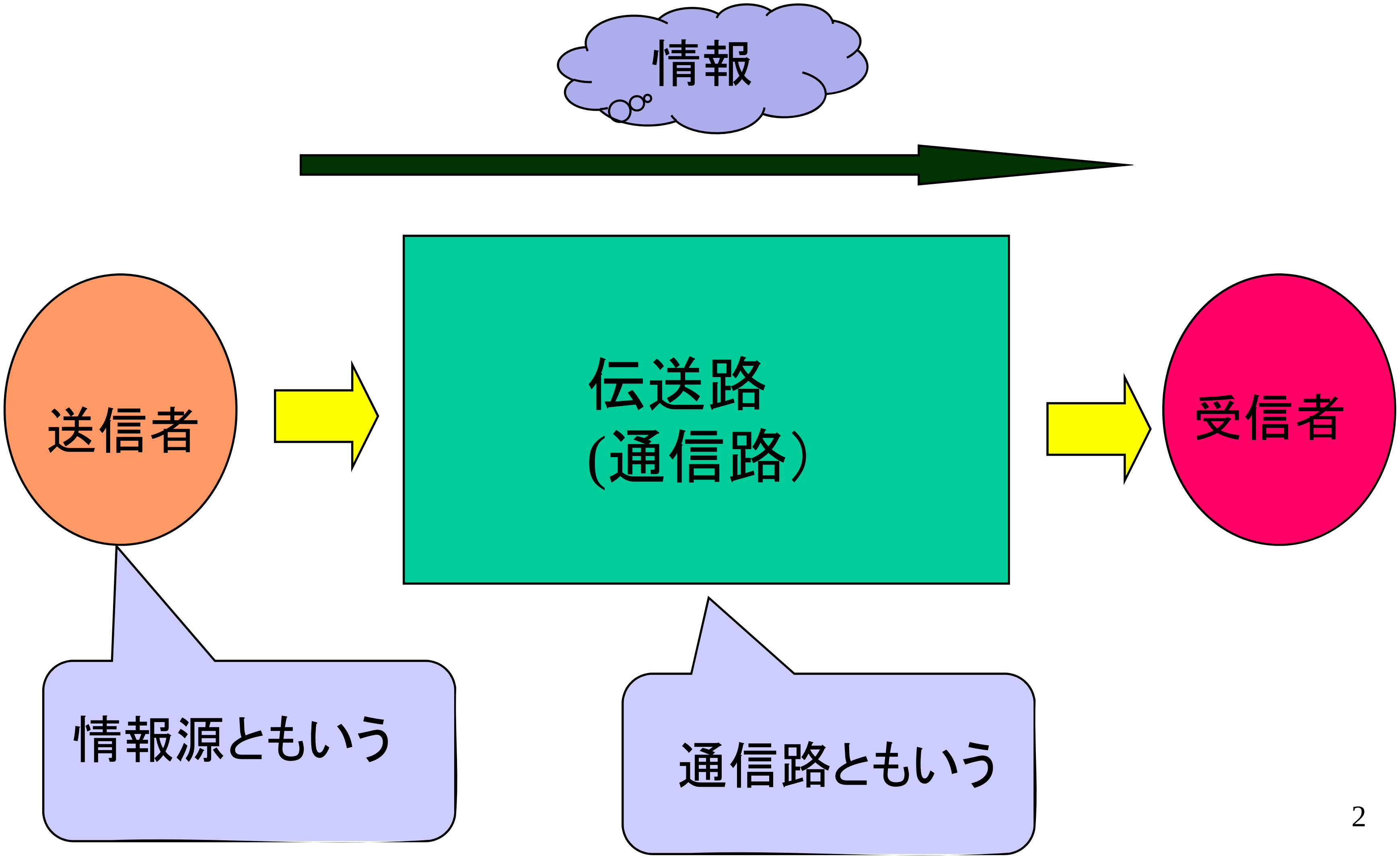
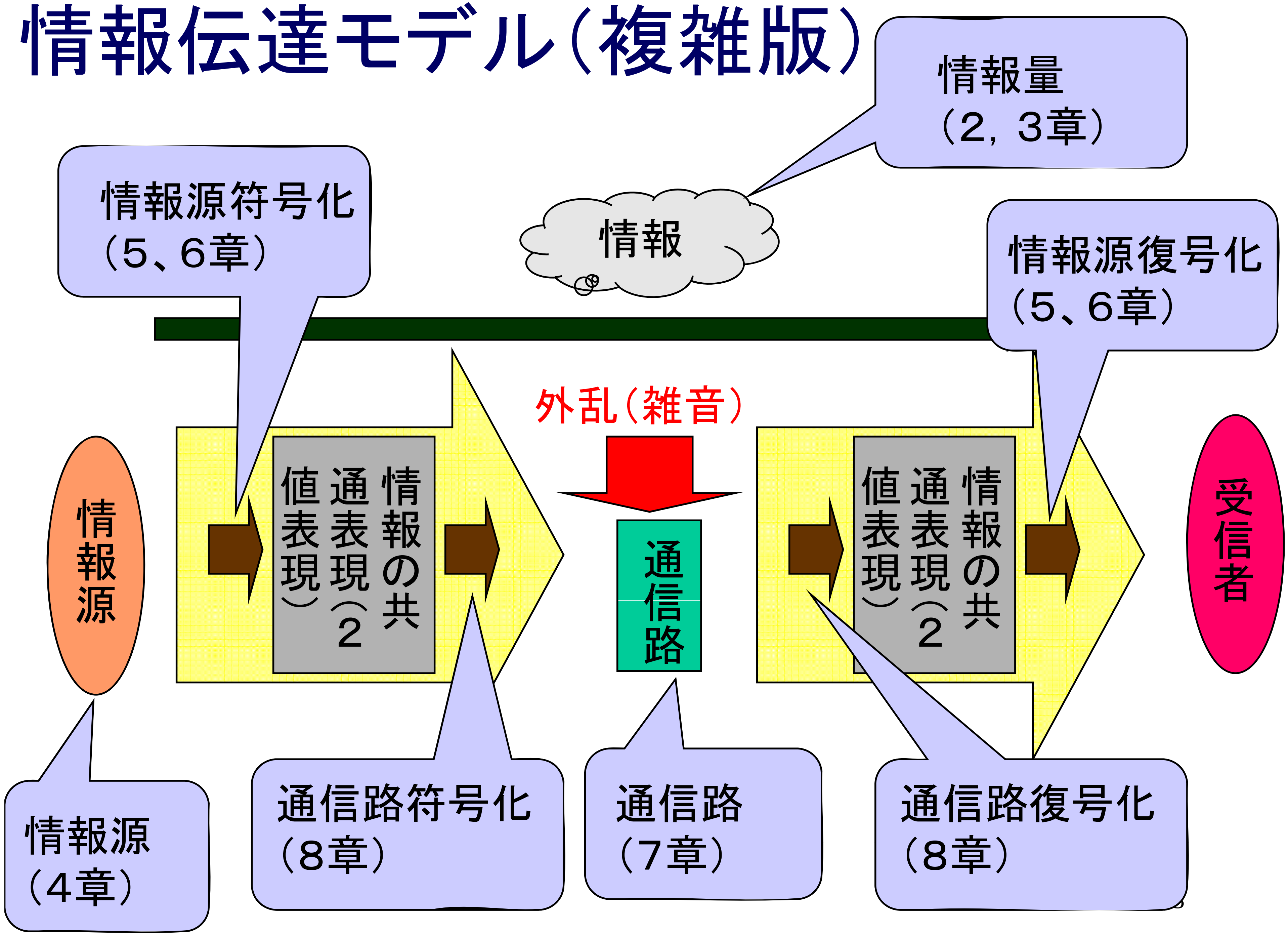
通信路符号化（8章）

