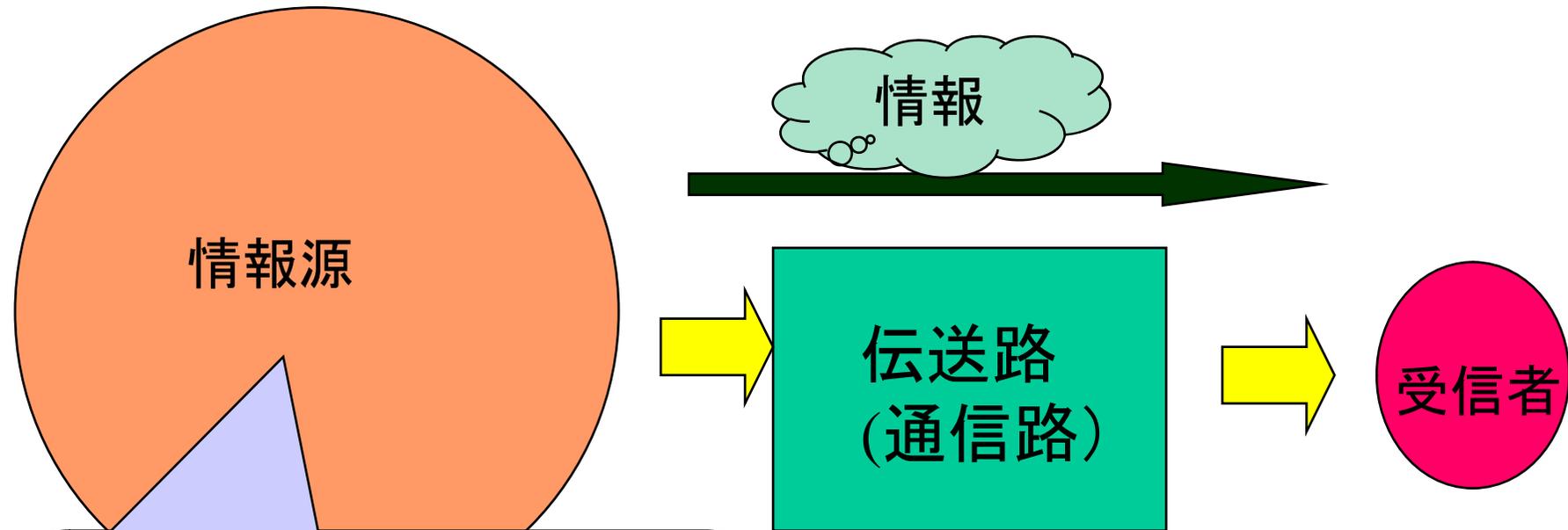


# 様々な情報源(4章)

# 情報源の役割



今回扱う。

☆無記憶情報源

(前の記号に依存しない情報源。サイコロのような情報源)

☆マルコフ情報源

(前の結果に依存する情報源。英文等は、こっちの方)

# 情報源モデル

情報源：  
離散的な時刻に従い、  
ある記号の集合から、  
各時刻に一つの記号  
を(ある確率的性格  
で)出力する。

情報源アルファベット

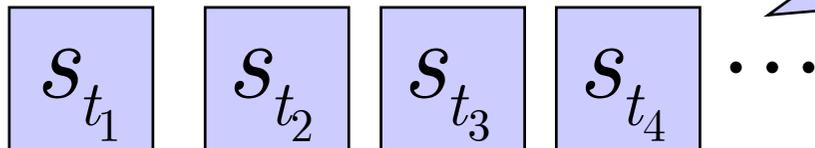
$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

情報源から発生する記号の  
集合

情報源シンボル(記号)

情報源から発生する記号。  
情報源アルファベットの要素

記号  $s_{t_i} \in S$  は、時刻  $t_i$   
で発生した情報源記号



時間軸

# 情報源例1

サイコロを振る試行  
による記号の生成。  
情報源アルファベット  
 $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$s_{t_1} = 3$     $s_{t_2} = 5$     $s_{t_3} = 2$    ...

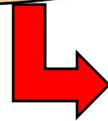
1回は3の目がでた。

# 情報源例2

英文からアルファ  
ベットを拾って記号を  
生成。

情報源アルファベット

$$A = \{a, b, c, \dots, z\}$$



$$s_{t_1} = i$$

$$s_{t_2} = n$$

$$s_{t_3} = f \dots$$



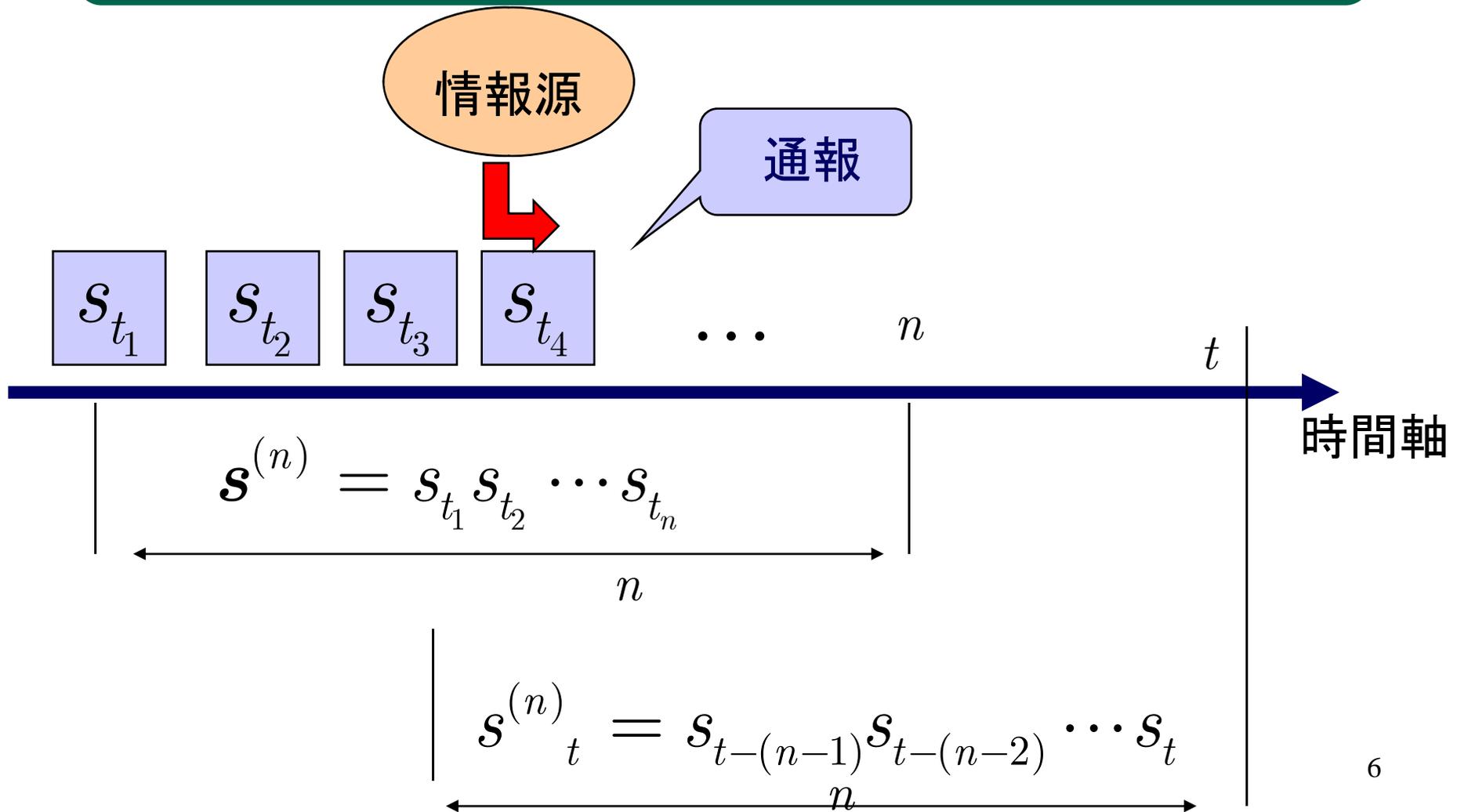
1文字目は”i”だった。

*information?*

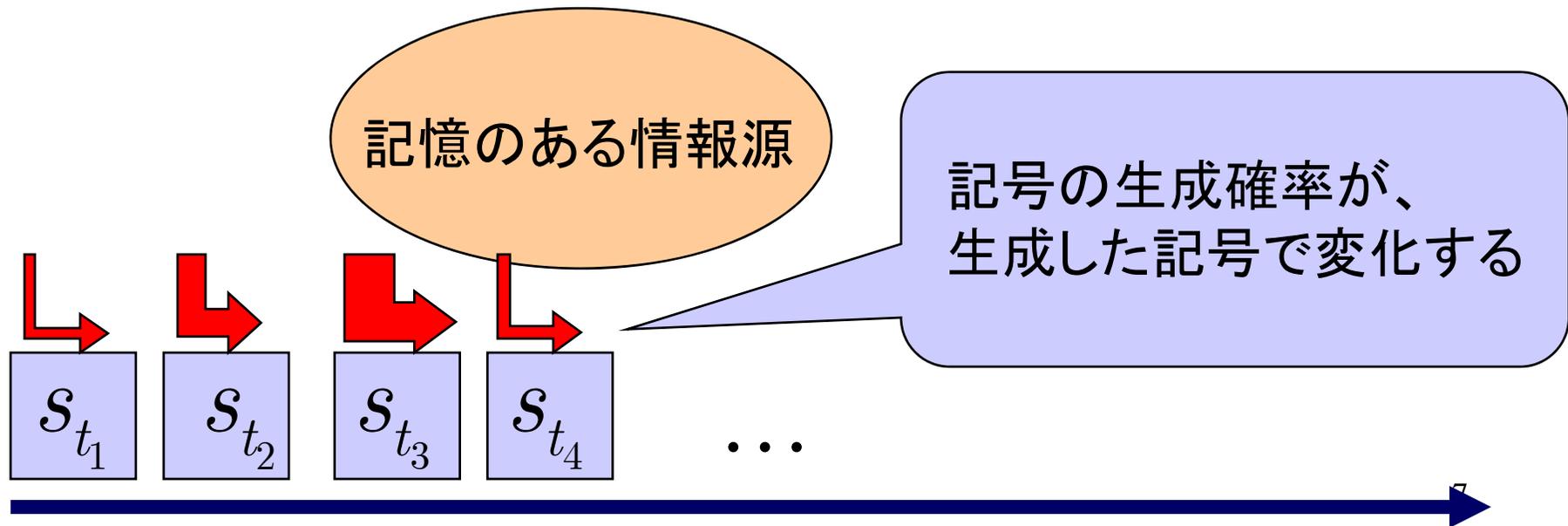
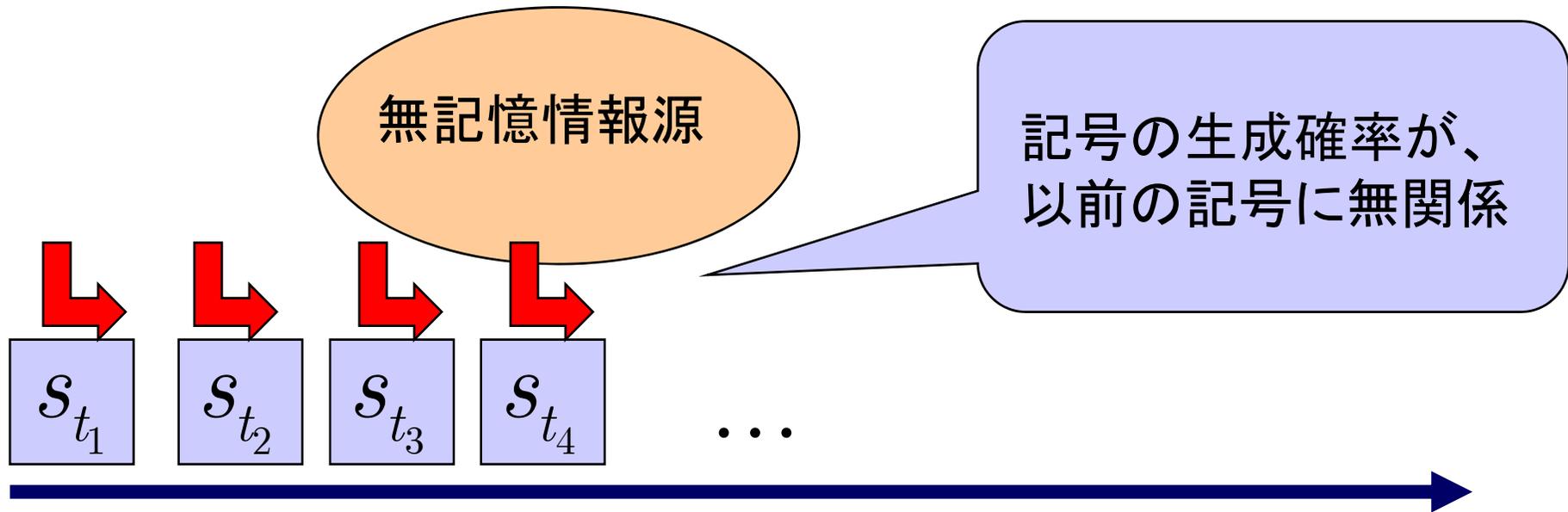
# 通報(メッセージ)

