3.エントロピーの性質と各種情報量

エントロピーの性質

事象系

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_n \\ P(a_1) & , & P(a_2) & , & \cdots & , & P(a_n) \end{Bmatrix}$$

のエントロピーは次式で表される。

$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} P(a_i) \log P(a_i)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

ある事象が必ず起きるとき。

$$a_1 = 1, a_2 = \cdots = a_n = 0$$

全ての事象が等確率のとき。

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$$

前のスライドの式を導出するために、
次の2つの事象系を考える。

カンマ“，”は
“AND（かつ）”
の意味

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_n \\ P_1 & , & P_2 & , & \cdots & , & P_n \end{Bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{Bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} Q_i = 1$$

補題1 (lemma1)

$$-\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i \le -\sum_{i=1}^{n} P_i \log Q_i$$

エントロピー

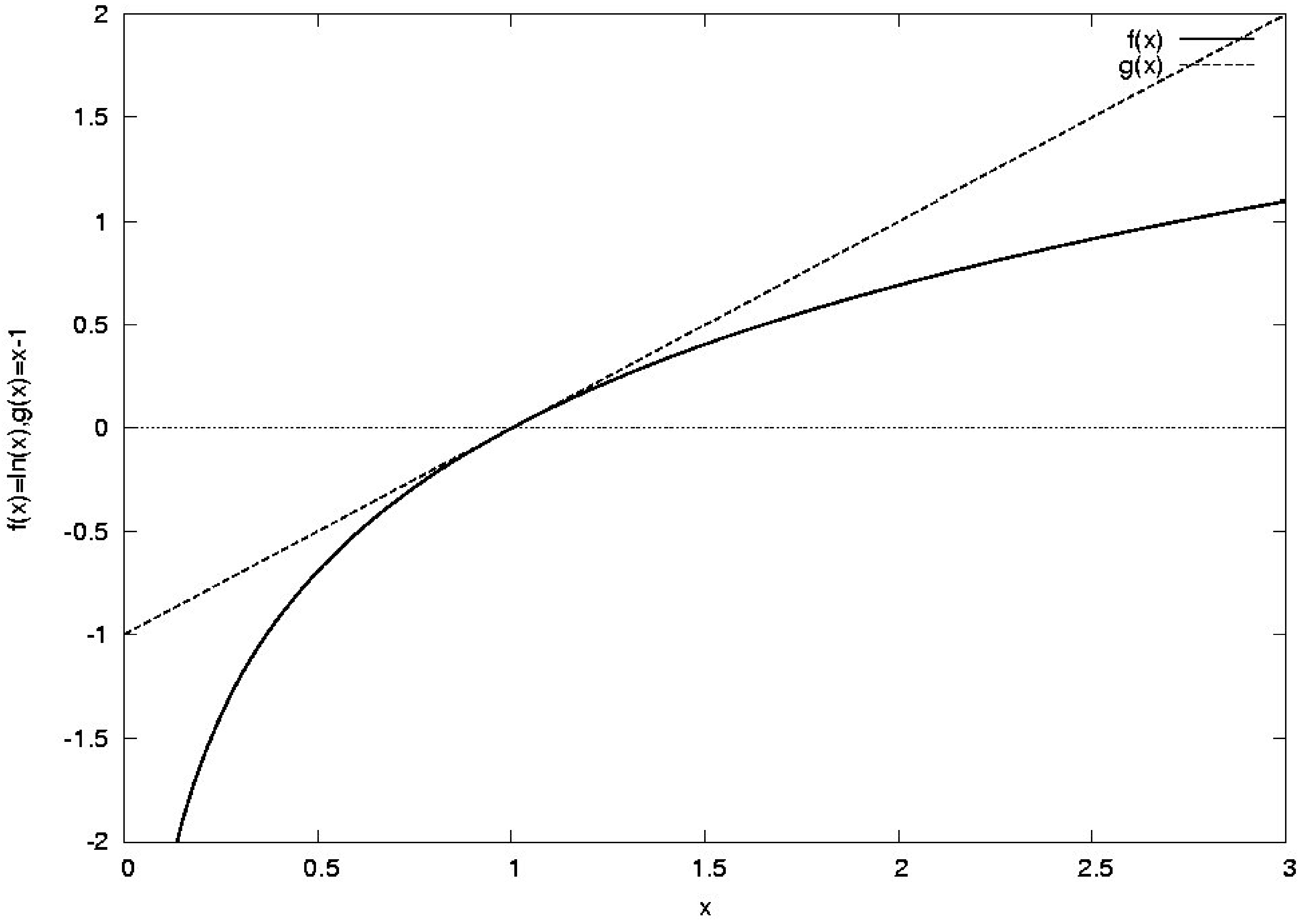
対数と係数の
違いに注意する。

証明

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$

不等式の利用。

$$\ln x \le x - 1$$


f(x)
g(x)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x
f(x)=ln(x),g(x)=x-1