情報伝達モデル(簡易版)



情報伝達モデル（複雑版）



情報量
（2，3章）
情報源符号化
（5、6章）
情報
情報源復号化
（5、6章）
外乱（雑音）
情報源
情報の共通表現（2値表現）
通信路
情報の共通表現（2値表現）
受信者
情報源
（4章）
通信路符号化
（8章）
通信路
（7章）
通信路復号化
（8章）

情報源符号化と通信路符号化の比較

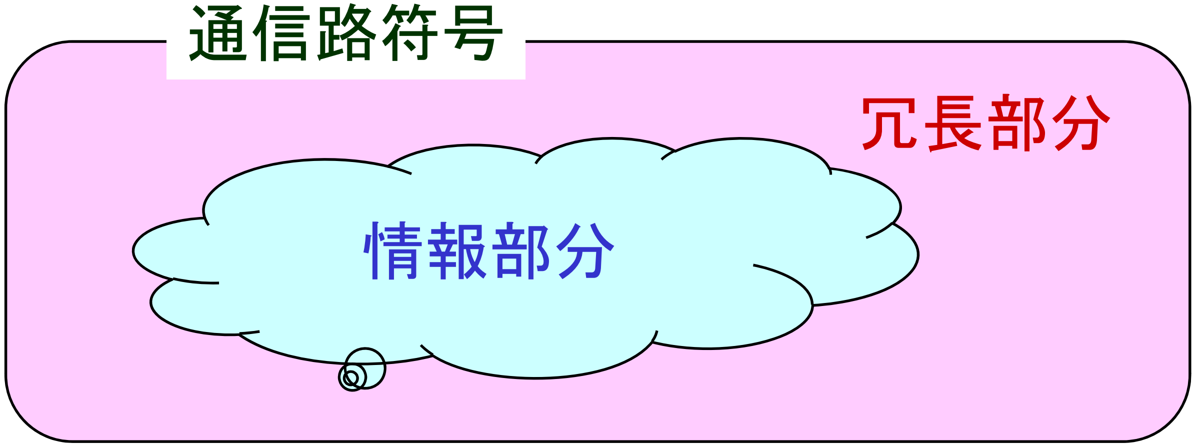
符号化	目標	実現状況	符号長	定理
情報源符号化	効率化	保存領域・通信時間の節約	最短符号の実現（平均符号長で評価）	情報源符号化定理（シャノンの第1基本定理）
通信路符号化	信頼性向上	誤りの検出・訂正	冗長性を付加（情報速度で評価）	通信路符号化定理（シャノンの第2基本定理）