定義: 通報

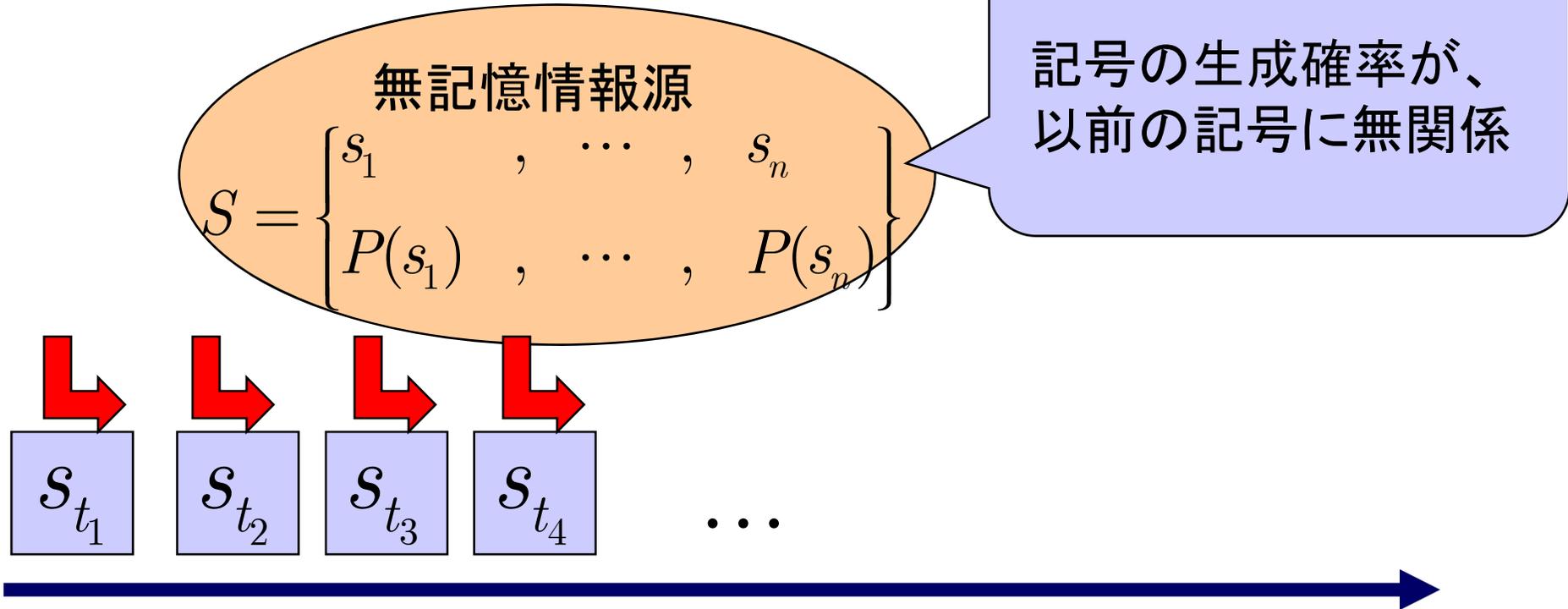
情報源から発生する記号系を**通報**という。



# 情報源における記憶



# 無記憶情報源 (独立情報源)



無記憶情報源の1記号あたりの(平均)情報量は、次式で表される。

$$H(S) = -\sum_{k=1}^n P(s_k) \log P(s_k) \quad [bit / 記号]$$

1記号の発生速度を

$$r^* \quad [\text{記号} / \text{単位時間}]$$

とする。このとき、単位時間あたりの発生平均情報量は、次式であらわされる。

$$\begin{aligned} H^*(S) &= r^* H(S) \\ &= -r^* \sum_{k=1}^n P(s_k) \log P(s_k) \quad [\text{bit} / \text{単位時間}] \end{aligned}$$

以下に注意する。

$$\text{左辺} = [\text{bit} / \text{単位時間}]$$

$$\text{右辺} = [\text{記号} / \text{単位時間}] [\text{bit} / \text{記号}] = [\text{bit} / \text{単位時間}]$$