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$

$$\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{Q_i}{P_i} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} (Q_i - P_i)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Q_i}_{1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_i}_{1} \right)$$

$$= 0$$

この変形で、

$$x = \frac{Q_i}{P_i}$$

として n回不等式を利用いる。

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i} \leq 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log \frac{1}{P_i} - P_i \log \frac{1}{Q_i} \right) \leq 0$$

$$\therefore -\sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log P_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log Q_i \right) \leq 0$$

$$\therefore -\sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log P_i \right) \leq -\sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log Q_i \right)$$

QED

エントロピー最大となる情報源

定理1

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

証明　（左の不等号）

各 $i, (1 \leq i \leq n)$ に対して、次式が成り立つ。

$$0 \leq P(a_i) \leq 1$$

$$\therefore 1 \leq \frac{1}{P(a_i)}$$

$$\therefore 0 \leq -\log P(a_i)$$

よって、

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} P(a_i) \log P(a_i) \geq 0$$

（右の不等号）

$$B=\begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & \cdots & , & b_n \\ \dfrac{1}{n} & , & \dfrac{1}{n} & , & \cdots & , & \dfrac{1}{n} \end{Bmatrix}$$

とおく。補題１より、

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i \quad &\le -\sum_{i=1}^{n} P_i \log Q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_i \log n \\ &= \log n \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \right) \\ &= \log n \end{aligned}$$

QED

定理1より、全ての記号が均等に現れる情報源が最大のエントロピー（1記号あたりの平均情報量）を持つ。

しかし、実世界のアルファベットなどは、均等に現れない。

実世界の文章には、その分の冗長性が含まれている。
（実は、人間の理解においてある程度の冗長性があった方がよい。）

ある情報形態に対して、同じ情報量を持つより小さい（短い）情報表現を得ることを圧縮という。圧縮からもとの情報形態を得ることを解凍という。

練習

次の事象系のエントロピー(平均情報量)を求めよ。

（1）

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & b_3 & , & b_4 \\ \dfrac{1}{8} & , & \dfrac{1}{8} & , & \dfrac{1}{4} & , & \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$C = \begin{Bmatrix} c_1 & , & c_2 & , & c_3 & , & c_4 \\ \dfrac{1}{4} & , & \dfrac{1}{4} & , & \dfrac{1}{4} & , & \dfrac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

各種情報量

複数の事象系が互いに関係している場合に、それぞれの事象系に関する様々なエントロピー（平均情報量）が定義できる。

- 条件付きエントロピー
- 結合エントロピー
- 相互情報量

条件付き確率に基づいた平均情報量。

結合確率に基づいた平均情報量。

事象系同士の（情報量としての）関わりを表す。エントロピー、条件付きエントロピー、結合エントロピーにより定義される。

これらの情報量を例題を通じて調べたのちに、定義する。

例題

次のようなゲームを考える。

サイコロゲーム:

「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

この勝ち負けに関する情報を2つの事象系としてとらえる。

サイコロゲームの勝敗表

サイコロゲーム:「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

乙＼甲	1	2	3	4	5	6
1	△	○	○	○	○	○
2	×	△	○	○	○	○
3	×	×	△	○	○	○
4	×	×	×	△	○	○
5	×	×	×	×	△	○
6	×	×	×	×	×	△

甲

○:勝ち
△:引分け
×:負け

サイコロゲームより次の２つの事象系を考える。

事象系A: 甲の勝負に関する事象系

$$A = \begin{Bmatrix} ♎ & , & ☶ & , & \times \\ \dfrac{15}{36} & , & \dfrac{6}{36} & , & \dfrac{15}{36} \end{Bmatrix}$$

この２つの事象系は独立ではなく、互いに密接に関係している。

事象系B: 甲のサイコロの目に関する事象系

$$B = \begin{Bmatrix} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} \end{Bmatrix}$$

補足1：条件付き確率

ある条件の下で事象がおこる確率を条件付き確率といい、

$P\left(\text{偵邸} \mid \text{樲僮}\right)$ と表す。

甲	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3			△			
4			×			
5			×			
6			×			

甲が3を出している
条件の下で、
甲が勝つ確率。

$$P\left(\text{♎} \mid 3\right) = \frac{2}{6}$$

$$P\left(\text{☶} \mid 3\right) = \frac{2}{6}$$

$$P\left(\times \mid 3\right) = \frac{4}{6}$$

補足2：同時確率（結合確率）

２つ以上の事象が同時におこる確率を同時確率（結合確率）という。

$P\left(\text{偵陌}2-\text{偵陌}\twoheadrightarrow\right)$ のように表す。

“And”の意味

甲が3を出してしかも勝つ確率。

甲	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3						
4						
5						
6						

$$P\left(\text{♎}-3\right)=\frac{2}{36}$$

分母に注意する。

補足3:独立な事象における同時確率(結合確率)