通信路符号化の基礎概念

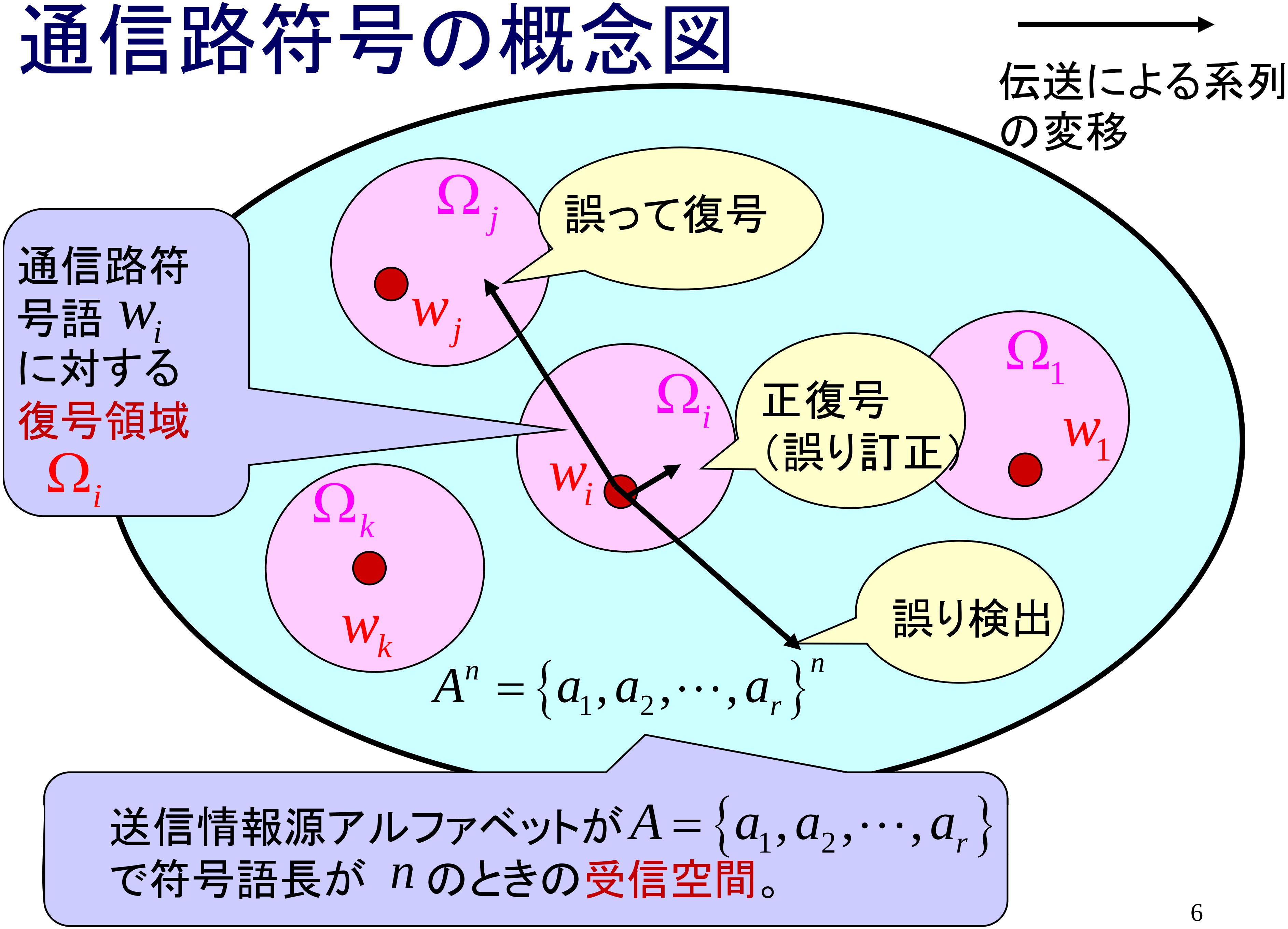
通信路符号化は信頼性の向上を達成するのが目的であり、そのために情報部分の他に冗長部分を加える。すなわち、以下のように表せる。