# 記憶のある情報源

記憶ある情報

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

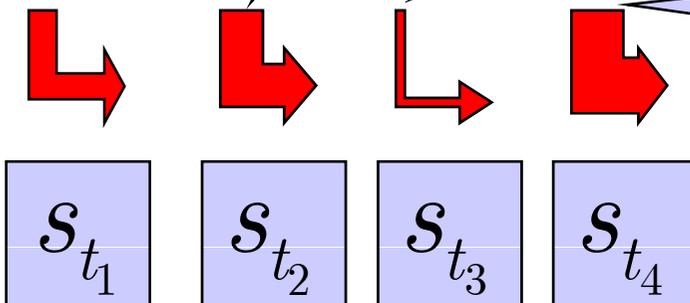
記号の生成確率が、  
以前の記号で変化する

$$\{P^1(s_1), \dots, P^1(s_n)\}$$

$$\{P^2(s_1), \dots, P^2(s_n)\}$$

$$\{P^3(s_1), \dots, P^3(s_n)\}$$

$$\{P^4(s_1), \dots, P^4(s_n)\}$$



# 問題

次の四角に入るアルファベットを求めよ。

(1) m  n      m  in      m  il

(2) t  e      t  is      t  at

(3) speake       teache       manne

# マルコフ情報源

# マルコフ情報源

## 定義: マルコフ情報源

直前の $m$ 個の記号によって、次記号の発生確率が変化する情報源を(m重)マルコフ情報源という。

発生した記号を条件とする条件付確率で定式化される。すなわち、次の条件付き確率で定められる情報源である。

$$\forall s, s_1, s_2, \dots, s_m \in S$$

$$P(s \mid s_1, s_2, \dots, s_m)$$

$S$  は今度発生する記号

$s_1, s_2, \dots, s_m$  は直前の $m$ 個の記号列。  
カンマはANDの意味。

# (単純)マルコフ情報源

## 定義: マルコフ情報源

直前の生成された記号によって、次記号の発生確率が変化する情報源を**単純マルコフ情報源**という。

発生した記号を条件とする条件付確率で定式化される。  
すなわち、

$\forall s, s' \in S$  に対して**条件付確率**

$$P(s | s')$$

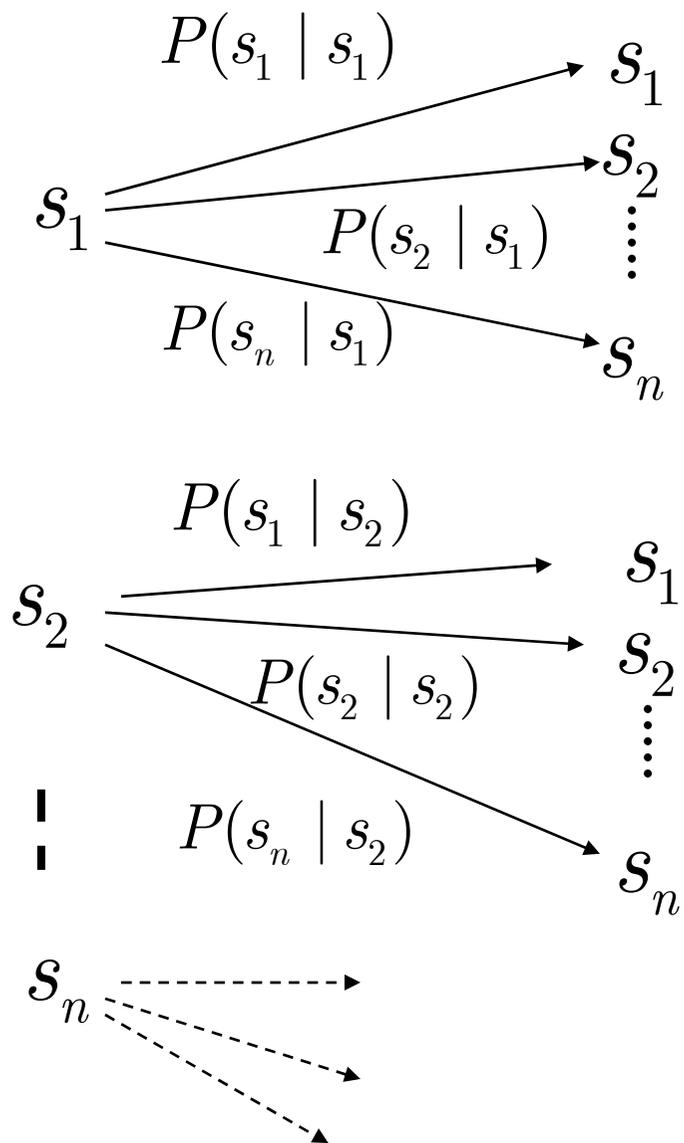
で定められる情報源である。

$s$  は今度発生する記号

$s'$  は直前に発生した記号

# マルコフ情報源における状態の遷移

$$S = \{s_1, \dots, s_n\}$$



# 状態遷移(確率)行列

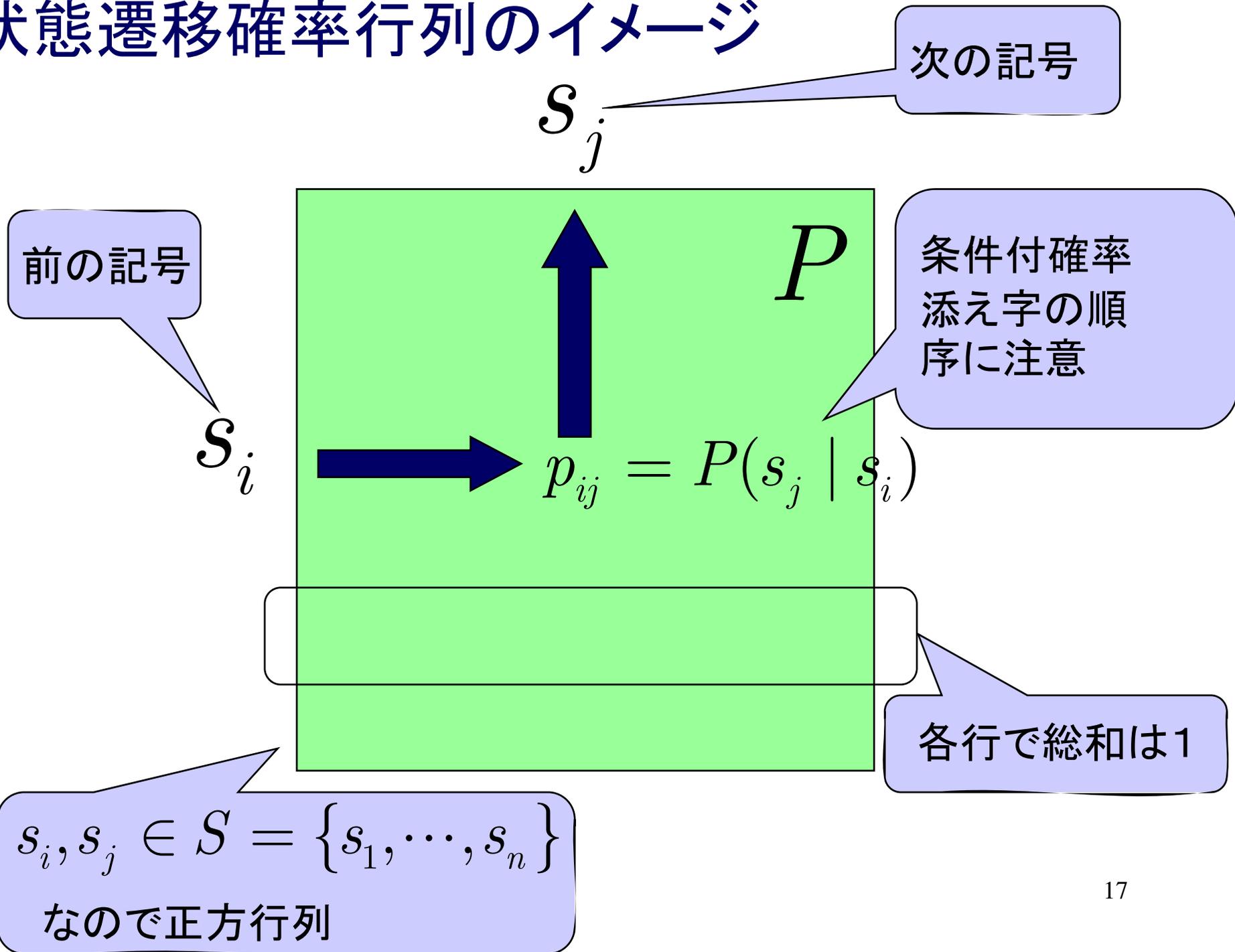
$$P = \begin{bmatrix} P(s_1 | s_1) & P(s_2 | s_1) & \cdots & P(s_n | s_1) \\ P(s_1 | s_2) & P(s_2 | s_2) & \cdots & P(s_n | s_2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P(s_1 | s_n) & \cdots & \cdots & P(s_n | s_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

行ベクトルはすべて、**確率ベクトル**(要素は全て0から1の値を持ち、要素の総和が1)。すなわち、確率ベクトル  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  に対して次式が成り立つ。

$$1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

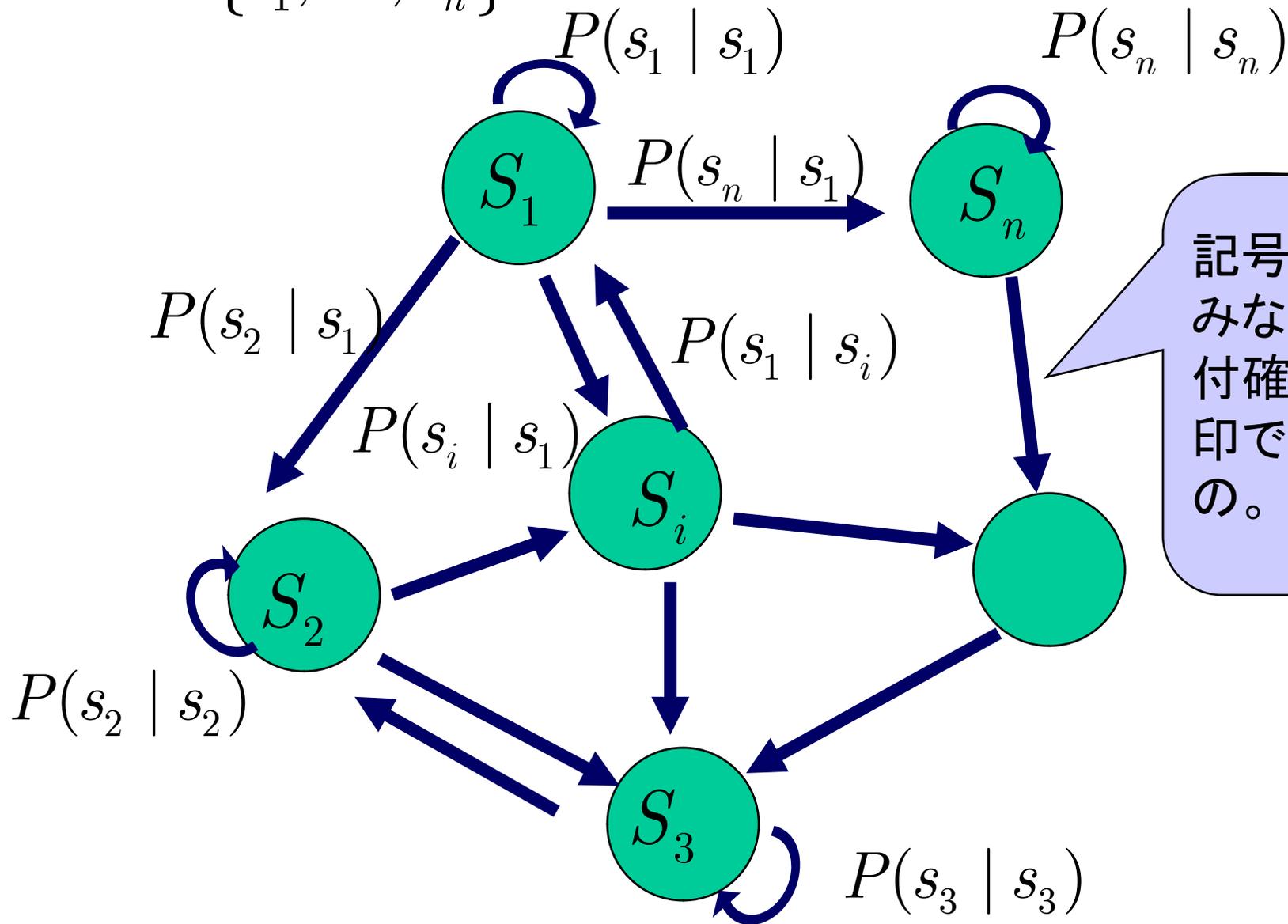
$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

# 状態遷移確率行列のイメージ



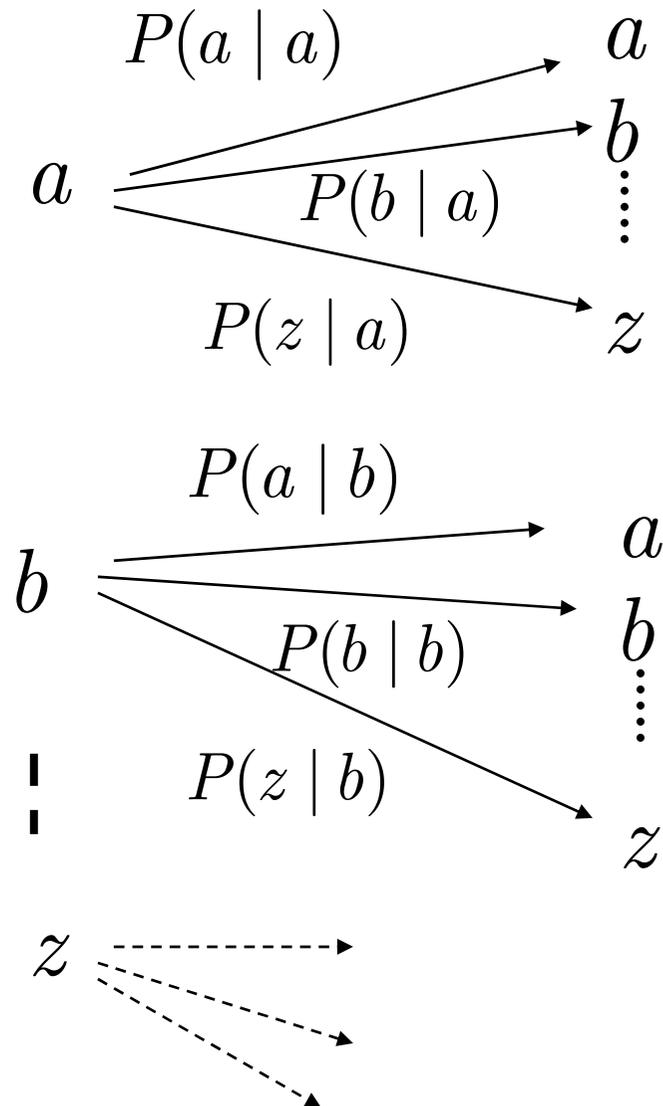
# シャノン線図(状態遷移図)

$$S = \{s_1, \dots, s_n\}$$



# マルコフ情報源例(アルファベット)

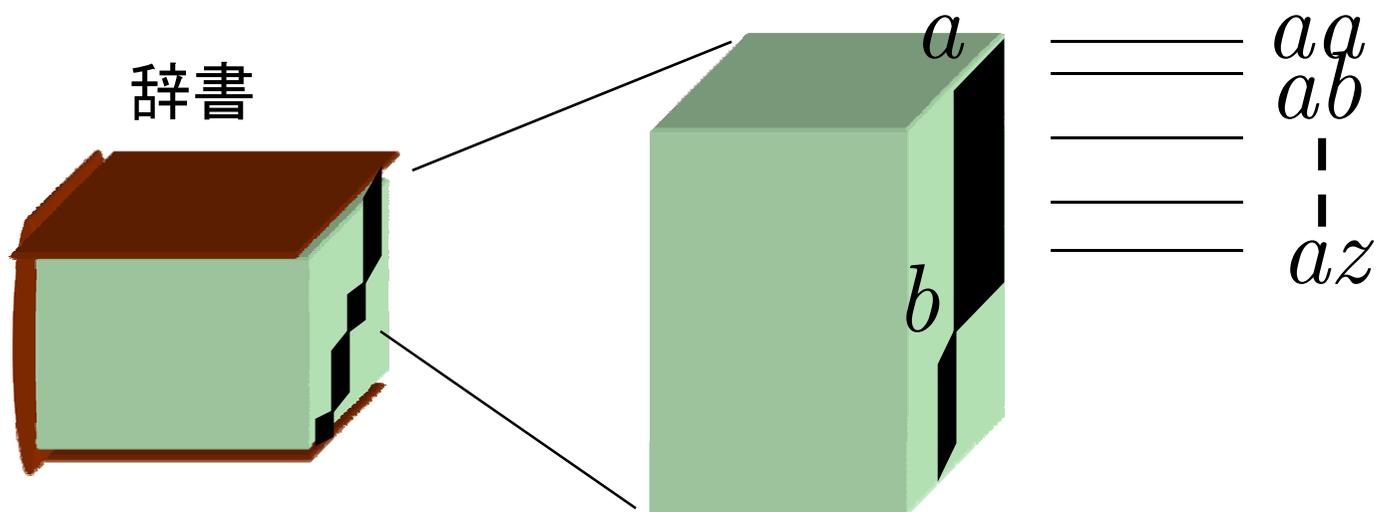
$$\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$$