定義

事象1と事象2の同時確率がそれぞれの事象の確率の積で表わされるとき、事象1と事象2は独立であるという。

$$P\left(偵邱2−偵邱↠\right) = P\left(偵邱2\right)\bullet P\left(偵邱3\right)$$

事象系1と事象系2の任意の2つの事象が独立のときに、事象系1と事象系2は独立である。

乙＼甲	1	2	3	4	5	6
1						
2			■			
3						
4						
5						
6						

事象系C:乙のサイコロの目に関する事象系

$$C = \begin{Bmatrix} 偐↫1 & , & 偐↫2 & , & 偐↫4 & , & 偐↫5 & , & 偐↫5 & , & 偐↫6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{Bmatrix}$$

$$P\left(磐↫4−偐↫↠\right) = P\left(磐↫4\right)P\left(偐↫3\right)$$

$$= \frac{1}{6}\bullet\frac{1}{6}$$

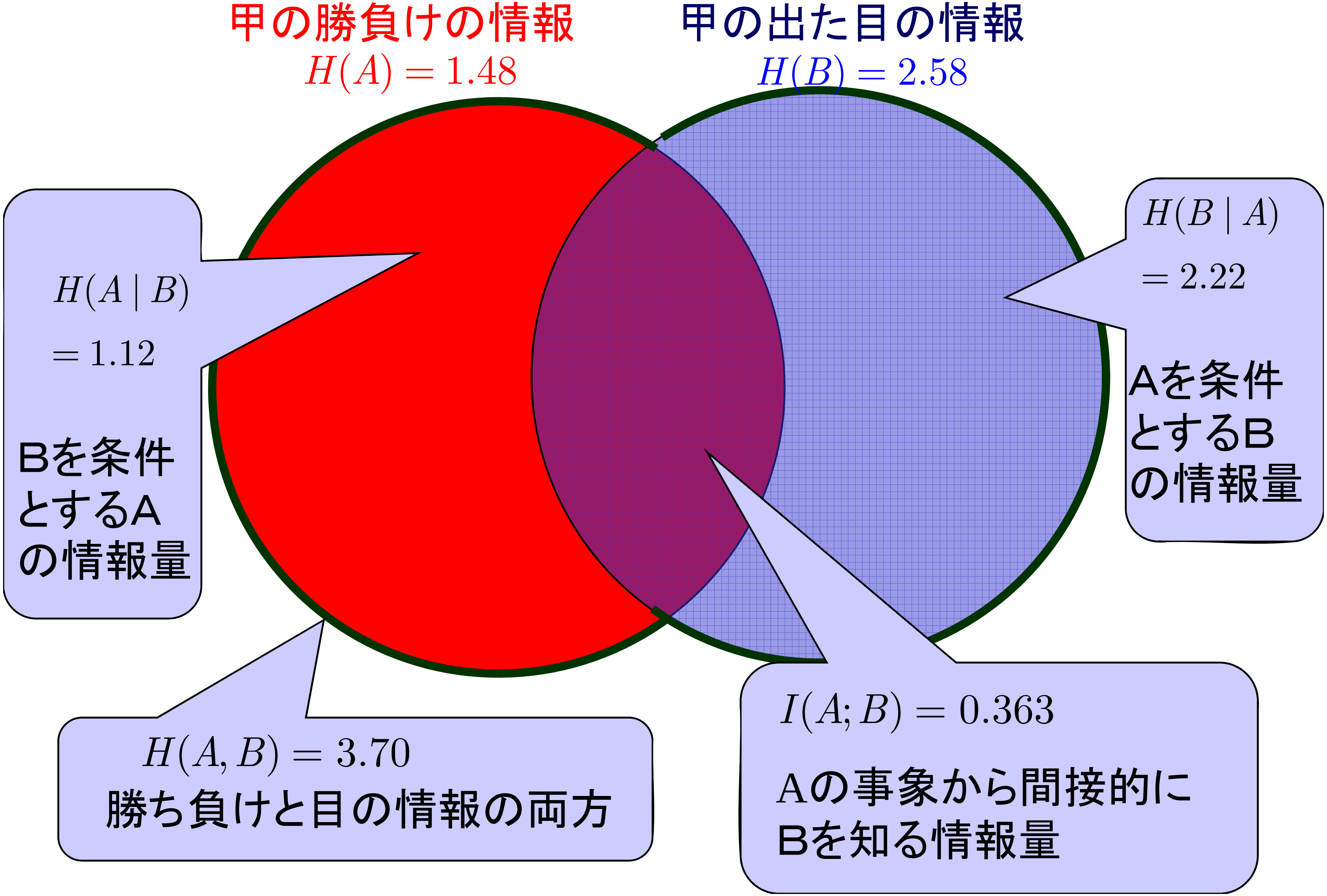
$$= \frac{1}{36}$$

事象系Bと事象系Cは独立。

問題

確率を計算することにより、
事象系Aと事象系Bが独立でないことを示せ。

サイコロゲームにおける様々なエントロピー



条件付エントロピー1

甲の出た目の事象系を条件とする、
甲の勝ち負けの事象系の平均情報量

$$H(A \mid \beta) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid \beta) \log P(\alpha \mid \beta)$$