通信路符号＝情報部分＋冗長部分

符号化の際には、いかにして冗長部分を作り出すかが重要となる。

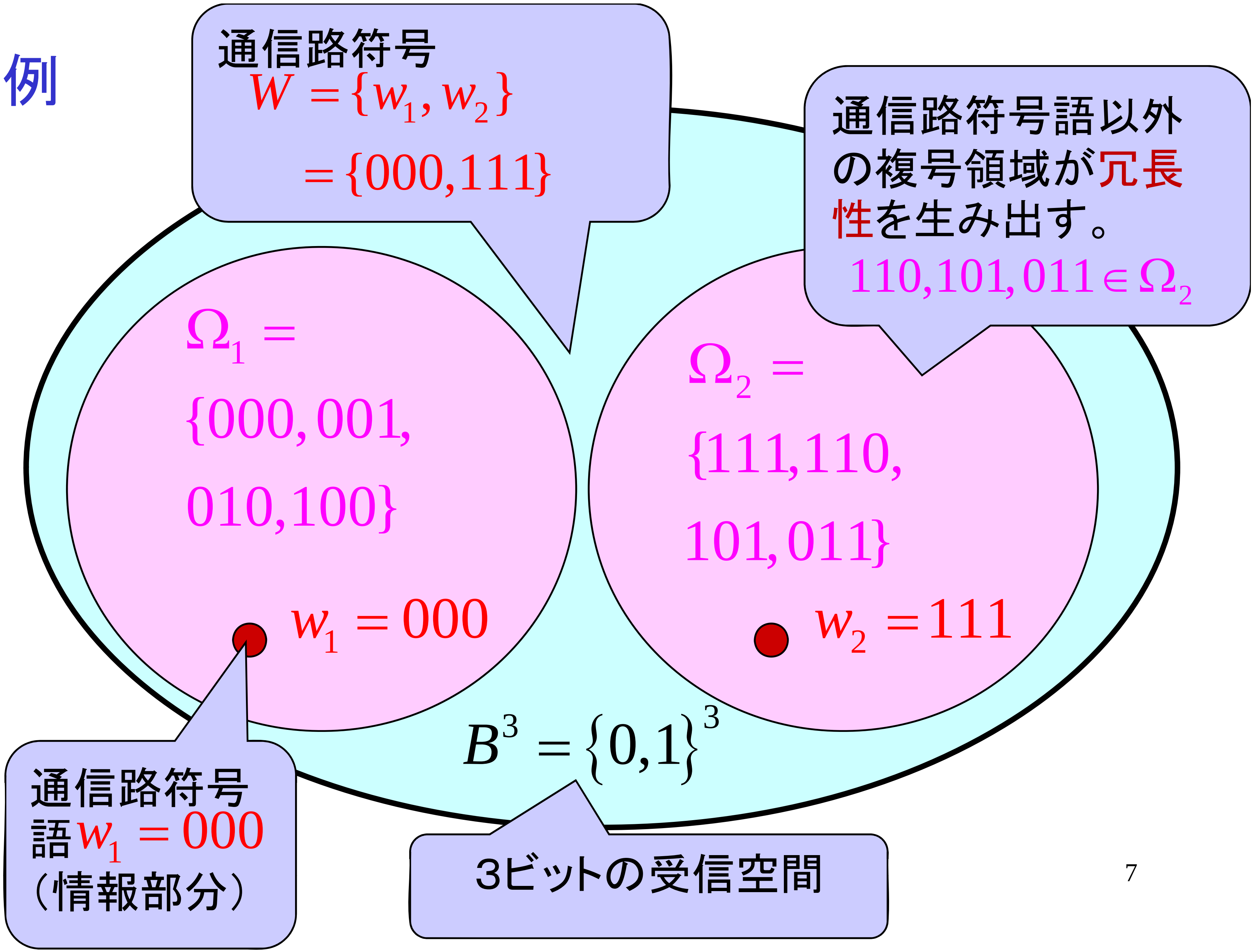


通信路符号の概念図



伝送による系列の変移
誤って復号
Ω_j
w_j
通信路符号語 w_i に対する復号領域 Ω_i
Ω_i
w_i
正復号（誤り訂正）
Ω_1
w_1
Ω_k
w_k
誤り検出
$A^n = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}^n$
送信情報源アルファベットが $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ で符号語長が n のときの受信空間。

例



通信路符号
$W=\{w_1,w_2\}$
$=\{000,111\}$
通信路符号語以外の複号領域が冗長性を生み出す。
$110,101,011\in\Omega_2$
$\Omega_1=$
$\{000,001,$
$010,100\}$
$\Omega_2=$
$\{111,110,$
$101,011\}$
$w_1=000$
$w_2=111$
$B^3=\{0,1\}^3$
通信路符号語$w_1=000$（情報部分）
3ビットの受信空間

（通信路符号における）記号系列の個数

（送信）情報源アルファベットを $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ とする。

A の元からなる長さ n の系列すべての集合を A^n と書く。

このとき、 A^n には $|A|^n = r^n$ 個の要素が含まれる。

例

$$B=\{0,1\}$$
$$B^3=\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$
$$|B|=2$$
$$|B^3|=|B|^3=2^3=8$$

通信路符号化では、送信記号の系列すべてを符号として用いるのではなくて、その中の特定の系列だけを符号として扱う。このことが冗長性を生み出す。

例

$$B^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

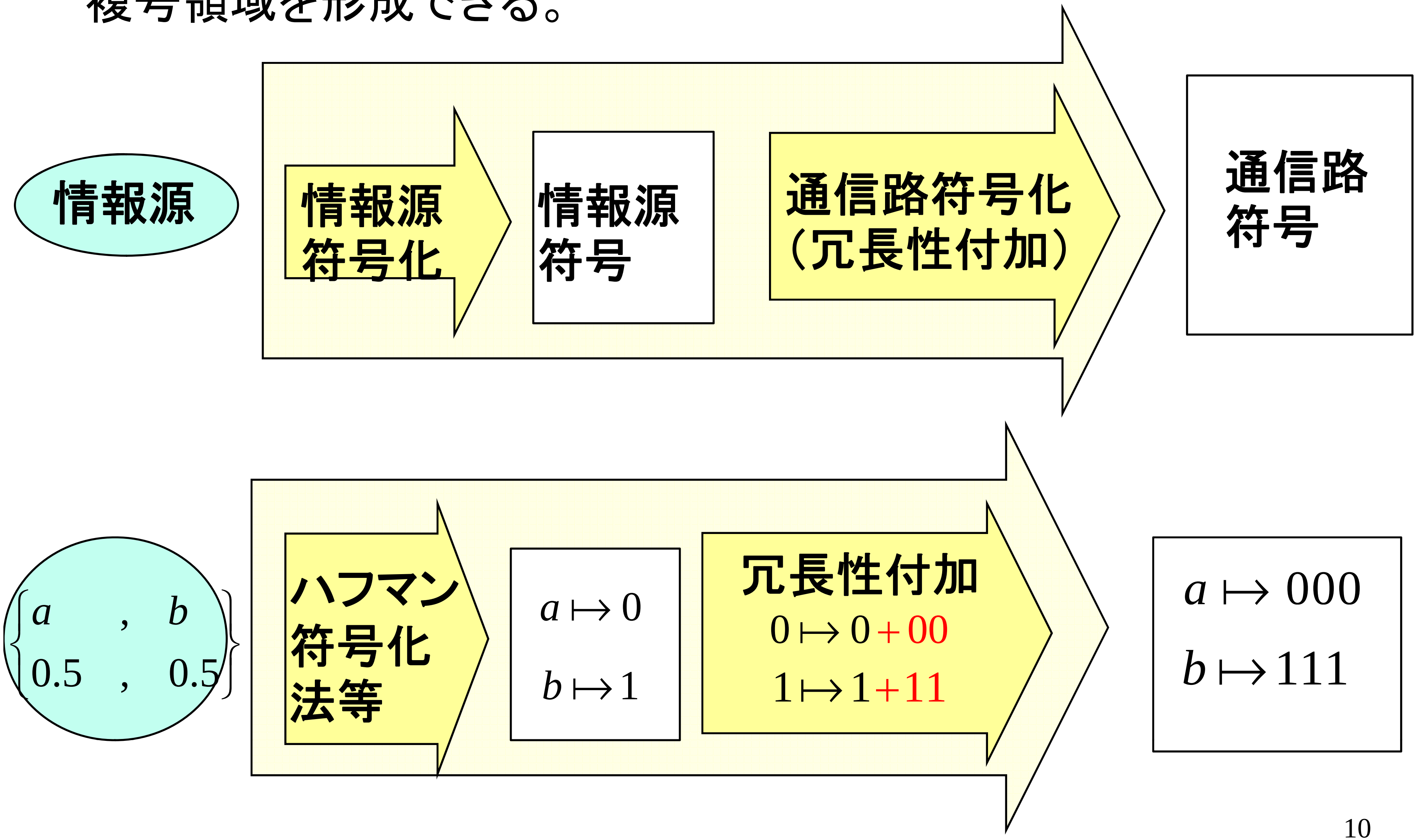
の部分集合である $W = \{000, 111\}$ の要素だけを通信路符号として用いる。