英単語において、  
thやer  
が多いことから、  
 $P(h|t)$  や  $P(r|e)$   
が大きいと考えられる。

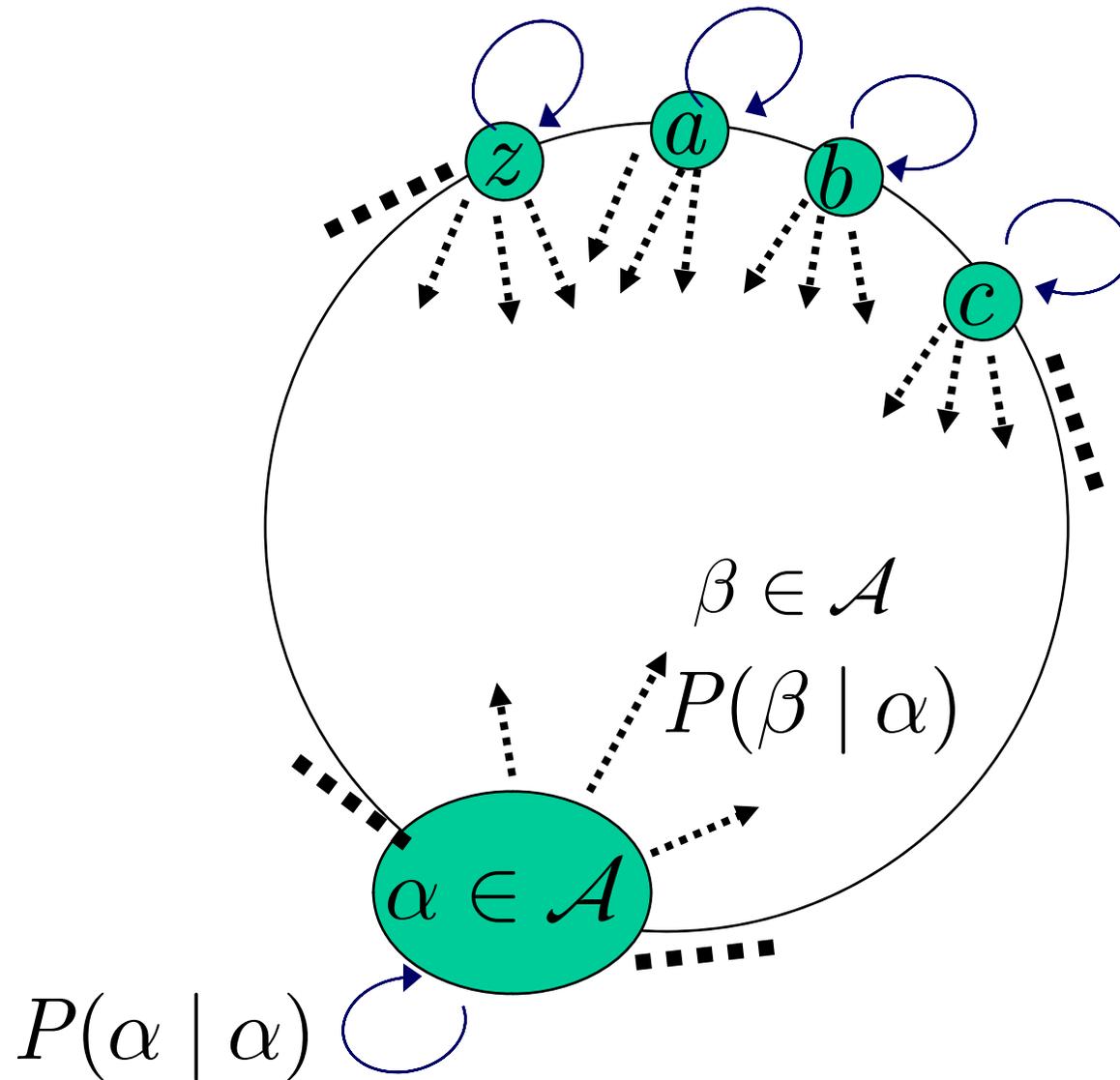
# 狀態遷移行列

$$P = \begin{bmatrix} P(a|a) & P(b|a) & \cdots & P(z|a) \\ P(a|b) & P(b|b) & \cdots & P(z|b) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P(a|z) & \cdots & \cdots & P(z|z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a \\ P_b \\ \vdots \\ P_z \end{bmatrix}$$



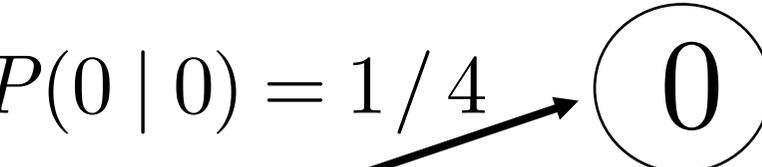
# シャノン線図(アルファベット)

$$\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$$

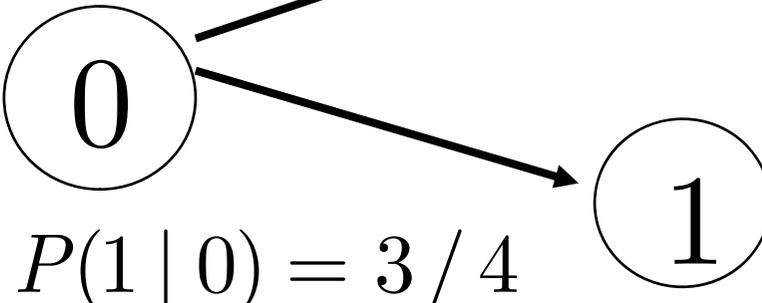


# マルコフ情報源例(2元単純マルコフ情報源)

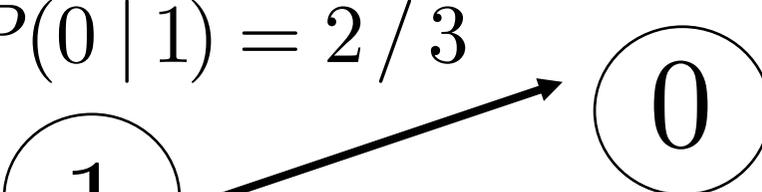
$$B = \{0, 1\}$$

$$P(0 | 0) = 1/4$$


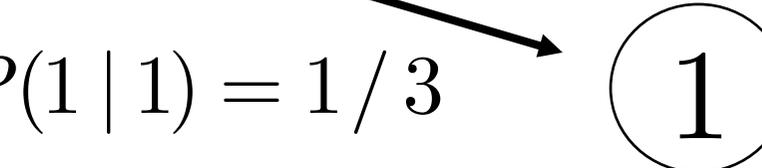
A circle containing the number 0 has an arrow pointing to another circle containing the number 0.

$$P(1 | 0) = 3/4$$


A circle containing the number 0 has an arrow pointing to another circle containing the number 1.

$$P(0 | 1) = 2/3$$


A circle containing the number 1 has an arrow pointing to another circle containing the number 0.

$$P(1 | 1) = 1/3$$


A circle containing the number 1 has an arrow pointing to another circle containing the number 1.

状態(記号)  
が0の行

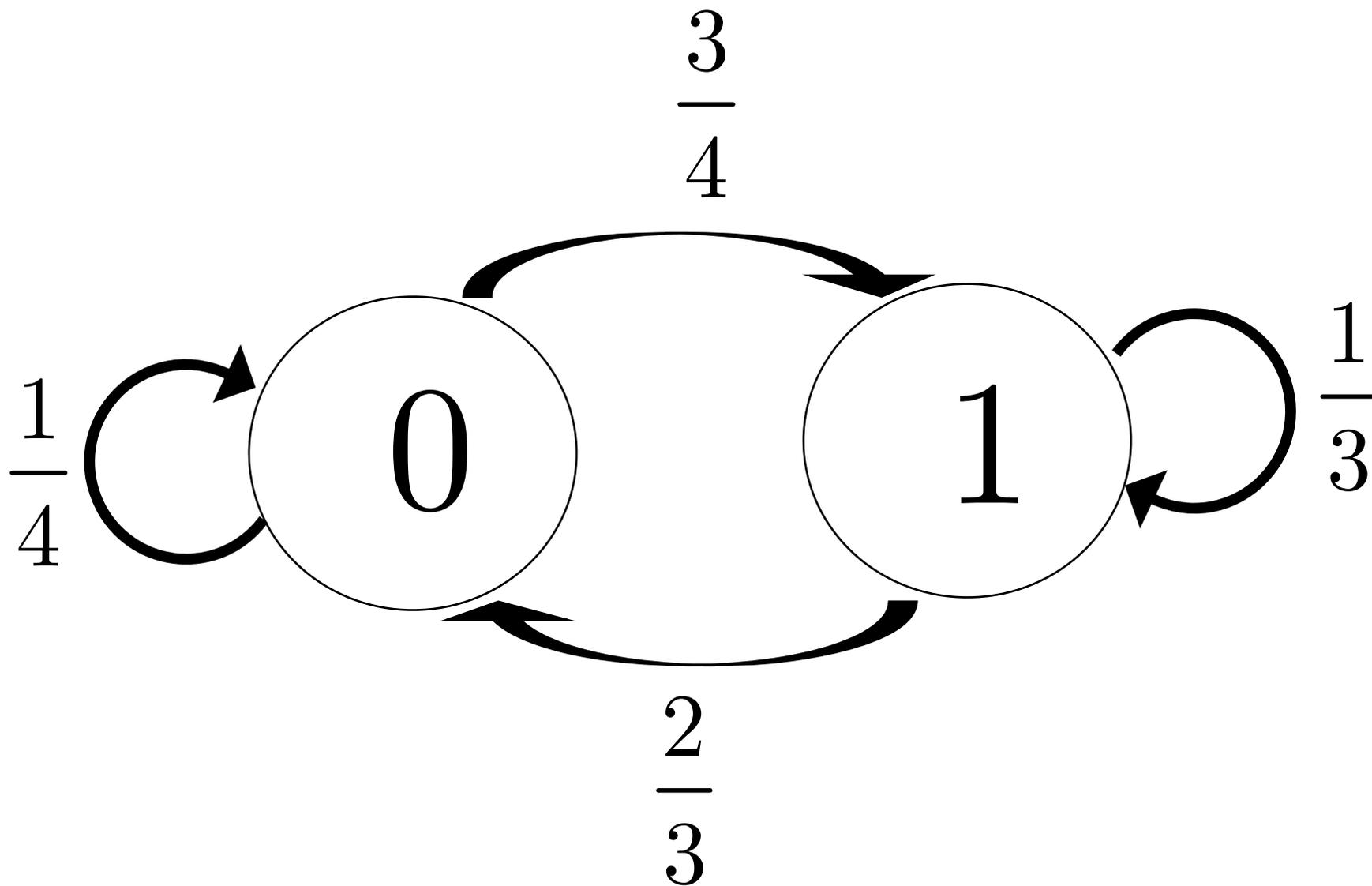
$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