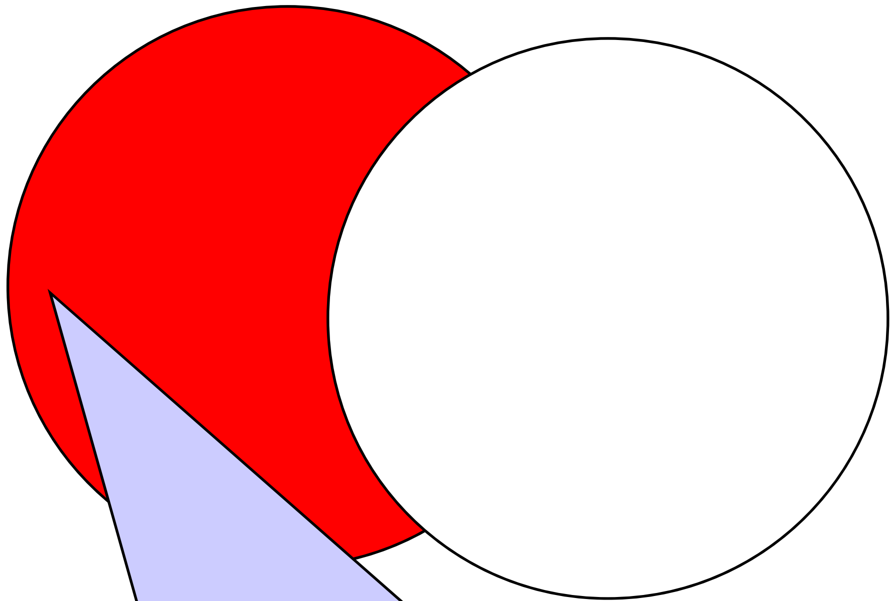
条件付確率で定義されるエントロピー

$$H(A \mid B) = \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A \mid \beta)$$

$$= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid \beta) \log P(\alpha \mid \beta)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\alpha \mid \beta) \log P(\alpha \mid \beta)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha \mid \beta)$$



Bを条件とすることによって、情報源Aの情報量がBと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

甲	1	2	3	4	5	6
1			○			
2			○			
3			△			
4			×			
5			×			
6			×			

条件付エントロピーは、条件付き確率の平均の平均として定義される。
条件を1度固定しエントロピーを計算し、すべての条件で平均を求める。

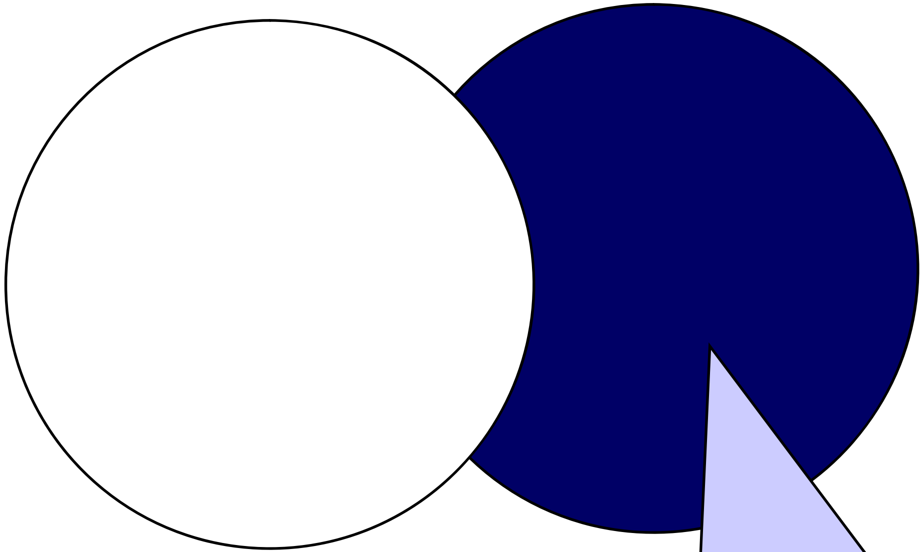
$$H\left(A\mid 3\right) = -P(○\mid 3)\log P(○\mid 3) - P(△\mid 3)\log P(△\mid 3) - P(×\mid 3)\log P(×\mid 3)$$

$$\begin{aligned} H\left(A\mid B\right) &= P(1)H(A\mid 1) + P(2)H(A\mid 2) + P(3)H(A\mid 3) \\ &\quad + P(4)H(A\mid 4) + P(4)H(A\mid 4) + P(4)H(A\mid 4) \end{aligned}$$

条件付エントロピー2

甲の勝ち負けの事象系を条件とする甲の目の事象系の平均情報量

$$H(B \mid \alpha) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \alpha)\log P(\beta \mid \alpha)$$



$$H(B \mid A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B \mid \alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \alpha)\log P(\beta \mid \alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\beta \mid \alpha)\log P(\beta \mid \alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta)\log P(\beta \mid \alpha)$$