定義:（通信路符号）

このように、送信記号系列の部分集合 $W \subseteq A^n$ を（通信路）符号という。また、通信路符号に含まれる各系列 $w \in W$ を（通信路）符号語という。なお、通信路符号としては等長符号が持ちれれることが多い。

情報の付加と通信路符号

情報源符号語に冗長性を表す記号列を付加することで、
複号領域を形成できる。



代表的系列

定義:(代表的系列)

情報源 $A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_r \\ p_1 & , & p_2 & , & \cdots & , & p_r \end{Bmatrix}$ の長さ n

の系列の中で、各記号 a_i の出現個数 n_i と n の比が生成確率 p_i に等しいような系列を代表的系列という。

例

情報源 $A=\begin{Bmatrix} a & , & b & , & c \\ 1/6 & , & 2/6 & , & 3/6 \end{Bmatrix}$ の長さ12の代表的系列。

$$p_a \simeq \frac{n_a}{n}, \therefore n_a = np_a = 12 \times \frac{1}{6} = 2$$

$$p_b \simeq \frac{n_b}{n}, \therefore n_b = np_b = 12 \times \frac{2}{6} = 4$$

$$p_c \simeq \frac{n_c}{n}, \therefore n_c = np_c = 12 \times \frac{3}{6} = 6$$

$$bbacccccabccb$$

$$cbccbacbcabc$$

$\vdots$

記号出現頻度が、同一。（順序は異なる。）
十分な長さの通報は、ほぼ代表的系列。

練習

次の各情報源と系列の長さに対して、代表的系列をそれぞれ３個示せ。

（１）

$$B = \begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ 1/3 & , & 2/3 \end{Bmatrix} \qquad n = 24$$

（２）

$$S = \begin{Bmatrix} a & , & b & , & c & , & d \\ 1/2 & , & 1/4 & , & 1/6 & , & 1/12 \end{Bmatrix} \qquad n = 24$$

代表的系列の個数

性質:(代表的系列の個数とエントロピー)

情報源 $A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & \cdots & , & a_r \\ p_1 & , & p_2 & , & \cdots & , & p_r \end{Bmatrix}$ の十分な長さn

の代表的系列の個数 N は、次式で表される。

$$N = 2^{nH(A)}$$

ここで、$H(A)$は情報源 A のエントロピー。

証明

長さ n の代表的系列を $\boldsymbol{w} = w_1 \cdots w_n$ とし、
その発生確率を $P(\boldsymbol{w})$ とする。

記号 a_i の発生確率が p_i であり、それが $\boldsymbol{w}$ に $n_i = np_i$ 個
含まれているので次式が成り立つ。

$$P(\boldsymbol{w}) = \prod_{a_i \in A} p_i^{n_i} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{np_i}$$

底の変換と指数法則より、次のように計算できる。

$$P(\boldsymbol{w}) = \prod_{i=1}^{r} 2^{np_i \log p_i} = 2^{n \sum_{i=1}^{r} p_i \log p_i}$$

$$= 2^{-nH(A)}$$

n が十分大きければ、代表的系列以外の発生確率は0に漸近する。したがって、代表的系列 $\boldsymbol{w}$ の個数 N は発生確率の逆数である。すなわち、次式が成り立つ。

$$N = \frac{1}{P(\boldsymbol{w})} = 2^{nH(A)}$$

QED

情報（伝送）速度

定義：（通信路符号の情報（伝送）速度）

通信路符号 $W=\{w_1,\cdots,w_M\}\subseteq A^n$ に対して、
通信路記号1記号あたりに伝送される情報量を、
情報速度あるいは情報伝送速度という。
情報速度は主に