状態(記号)  
が1の行

生成記号が  
0の列

生成記号が  
1の列

## 2元単純マルコフ情報源のシャノン線図



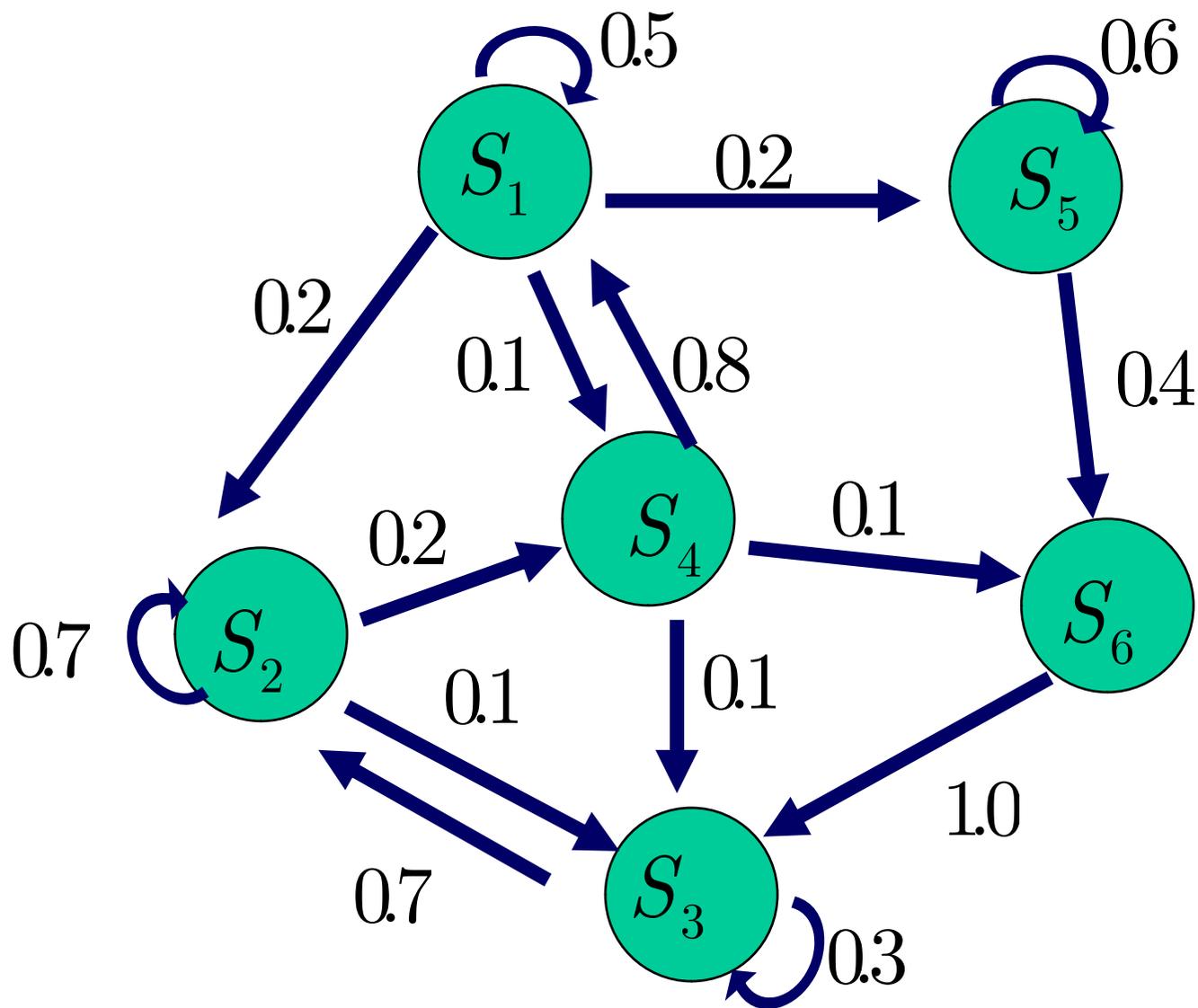
# 練習1

次の状態遷移確率行列で表されるマルコフ情報源を、シャノン線図で表せ。

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

## 練習2

次のシャノン線図で表されるマルコフ情報源の状態遷移確率行列を求めよ。



## 練習3

次のようなマルコフ情報源の、  
状態遷移確率行列およびシャノン線図を求めよ。

$$\text{手} = \{\text{グー、チョキ、パー}\}$$

自分が出した手の次の手は、

- ・前の手に勝つような手を出す確率が $1/2$ である。
- ・前の手に引き分ける手を出す確率が $1/3$ である。
- ・前の手に負ける手を出す確率が $1/6$ である。

# (参考) 無記憶情報源の状態遷移行列

均等なサイコロを振ったときの状態遷移行列

次 出る目

今の目

$P =$

	1	2	3	4	5	6
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
2	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
3	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
4	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
5	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
6	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

条件付  
確率

偶数の出やすいサイコロ(無記憶情報源)

今の目

次出る目

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \end{array} \right] \end{matrix}$$

条件付確率

# 練習

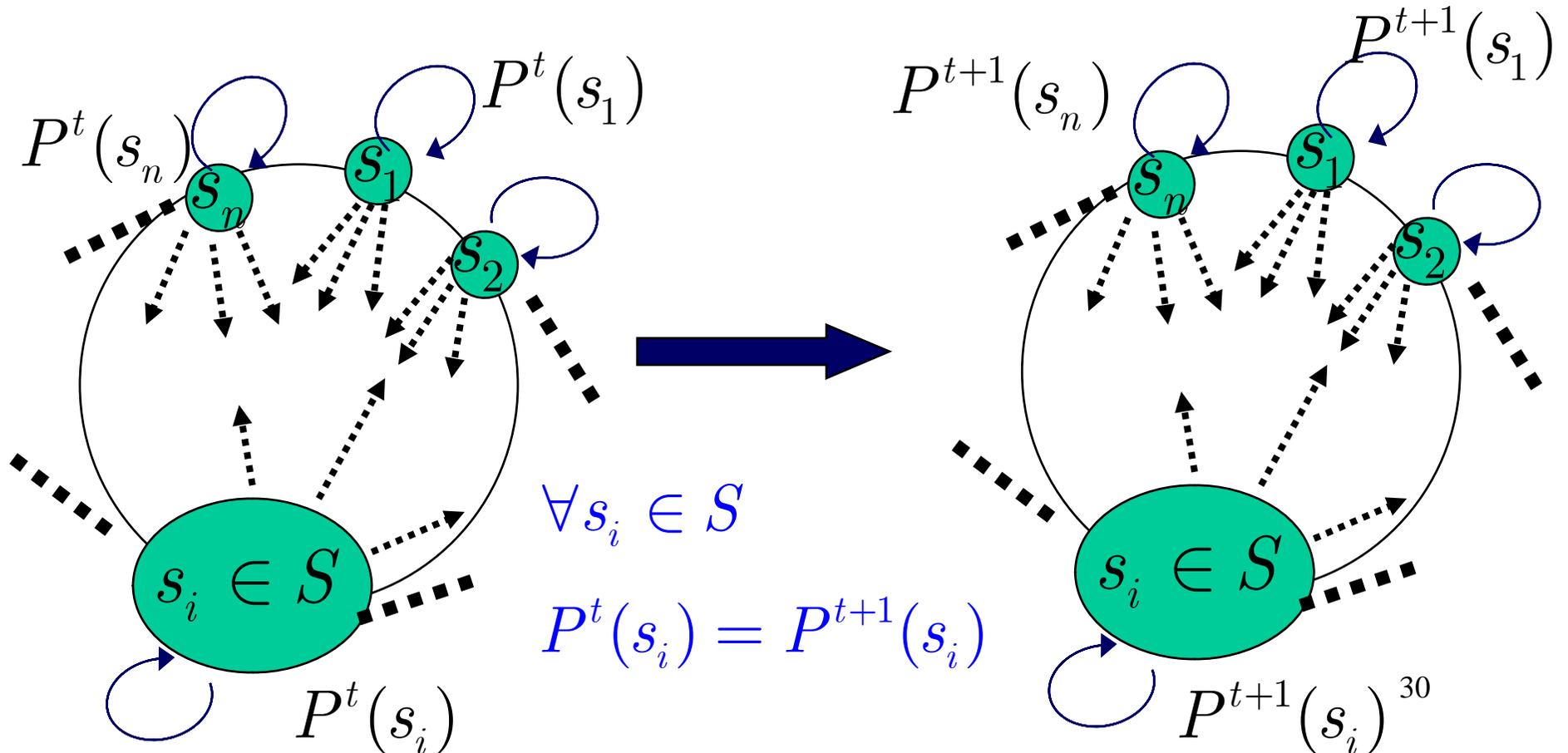
(1) コインを振って得られる状態遷移関数を求めよ。

(2) 表の出る確率が、裏の確率の2倍であるコインを振って得られる状態遷移関数を求めよ。

# 定常分布

定義: 定常分布

情報源アルファベット  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  に対して、出現確率が時刻  $t$  と時刻  $t + 1$  で変化しないような記号の分布を**定常分布**という。



# 定常分布の求め方

定常分布は、状態遷移確率行列から求めることができる。  
定常分布を  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  とし、状態遷移確率行列を  $P = [p_{ij}]$  とする。このとき、次式が成り立つ。

時刻  $t$  から  $t + 1$  になっても変化しない。  
常に一定の出現確率となる。

$$z = zP$$

記号の出現確率。

生成した記号の確率と状態遷移確率積なので、次の記号の出現確率を表す。

$\mathbf{z} = \mathbf{z}P$  の意味。

$(P(s_1), \dots, P(s_n)) = (P(s_1), \dots, P(s_n))$

$$\begin{bmatrix} P(s_1 | s_1) & P(s_2 | s_1) & \cdots & P(s_n | s_1) \\ P(s_1 | s_2) & P(s_2 | s_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(s_1 | s_n) & \cdots & \cdots & P(s_n | s_n) \end{bmatrix}$$

情報理論では、慣用的に確率ベクトルは行ベクトルで表される。

${}^t \mathbf{z} = {}^t P {}^t \mathbf{z}$  転置を用いて左式のようにも表せる。

$$\begin{pmatrix} P(s_1) \\ P(s_2) \\ \vdots \\ P(s_n) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P(s_1 | s_1) & P(s_1 | s_2) & \cdots & P(s_1 | s_n) \\ P(s_2 | s_1) & P(s_2 | s_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(s_n | s_1) & \cdots & \cdots & P(s_n | s_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P(s_1) \\ P(s_2) \\ \vdots \\ P(s_n) \end{pmatrix}$$