Aを条件とすることによって、情報源Bの情報量がAと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

乙 \ 甲	1	2	3	4	5	6
1		○	○	○	○	○
2			○	○	○	○
3				○	○	○
4					○	○
5						○
6						

$$P(3 \mid \text{♎}) = \frac{2}{15}$$

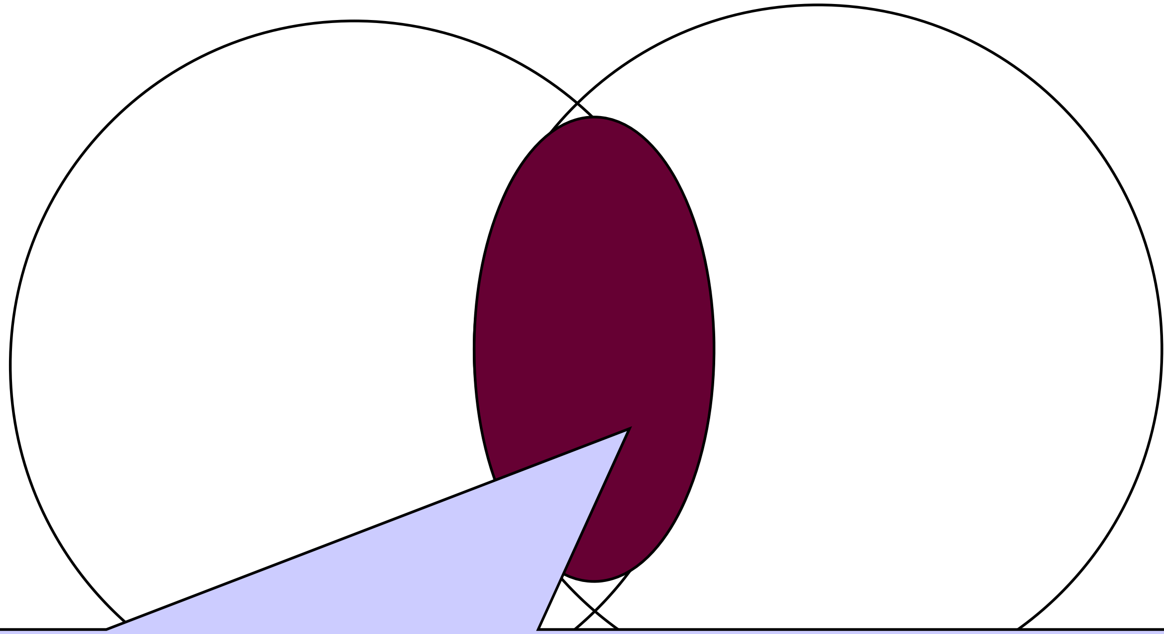
$$H\left(B \mid \text{♎}\right) = -P(1 \mid \text{♎}) \log P(1 \mid \text{♎}) - P(2 \mid \text{♎}) \log P(2 \mid \text{♎}) - P(3 \mid \text{♎}) \log P(3 \mid \text{♎})$$

$$- P(4 \mid \text{♎}) \log P(4 \mid \text{♎}) - P(5 \mid \text{♎}) \log P(5 \mid \text{♎}) - P(6 \mid \text{♎}) \log P(6 \mid \text{♎})$$

$$H\left(B \mid A\right) = P(\text{♎}) H(B \mid \text{♎}) + P(\text{☶}) H(B \mid \text{☶}) + P(\times) H(B \mid \times)$$

相互情報量

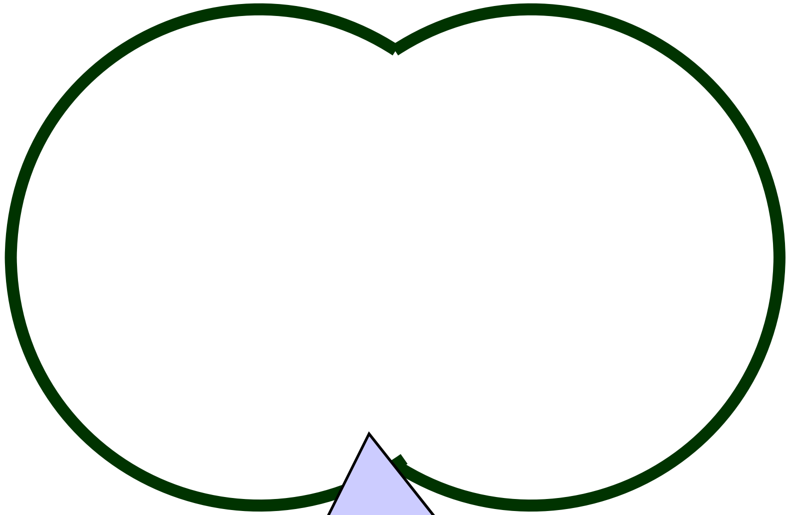
$$I(A;B)=H(A)-H(A\mid B)=H(B)-H(B\mid A)=I(B;A)$$



AとBが互いに関係している情報量。
Aを知ることによって、間接的にBに関する情報が得られる。
同様に、Bを知ることによって、間接的にAの情報が得られる。
これらは、等しい。

結合エントロピー（同時エントロピー）

$$H(A,B) = -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha,\beta) = H(A) + H(B) - I(A;B)$$