$$R \quad [bit/(\text{通信路})\ \text{記号}]$$

の記号が用いられ、

$$R=\frac{\log|W|}{n}=\frac{\log M}{n}$$

と表される。

速度を意味する
Rate
の頭文字。

情報伝送速度の物理的意味

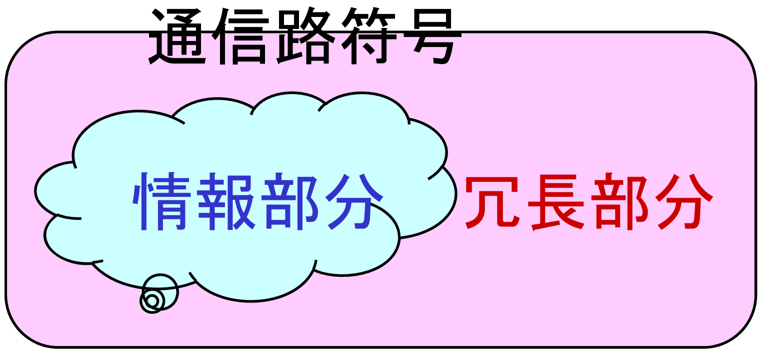
１秒（単位時間）あたりに伝送可能な記号 $k[\text{記号}/\text{秒}]$ とする。
このとき、１秒あたりで伝送される情報量 $R^{*}\quad[bit/\text{秒}]$ は、
次式で与えられる。

$$R^{*}[bit/\text{秒}] = k[\text{記号}/\text{秒}] \times R[bit/\text{記号}]$$

$[bbs]\left(Bit\quad Per\quad Second\right)$

物理的な通信速度としてよく現れる。
１秒あたりに通信されるビット数（通信路符号を
伝送する際の記号数）

情報(伝送)速度の直観的意味



$2^{\text{情報部分のビット長}}$ は送信系列の総数

$2^{\text{通信路符号のビット長}}$ は受信の可能性がある系列の総数

$$\text{情報速度} = \frac{\text{情報部分のビット長}}{\text{通信路符号のビット長}}$$

$$= \frac{\text{情報部分のビット長}}{\text{情報部分のビット長} + \text{冗長部分のビット長}}$$

例

次のような通信路符号 $W=\{000,111\}\subseteq\{0,1\}^3$ の情報速度 R_W を求めよ。

解）

$$R_W=\frac{\log|W|}{n}=\frac{\log 2}{3}=\frac{1}{3}\quad[bit/(\text{通信路})\text{記号}]$$

情報源記号が2種類である。よって、送信情報源として、

$$S=\begin{Bmatrix} a & , & b \\ 0.5 & , & 0.5 \end{Bmatrix}$$

を接続すれば1ビット伝送できる。（相互情報量を1ビットにできる。）よって、

R_W ＝伝送される情報量/通信路符号長

また、例えば、$\phi=\{a\mapsto 0, b\mapsto 1\}$ のように情報源符号化も可能である。よって、

R_W＝情報源符号長/通信路符号長

練習

次の通信路符号の情報速度を求めよ。

（1）
$$W_1 = \{000, 011, 101, 110\} \subseteq \{0,1\}^3$$

（2）
$$W_2 = \{000000, 011011, 101101, 110110\} \subseteq \{0,1\}^6$$

（3）
$$W_3 = \left\{\begin{array}{l} 0000, 0011, 0101, 0110, \\ 1001, 1010, 1100, 1111 \end{array}\right\}$$

（4）
$$W_4 = \left\{\begin{array}{l} 000000000, 000101011, 001001101, 001100110, \\ 010010011, 010111000, 011011110, 011110100, \\ 100010101, 100111110, 101011000, 101110011, \\ 110000110, 110101101, 111001011, 111100000 \end{array}\right\}$$

情報速度と符号語数

情報源 A の長さ n の代表的系列の中から M 個の系列を選んだとする。これらの系列(符号語)を代表的系列の中から等しい確率で用いるとする。

$$\boldsymbol{w}_1 = w_1^1 \cdots w_n^1$$

$$\boldsymbol{w}_2 = w_1^2 \cdots w_n^2$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{w}_N = w_1^N \cdots w_n^N$$

$$M$$

$$N = 2^{nH(A)}$$

このとき、各符号を伝送したときの情報量 R_n は、次式である。

$$R_n = -\log_2 \frac{1}{M} = \log_2 M \ [bit]$$

自己情報量の式

この情報の伝送に n 記号用いているので、情報速度は次式で与えられる。

$$R = \frac{\log_2 M}{n} [bit/記号]$$

この式を逆に用いることにより、符号語数 M は情報速度 R と符号語長 n で表すことができる。すなわち、次式が成り立つ。

$$M = 2^{nR} \text{ [個]}$$

この式は通信路符号化定理を導くときに用いられる。

通信路符号化定理(重要)

性質:(通信路符号化定理)

通信路容量 C の通信路 T において、通信路符号 Wを用いて情報を伝達する。
この通信路符号 Wの復号誤り率を$P_e(W)$、情報速度を$R(W)$と表す。
任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$R(W) < C$$

ならば

$$P_e(W) < \varepsilon$$

を満たす(通信路)符号 W が存在する。
逆に、$R(W) > C$ なら、$P_e(W) < \varepsilon$となる符号W は存在しない。

情報速度が通信路容量未満なら、復号誤り率を限りなく0にできるという意味。(通信路容量が情報速度の上限)