# 定常分布例

情報源アルファベット  $B = \{0,1\}$  に対する2元マルコフ情報源の状態遷移確率関数が次式で与えられている。

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

このとき、定常分布  $z = (z_0, z_1) = (P(0), P(1))$  を求めよ。

解)

$$(z_0, z_1) = (z_0, z_1) \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

より、

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{4}z_0 = \frac{2}{3}z_1 \\ \frac{2}{3}z_1 = \frac{3}{4}z_0 \end{cases}$$

全ての行ベクトルが確率ベクトルなので遷移確率行列は正則でなく逆行列を持たない。よって、このように必ず不定の解になる。

$$\therefore 9z_0 = 8z_1$$

一方、 $z$  は確率ベクトルなので、

$$z_0 + z_1 = 1$$

前のスライドとこの式から求める。

が成り立つ。

$$\therefore z_0 + \frac{9}{8}z_0 = 1$$

$$\therefore z_0 = \frac{8}{17}$$

$$\therefore z_1 = \frac{9}{17}$$

検算

$$\begin{aligned} & \left( \frac{8}{17} \quad \frac{9}{17} \right) \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{2}{17} + \frac{6}{17} \quad \frac{6}{17} + \frac{9}{17} \right) \\ &= \left( \frac{8}{17} \quad \frac{9}{17} \right) \end{aligned}$$

# 練習

次の状態遷移確率行列で表される情報源の定常分布を求めよ。

$$(1) \quad P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

# 無記憶情報源における定常分布

無記憶情報源における定常分布は、出現確率と一致する。

無記憶情報源が次式で表されているとする。

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} s_1 & , & \cdots & , & s_n \\ P(s_1) & , & \cdots & , & P(s_n) \end{array} \right\}$$

このとき、状態遷移確率行列は次式で表される。

$$P = \begin{bmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{bmatrix}$$

すべての行が同一な  
状態遷移行列。  
逆に、このような行列  
で表される情報源が  
無記憶情報源。

$$\begin{aligned}
& \left( P(s_1) \quad \cdots \quad P(s_n) \right) \begin{bmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{bmatrix} \\
&= \left( P(s_1) \underbrace{\sum_{i=1}^n P(s_i)}_1 \quad \cdots \quad P(s_n) \underbrace{\sum_{i=1}^n P(s_i)}_1 \right) \\
&= \left( P(s_1) \quad \cdots \quad P(s_n) \right)
\end{aligned}$$

# マルコフ情報源の随伴(無記憶)情報源

定義: 随伴情報源

マルコフ情報源  $S$  の定常分布を確率分布とするような無記憶情報源を元のマルコフ情報源の随伴情報源  $\overline{S}$  という。

例 情報源アルファベット  $B = \{0, 1\}$  を持ち、状態遷移確率行列が

$$P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

で表されるマルコフ情報源を  $S_B$  とする。  
このとき、随伴情報源  $\overline{S}_B$  は次式で表される。

$$\overline{S}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & , & 1 \\ 8/17 & , & 9/17 \end{array} \right\}$$

# マルコフ情報源のエントロピー

定義: マルコフ情報源のエントロピー

マルコフ情報源  $S$  に対して、 $S$  を条件とする  $S$  の条件付きエントロピー  $H(S | S)$  をマルコフ情報源のエントロピーという。

$$\begin{aligned} H(S | S) &= \sum_{s_i \in S} P(s_i) H(S | s_i) \\ &= - \sum_{s_i \in S} P(s_i) \sum_{s_j \in S} P(s_j | s_i) \log P(s_j | s_i) \\ &= - \sum_{s_i, s_j \in S} P(s_i) P(s_j | s_i) \log P(s_j | s_i) \\ &= - \sum_{s_i, s_j \in S} P(s_j, s_i) \log P(s_j | s_i) \end{aligned}$$

# マルコフ情報源のエントロピー例

$$\text{状態遷移確率行列 } P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

で定まるマルコフ情報源  $S_B$  のエントロピーを求める。

まず、定常分布  $z$  は以下で与えられる。

$$z = (P(0), P(1)) = \left( \frac{8}{17}, \frac{9}{17} \right)$$

状態0におけるエントロピー(0を条件とする条件付きエントロピー)  
 $H(S_B | 0)$  および状態1におけるエントロピー  $H(S_B | 1)$   
を求める。

$$H(S_B | 0) = -P(0 | 0) \log P(0 | 0) - P(1 | 0) \log P(1 | 0)$$

$$= \mathcal{H} \left( \frac{1}{4} \right)$$

0の時のエントロピー

$$\simeq 0.811$$

$$H(S_B | 1) = -P(0 | 1) \log P(0 | 1) - P(1 | 1) \log P(1 | 1)$$

$$= \mathcal{H} \left( \frac{1}{3} \right)$$

1の時のエントロピー

$$\simeq 0.918$$

$$\therefore H(S_B | S_B) = P(0)H(S_B | 0) + P(1)H(S_B | 1)$$

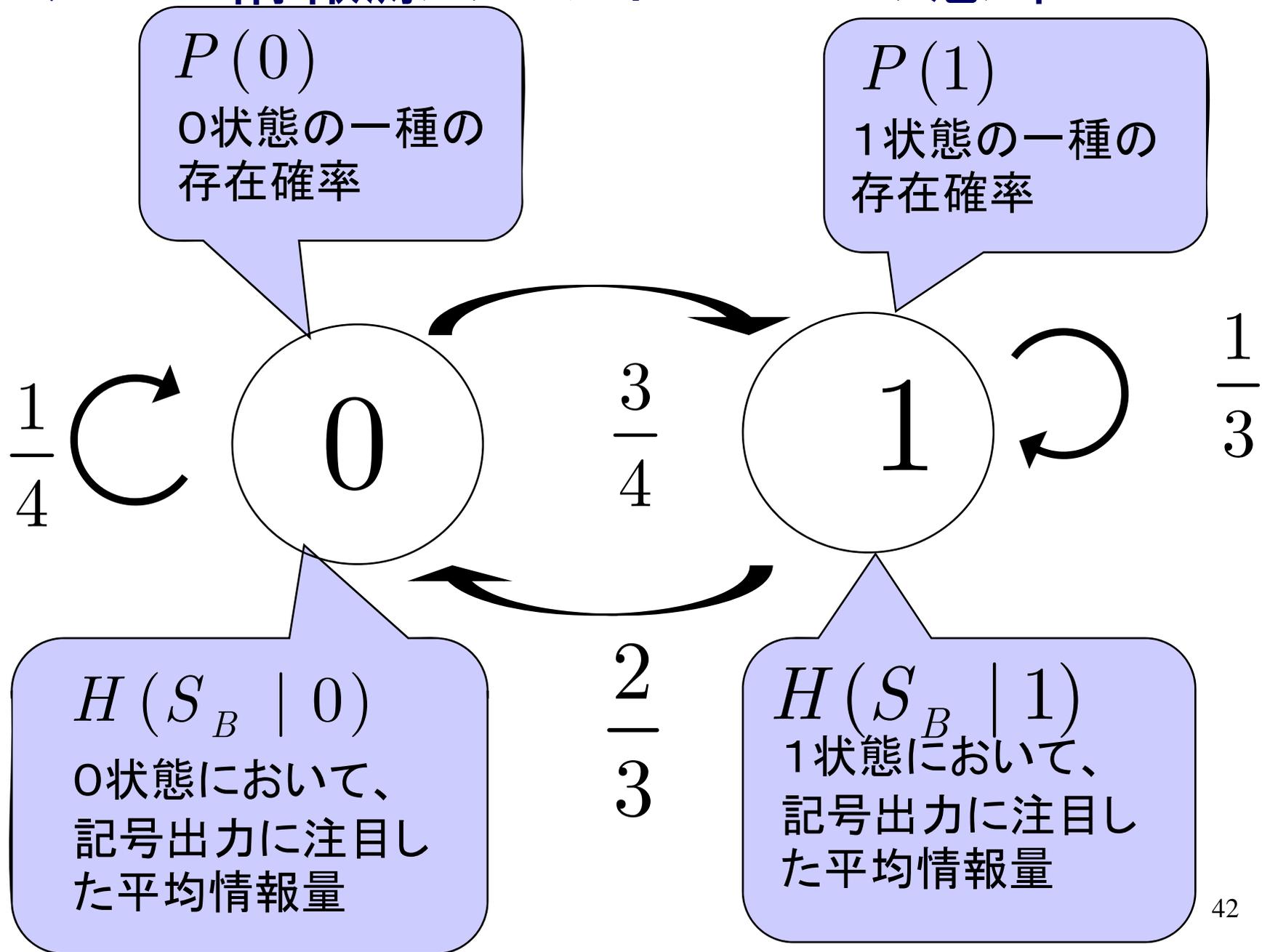
$$= \frac{8}{17} \mathcal{H} \left( \frac{1}{4} \right) + \frac{9}{17} \mathcal{H} \left( \frac{1}{3} \right)$$