α と β が同時に起こる確率。
結合確率。

$$\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta) = 1$$

AとBがのすべての情報量。
Aだけの情報量と、Bだけの情報量を加えて、
関係する相互情報量を減ずる。

各種エントロピーの計算。
まず、2つの事象系のエントロピーを求める。

$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha)$$

$$= \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} + \frac{6}{36} \log \frac{36}{6} + \frac{15}{36} \log \frac{36}{15}$$

$$= \frac{5}{6} (\log 4 + \log 3 - \log 5) + \frac{1}{6} (\log 2 + \log 3)$$

$$= \frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5$$

$$\simeq (1.833) + (1.585) - (1.93)$$

$$= 1.4833 \cdots$$

$$H(B) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \log P(\beta)$$

$$= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \log 6$$

$$\simeq 2.5849 \cdots$$

次に、Bの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$H(A \mid 1) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 1) \log P(\alpha \mid 1)$$

$$= -P(\text{♎} \mid 1) \log P(\text{♎} \mid 1) - P(\text{☶} \mid 1) \log P(\text{☶} \mid 1) - P(\text{×} \mid 1) P(\text{×} \mid 1)$$

$$= 0 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{5}{6} \log \frac{6}{5}$$

$$H(A \mid 2) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 2) \log P(\alpha \mid 2)$$

$$= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{4}{6} \log \frac{6}{4}$$

$$H(A \mid 3) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 3) \log P(\alpha \mid 3)$$

$$= \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{3}{6} \log \frac{6}{3}$$

$$H(A \mid 4) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 4) \log P(\alpha \mid 4)$$
$$= \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{2}{6} \log \frac{6}{2}$$

$$H(A \mid 5) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 5) \log P(\alpha \mid 5)$$
$$= \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6$$

$$H(A \mid 6) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 6) \log P(\alpha \mid 6)$$
$$= \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \log 6 + 0$$

以上より、事象系Bを条件とする、条件付エントロピー $H(A \mid B)$ が求められる。

$$H(A \mid B) = \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A \mid \beta)$$

$$= \frac{1}{6} H(A \mid 1) + \frac{1}{6} H(A \mid 2) + \frac{1}{6} H(A \mid 3) + \frac{1}{6} H(A \mid 4) + \frac{1}{6} H(A \mid 5) + \frac{1}{6} H(A \mid 6)$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{6}\log 6 + \frac{5}{6}\log\frac{6}{5}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{6}\log 6 + \frac{4}{6}\log\frac{6}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{6}\log\frac{6}{3} + \frac{1}{6}\log 6 + \frac{2}{6}\log\frac{6}{2})$$

$$= \frac{1}{3}(3\log 6 - \frac{5}{6}\log 5 - \frac{2}{3}\log 4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{3}\log 2)$$

$$= \log 6 - \frac{5}{18}\log 5 - \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{5}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5$$

$$\simeq (0.444) + (1.321) - (0.645)$$

$$= 1.12$$

今度は、逆にAの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$
\begin{aligned}
&H(B \mid \text{♎}) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \text{♎}) \log P(\beta \mid \text{♎}) \\
&= -P(1 \mid \text{♎}) \log P(1 \mid \text{♎}) - P(2 \mid \text{♎}) \log P(2 \mid \text{♎}) - \cdots - P(6 \mid \text{♎}) \log P(6 \mid \text{♎}) \\
&= 0 + \frac{1}{15} \log 15 + \frac{2}{15} \log \frac{15}{2} + \frac{3}{15} \log \frac{15}{3} + \frac{4}{15} \log \frac{15}{4} + \frac{5}{15} \log \frac{15}{5} \\
&= \log 15 - \frac{2}{15} \log 2 - \frac{3}{15} \log 3 - \frac{4}{15} \log 4 - \frac{5}{15} \log 5 \\
&= \frac{12}{15} \log 3 + \frac{10}{15} \log 5 - \frac{10}{15} \\
&= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$H(B \mid \text{☷}) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \text{☷}) \log P(\beta \mid \text{☷})$$

$$= 6 \times \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \log 6$$

$$H(B \mid \times) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \times) \log P(\beta \mid \times)$$

$$= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}$$

以上より、事象系Aを条件とする、条件付エントロピー
が求められる。

$$H(B \mid A)$$

$$H(B \mid A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B \mid \alpha)$$

$$= \frac{30}{36} \left(\frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \frac{5}{6} \log 3 + \frac{5}{9} \log 5 - \frac{7}{18}$$

$$\simeq (1.321) + (1.290) - (0.389)$$

$$= 2.221$$

$$H(A) - H(A \mid B)$$

$$= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6}\log 5\right) - \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5\right)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$

$$H(B) - H(B \mid A)$$

$$= \log 6 - \left(\frac{5}{6}\log 3 + \frac{5}{9}\log 5 - \frac{7}{18}\right)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$

$$\therefore I(A; B) = H(A) - H(A \mid B) = H(B) - H(B \mid A)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$