証明

A_0 を通信路に接続すれば、伝送される情報量がC となる情報源

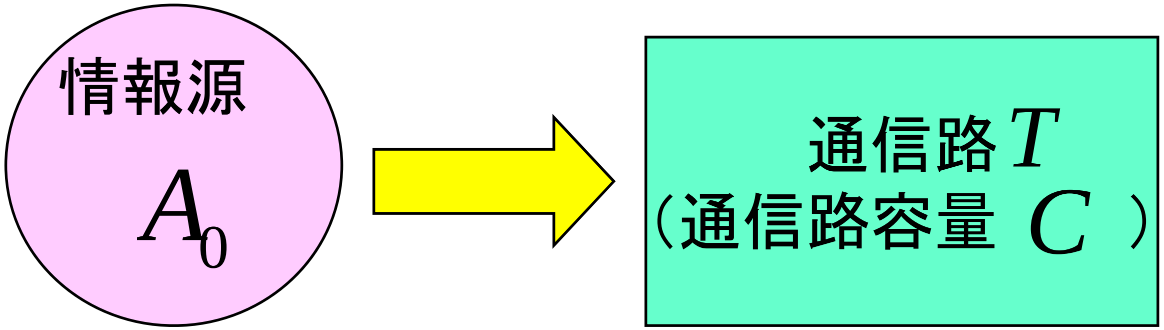
証明の方針

（1）通信路容量 C を達成する情報源をA_0 とする。
（2） A_0 から発生する長さ n の代表的系列の中から、 $M = 2^{nR}$ 個の符号語をランダムに選び、その集合を符号

$$\boldsymbol{W} = \{w_1, w_2, \cdots, w_M\}$$

とする。

（3）これらより、誤り確率を求める。



受信される情報源を B_0 とする。

このとき、A_0 は通信路容量を達成する情報源なので、通信路容量の定義より次式が成り立つ。

$$C = H(A_0) - H(A_0 \mid B_0)$$

一方、前に示したように、長さ n の代表的系列の数は

$$N = 2^{nH(A_0)}$$

ランダム符号化という。

である。これらの中から代表的系列を、$M = 2^{nR}$ 個ランダムに選ぶ。（もちろん　$R < H(A_0)$　である。）
したがって、ある代表的系列が符号語として選ばれる確率は、

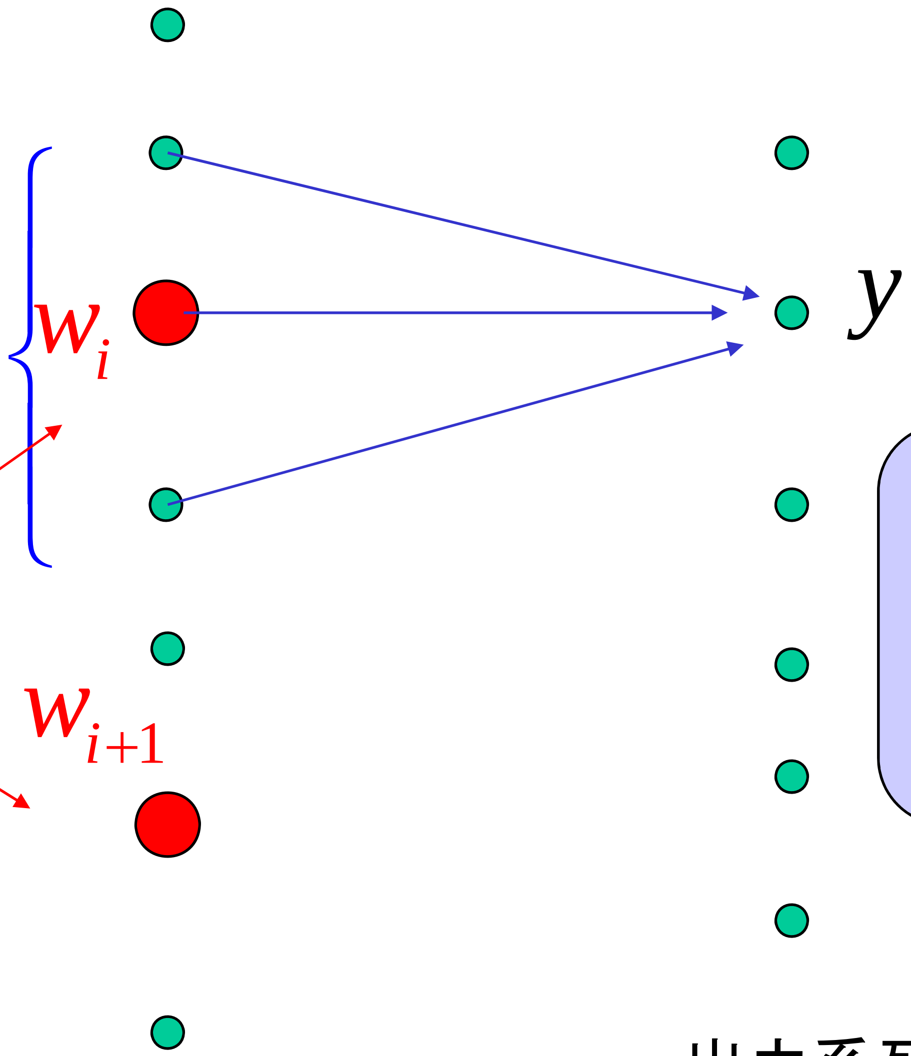
$$p_s = \frac{M}{N} = \frac{2^{nR}}{2^{nH(A_0)}}$$