$$\simeq 0.382 + 0.486$$

マルコフ情報源のエントロピー

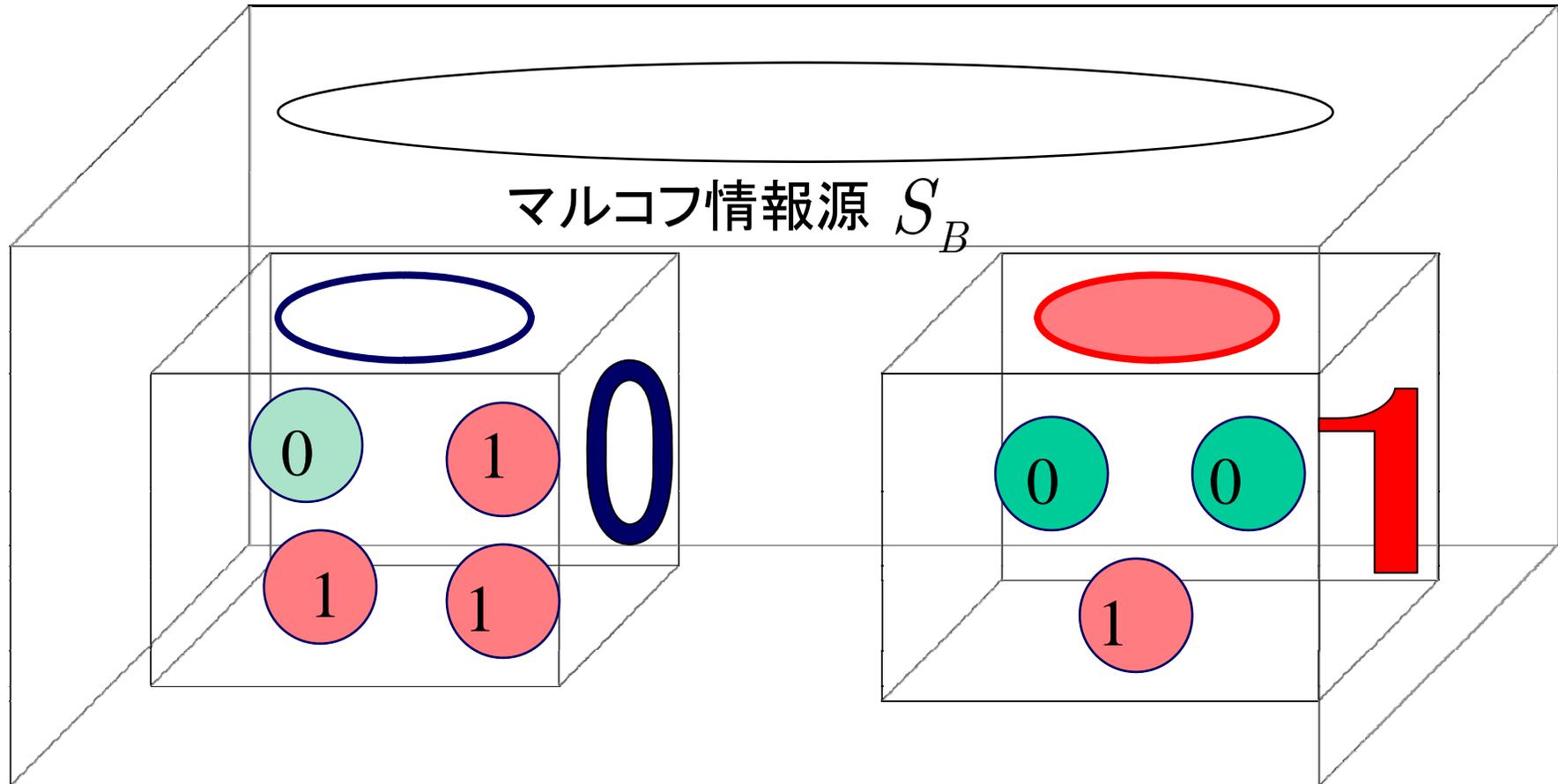
$$= 0.868$$

# マルコフ情報源のエントロピーの意味



# イメージ

0を取ったら次は0の箱から取り、1を取ったら次は1の箱からとる。取った玉は元に戻る。(前のスライドに対応する。)



# 練習

次の状態遷移確率行列で表される情報源のエントロピーを求めよ。

$$(1) \quad P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

# マルコフ情報源のエントロピーの性質

マルコフ情報源  $S$  に対して、随伴情報源を  $\bar{S}$  とする。このとき、随伴情報源のエントロピーは、マルコフ情報源のエントロピー以上である。すなわち、次式が成り立つ。

$$H(S | S) \leq H(\bar{S})$$

出現確率は同じでも、マルコフ情報源の方は記号の現れ方に制限がある。(すなわち、記号の出現の予測が無記憶情報源比べて行いやすい。)したがって、マルコフ情報源の方が平均情報量が少なくなる。

## 随伴情報源のエントロピー例

$$P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{の随伴情報源は}$$

$$\overline{S}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & , & 1 \\ 8/17 & , & 9/17 \end{array} \right\} \quad \text{である。}$$

したがて、エントロピー  $H(\overline{S}_B)$  は次式で求められる。

$$H(\overline{S}_B) = \mathcal{H}\left(\frac{8}{17}\right) \simeq 0.997$$

$$\therefore 0.868 \simeq H(S_B | S_B) \leq H(\overline{S}_B) \simeq 0.997$$

## 練習

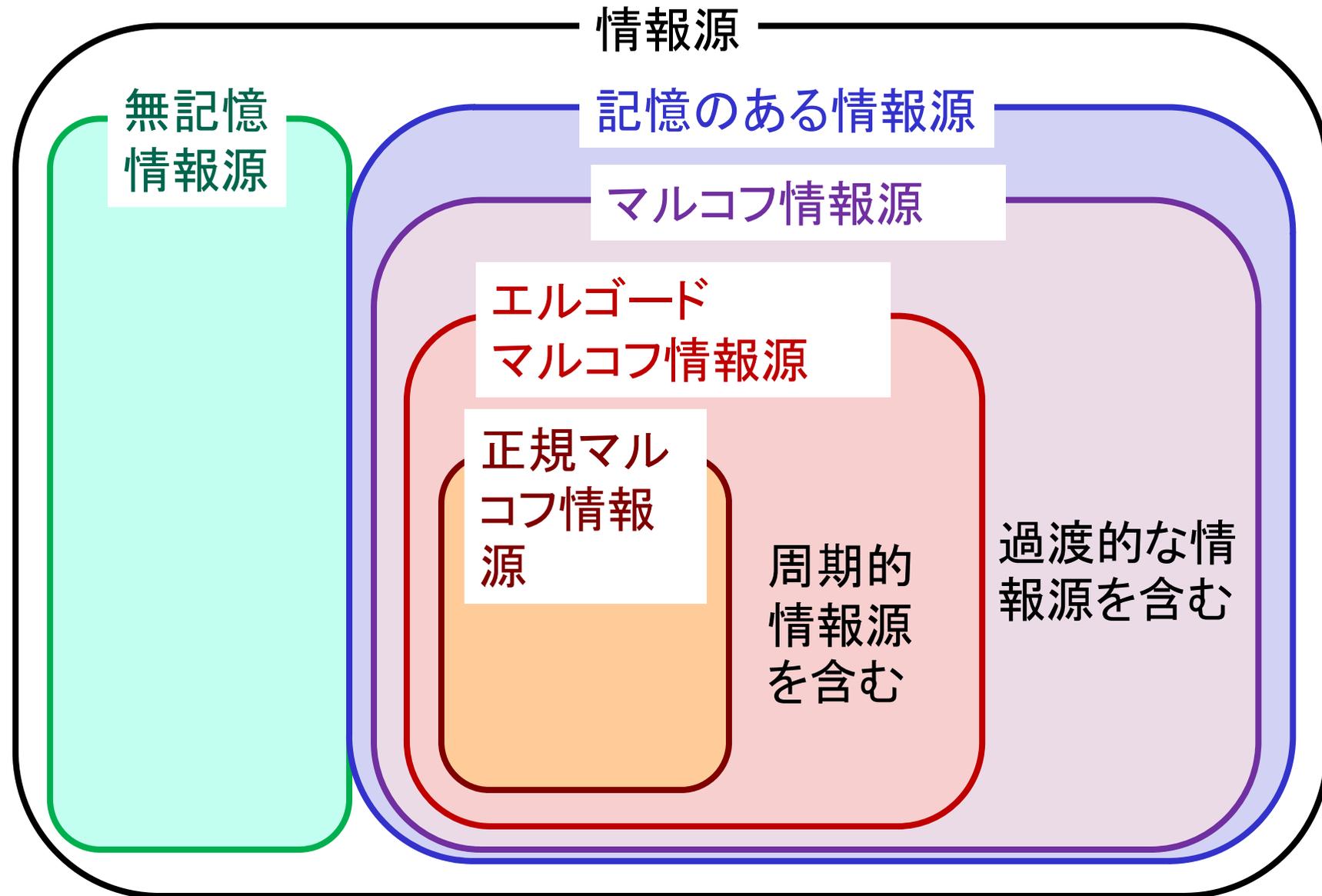
次の状態遷移確率行列で現されるマルコフ情報源の随伴情報源のエントロピーを求めよ。