$$\simeq (1.389) + (0.264) - (1.290)$$

$$= 0.363$$

結合エントロピーを求めるためには、A、Bの積の事象系を考えても良い。サイコロゲームの勝敗表より以下の事象系が得られる。

$$
(A,B)=\left\{\begin{array}{cccccc}
(\text{♎},1) & (\text{☶},1) & \nwarrow \times{-2}* & (\text{♎},2) & (\text{☶},2) & (\times,2) \\
0 & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\
(\text{♎},3) & (\text{☶},3) & \nwarrow \times{-4}* & (\text{♎},4) & (\text{☶},4) & (\times,4) \\
\frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} \\
(\text{♎},5) & (\text{☶},5) & (\times,5) & (\text{♎},6) & (\text{☶},6) & (\times,6) \\
\frac{4}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} & \frac{1}{36} & 0
\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
H(A,B) &= -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha,\beta) \\
&= \frac{8}{36}\log 36 + \frac{4}{36}\log\frac{36}{2} + \frac{6}{36}\log\frac{36}{3} + \frac{8}{36}\log\frac{36}{4} + \frac{10}{36}\log\frac{36}{5} \\
&= \frac{36}{36}\log 36 - \frac{1}{9}\log 2 - \frac{1}{6}\log 3 - \frac{2}{9}\log 4 - \frac{5}{18}\log 5 \\
&= \frac{13}{9} + \frac{11}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(A,B) &= H(A) + H(B) - I(A;B) \\
&= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6}\log 5\right) + (\log 6) - \left(\frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5\right) \\
&= \frac{13}{9} + \frac{11}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5
\end{aligned}
$$

練習

コインゲームを考える。

「甲と乙がそれぞれコインを投げる。
表より裏が強いとする。」

このゲームを次の２つの事象系としてとらえる。

事象系 （勝負）:
「甲の勝負けを表す事象系」

事象系 （裏表）:
「甲の出したコインの裏表を表す事象系」

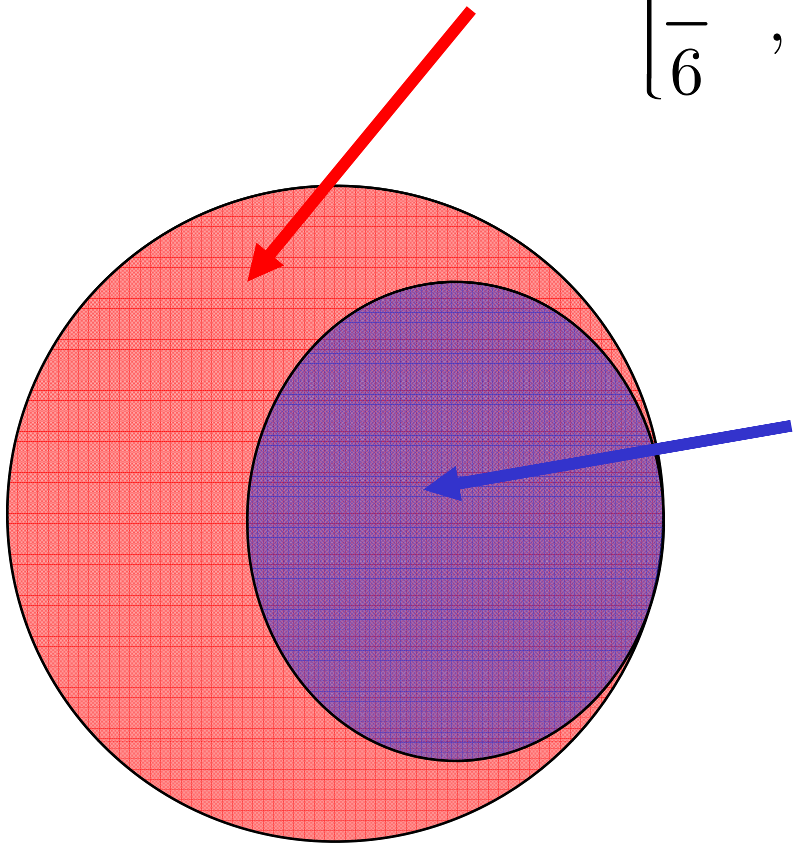
次の各種エントロピーを求めよ。

$$H(\text{唀鄉}), H(\text{趙賭}), H(\text{唀鄉} \mid \text{趙賭}), H(\text{趙賭} \mid \text{唀鄉}), I(\text{唀鄉}; \text{趙賭})$$

部分的な情報源

サイコロを投げて出た目に従って、以下の2つの情報源を考える。

$$B=\begin{Bmatrix} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} \end{Bmatrix}$$



$$D=\begin{Bmatrix} \text{剸栖} & , & \text{對栖} \\ \dfrac{1}{2} & , & \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$H(B) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58[bit\,/\,\text{軛嚝}]$$

$$H(D) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1[bit\,/\,\text{軛嚝}]$$

$$H(B \mid \text{剌栖}) = \underbrace{0}_{1} + \underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{2} + \underbrace{0}_{3} + \underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{4} + \underbrace{0}_{5} + \underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{6} = \log 3$$

$$H(B \mid \text{對栖}) = \underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{1} + \underbrace{0}_{2} + \underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{3} + \underbrace{0}_{4} + \underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{5} + \underbrace{0}_{6} = \log 3$$