$$(1) \quad P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

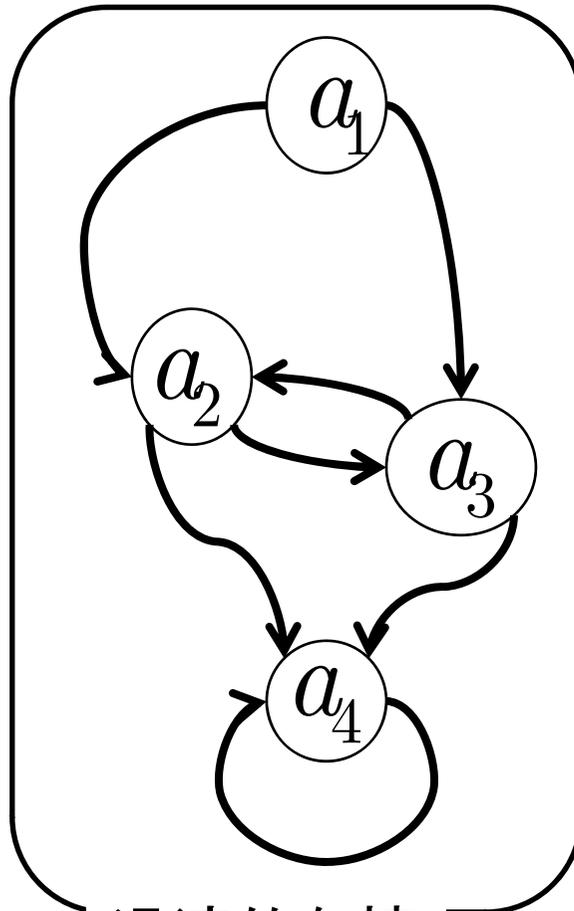
# 情報源の分類

# 情報源の分類図

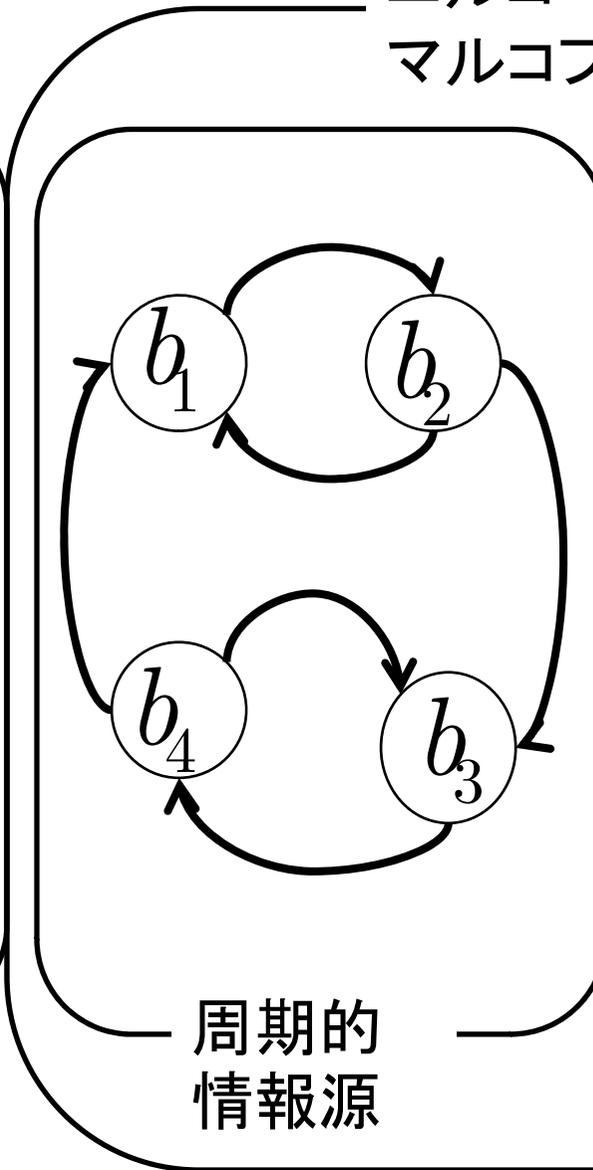


# 様々なマルコフ情報源

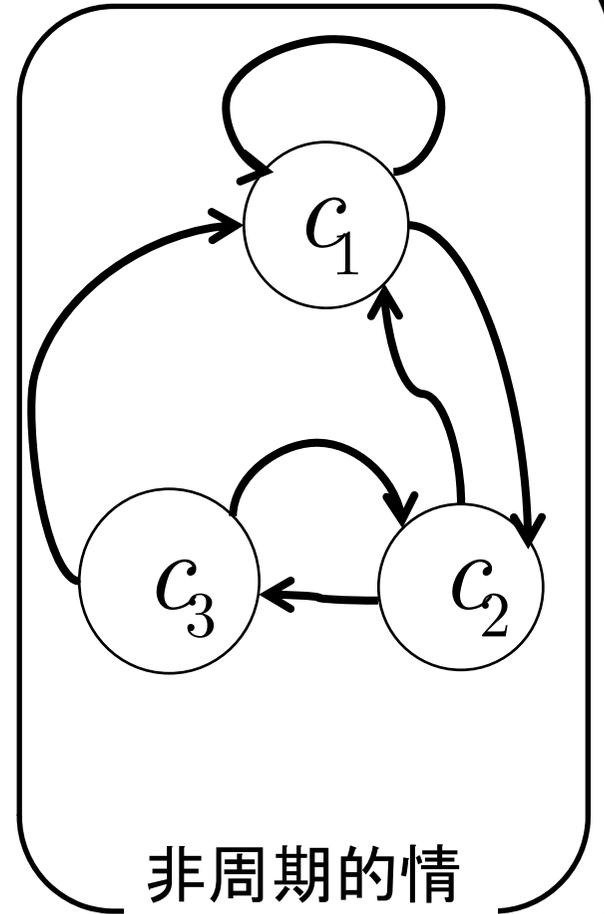
エルゴード  
マルコフ情報源



過渡的な情報源



周期的情報源



非周期的情報源

矢印には0より大きい確率が割り当てられている。

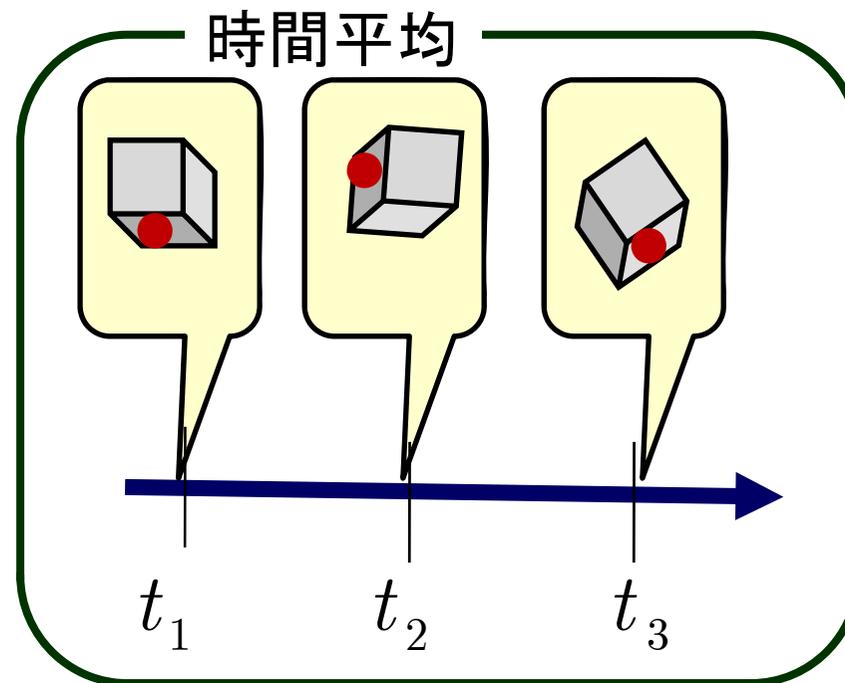
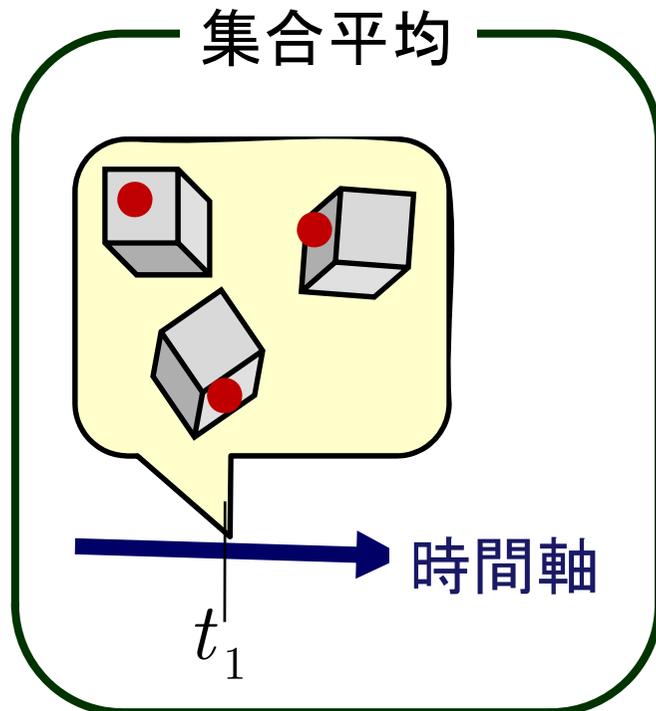
# エルゴード性

定義:エルゴード性

集合平均と時間平均が等しい性質をエルゴード性という。

$$[\text{集合平均}] = [\text{時間平均}]$$

エルゴード性を持つ情報源をエルゴード情報源という。



サイコロ  $D_i$  を振ったときの目を情報源と考えると、エルゴード性を満たす。

	$t_1$	$t_2$	...	$t_j$	...	$t_T$
$D_1$	3	2	...	6	...	1
$D_2$	2	4	...	1	...	5
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
$D_i$	5	3	...	6	...	1
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
$D_n$	2	1	...	4	...	3

時間平均:  
1つのサイコロを何回も振ったときの平均

集合平均: 1回に多数のサイコロを振ったときの平均

# 状態遷移行列による判別

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij} = P(s_j | s_i)$$

前の記号  $s_i$  のときに次の記号  $s_j$  を生成する確率。添え字の順序に注意する。

$$P^t = \begin{bmatrix} p_{11}^{(t)} & p_{12}^{(t)} & \cdots & p_{1n}^{(t)} \\ p_{21}^{(t)} & p_{22}^{(t)} & \cdots & p_{2n}^{(t)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(t)} & \cdots & \cdots & p_{nn}^{(t)} \end{bmatrix}$$

$$P^t = \underbrace{P \cdot P \cdot \cdots \cdot P}_{t\text{個}}$$

遷移を  $t$  回繰り返すときの遷移確率。

# 過渡的なマルコフ情報源

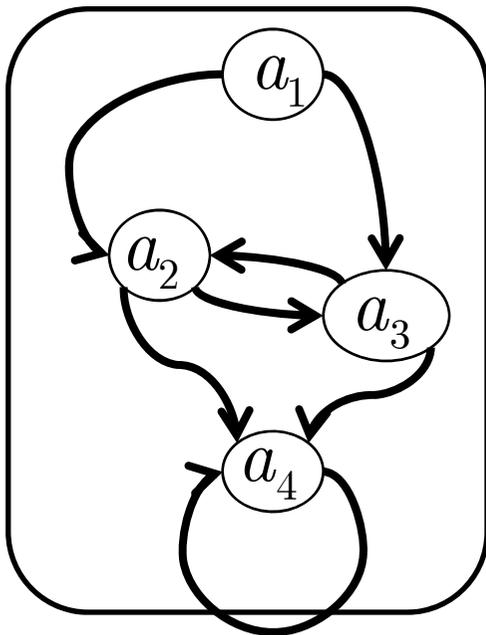
定義: 過渡的な情報源

十分な時間経過の後に、生成確率がすべて0に収束するような状態を持つマルコフ情報源を過渡的な情報源という。

過渡的な情報源



$$\exists j, \forall i, \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow p_{ij}^{(t)} \rightarrow 0$$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{32} & 0 & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}$$



$$P^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

過渡的

# エルゴードマルコフ情報源

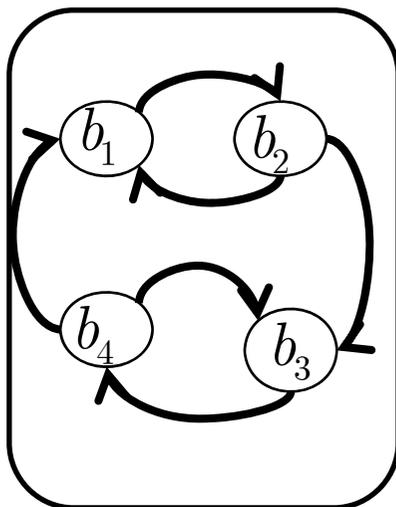
定義:エルゴード情報源

過渡的でない情報源をエルゴード情報源という。エルゴード情報源はエルゴード性を満たす。

エルゴード情報源



$$\forall i, j, \exists t_{ij}, p_{ij}^{(t_{ij})} > 0$$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} \\ p_{41} & 0 & p_{43} & 0 \end{bmatrix}$$



$$P^{t_o} = \begin{bmatrix} 0 & p^{(t_o)}_{12} & 0 & p^{(t_o)}_{14} \\ p^{(t_o)}_{21} & 0 & p^{(t_o)}_{23} & 0 \\ 0 & p^{(t_o)}_{32} & 0 & p^{(t_o)}_{34} \\ p^{(t_o)}_{41} & 0 & p^{(t_o)}_{43} & 0 \end{bmatrix}$$



$$P^{t_e} = \begin{bmatrix} p^{(t_e)}_{11} & 0 & p^{(t_e)}_{13} & 0 \\ 0 & p^{(t_e)}_{22} & 0 & p^{(t_e)}_{24} \\ p^{(t_e)}_{31} & 0 & p^{(t_e)}_{33} & 0 \\ 0 & p^{(t_e)}_{42} & 0 & p^{(t_e)}_{44} \end{bmatrix}$$

周期的

# 正規マルコフ情報源

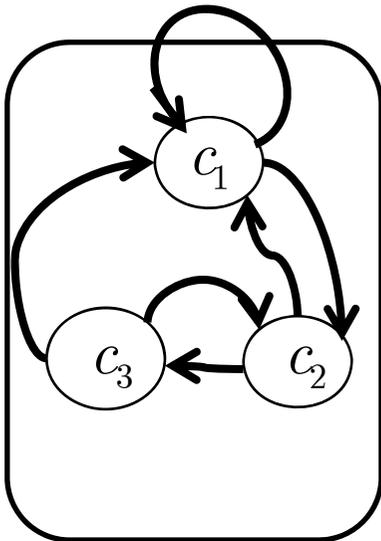
定義:エルゴード情報源

十分な時間経過後、各状態からすべての状態への遷移確率が0より大きいマルコフ情報源を**正規マルコフ情報源**という。

**正規マルコフ情報源**



$$\forall i, j, \exists t, p_{ij}^{(t)} > 0$$



$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P^t = \begin{bmatrix} p_{11}^{(t)} & p_{12}^{(t)} & p_{13}^{(t)} \\ p_{21}^{(t)} & p_{22}^{(t)} & p_{23}^{(t)} \\ p_{31}^{(t)} & p_{32}^{(t)} & p_{33}^{(t)} \end{bmatrix}$$

全ての確率は非零

# 練習

次の遷移行列で表わされるマルコフ情報源の種類が、  
過渡的、周期的、正規マルコフ情報源のいずれかを答えよ。

(1)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$