$$H(B \mid D) = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 3 = \log 3 \simeq 1.58[bit\,/\,\text{軛嚝}]$$

$$I(B;D) = H(B) - H(B \mid D) = 1[bit\,/\,\text{軛嚝}]$$

Dのエントロピーと等しい。

$$I(D;B) = H(D) - H(D \mid B)$$

$$\therefore H(D \mid B) = H(D) - I(D;B) = 0$$

Bを条件とすれば、Dに関する残された情報が無いことを意味する。すなわち、サイコロの目がわかれば、偶数か奇数かもわかる。

$$H(D \mid 1) = \underbrace{-1\log 1}_{\text{對栖}} \underbrace{-0\log 0}_{\text{剸栖}} = 0$$

$$\vdots$$

$$H(D \mid 6) = \underbrace{-0\log 0}_{\text{對栖}} \underbrace{-1\log 1}_{\text{剸栖}} = 0$$

$$\therefore H(D \mid B) = \sum_{\alpha \in B} P(\alpha) H(D \mid \alpha) = 0$$

練習

試行T「トランプから１枚カードを引く」

この試行Tを次の２つの事象系としてとらえる。

事象系 （数）:
「引いたカードの数」

事象系 （絵札）:
「引いたカードが絵札かどうか」

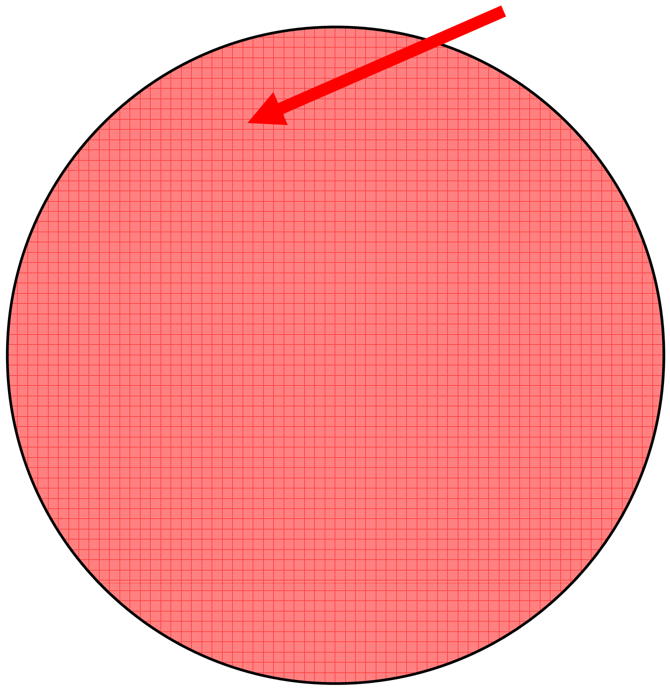
次の各種エントロピーを求めよ。

$$H(\text{栖}), H(\text{翳槾}), H(\text{栖} \mid \text{翳槾}), H(\text{翳槾} \mid \text{栖}), I(\text{栖}; \text{翳槾})$$

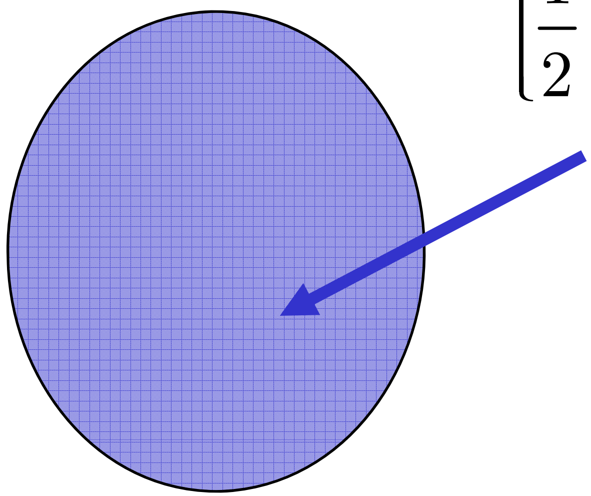
独立な情報源

サイコロを投げて得られる情報源と、コインを投げて得られる情報源を考える。

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$



$$E = \left\{ \begin{array}{ccc} \text{賭} & , & \text{趙} \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$



$$H(B) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58[bit\,/\,\text{軛嚝}]$$

$$H(E) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1[bit\,/\,\text{軛嚝}]$$

$$H(B \mid \text{賭}) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(B \mid \text{趙}) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(B \mid E) = \frac{1}{2} \log 6 + \frac{1}{2} \log 6 = \log 6$$

$$I(B;E) = H(B) - H(B \mid E) = 0[bit\,/\,\text{軛嚝}]$$

コインの試行からは、サイコロに関する情報が得られないことを意味する。

$$I(E;B) = H(E) - H(E \mid B)$$

$$H(E \mid B) = H(E) - I(E;B) = \log 2 = 1[bit \,/\, \text{軱嚝}]$$

Bを条件としても、Eに関する平均情報量に変化がない。