選択（Select）確率

である。

出力系列1つあたりの入力系列数

$$n_y = 2^{nH(A_0|B_0)}$$



出力系列に1つの符号語しかなければ誤らない。

$$M = 2^{nR}$$

符号語数

代表的系列数

入力系列

$$N = 2^{nH(A_0)}$$

出力系列

$$2^{nH(B_0)}$$

符号語 w_i を通信路 T を通して送り、受信系列 y が得られたとする。通信路には一般に誤りがあり、送信符号（送信系列）は確率的にしかわからない。
しかし、条件付エントロピー $H(A_0 \mid B_0)$ が平均情報量を意味することから、受信系列が y として受信される長さ n の代表的系列の個数 n_y は平均すれば次式表される。

$$n_y = 2^{nH(A_0|B_0)}$$

条件付エントロピーが1記号あたりの情報量であり、[bit/記号]の単位を持つことに注意する。

もし、$n_y = 2^{nH(A_0|B_0)}$ 個の代表的系列の中に w_i 以外に $W = \{w_1, \cdots, w_M\}$ の符号語がなければ、送られた符号語が w_i 受信語 y から一意に確定し、誤りなく復号できる。

n_y 個の代表的系列を選んだとき、w_i 以外の W の符号語を一つも選ばれない確率 p_c は、先ほど求めた p_s を用いて以下のように表せる。

正しく(Correctly)復号できる確率。

$$p_c = (1 - p_s)^{n_y}$$

連続して n_y 回符号語を選ばない確率。

これらまでの式を元にこの確率を計算する。

テイラー展開
の１次の項

$$p_c = (1 - p_s)^{n_y}$$

$$= \left(1 - \frac{2^{nR}}{2^{nH(A_0)}}\right)^{2^{nH(A_0|B_0)}}$$

$$\simeq 1 - 2^{nH(A_0|B_0)} \bullet \left(\frac{2^{nR}}{2^{nH(A_0)}}\right)$$

$$= 1 - 2^{-n(H(A_0) - H(A_0|B_0))} \bullet 2^{nR}$$

$$= 1 - 2^{-n(C-R)}$$

$R < C$ なので
$C - R > 0$

これは誤りなく復号できる確率なので、誤り確率 p_e は次式で表される。

$$p_e = 1 - p_c = 2^{-n(C-R)}$$

以上より、誤り確率は n を大きくすればいくらでも小さくできる。

（前半の証明終）

（後半の証明）

$R > C$ でしかも $p_e \to 0$ とできたとする。

このときには、誤りなく復号されるのだから、通信路を通じて実際に R [bit/記号]の情報量が伝送されたことになる。しかし、これは通信路容量の定義に矛盾する。

QED

情報源符号化と通信路符号化のまとめ2

符号化	定理	意味
情報源符号化	シャノンの第一定理 (情報源符号化定理)	平均符号長はエントロピー以上 $$\frac{H(S)}{\log r} < \overline{L}$$
通信路符号化	シャノンの第二定理 (通信路符号化定理)	情報速度は通信路容量以下 $$R < C$$ $$= \max\{H(A) - H(A\|B)\}$$

情報源符号化定理と通信路符号化定理の関係（シャノンの第1定理と第2定理の関係）

性質：雑音の無い通信路における通信路符号化定理

理想的な通信路（雑音の無い通信路）で情報伝送する場合、情報源符号化の定理と通信路符号化の定理は等価となる。

証明

送信者は $S=\begin{Bmatrix} s_1 & , & s_2 & , & \cdots & , & s_n \\ p_1 & , & p_2 & , & \cdots & , & p_n \end{Bmatrix}$ を、r元送信アルファベット

$A=\{a_1 \quad , \quad \cdots \quad , \quad a_r\}$ で符号化して送信し、受信アルファベット

$B=\{b_1 \quad , \quad \cdots \quad , \quad b_{r'}\}$ の記号列が受信されるものとする。

また、符号を

$$\phi = \left\{ s_1 \mapsto \boldsymbol{w}_1 \quad , \quad \cdots \quad , \quad s_i \mapsto \boldsymbol{w}_i \quad , \quad \cdots \quad , \quad s_n \mapsto \boldsymbol{w}_n \right\}$$

とする。ここで、各符号語は、送信記号系列である。

$$\phi\left(s_i\right) = \boldsymbol{w}_i = a_1^i a_2^i \cdots a_j^i \cdots a_{l_i}^i , \quad a_j^i \in A$$

この符号の平均の情報速度 $R\left(\phi\right)[bit/\text{送信記号}]$ は、

情報源のエントロピー $H(S)[bit/\text{情報源記号}] = H(S)[bit/\text{符号語}]$ と、

平均符号長 $\overline{L\left(\phi\right)}[\text{送信記号}/\text{符号語}]$ を用いて次式で表わされる。

$$R\left(\phi\right) = \frac{H(S)}{\overline{L\left(\phi\right)}} \quad [bit/\text{送信記号}]$$

一方、雑音の無い通信路では、通信路容量は次式で表せる。

$$C = \max\{H(A) - H(A|B)\}$$

$$= \max H(A)$$

$$= \log r \quad [bit/\text{送信記号}]$$

雑音がないので、

$$H(A|B) = 0$$

符号化されたものを送信アルファベット $A = \{a_1, \cdots, a_r\}$ の（新たな）情報源とみなす。全ての記号が均等に生成するときが、通信路容量を満足する。よって、以下のような通信路に対する送信情報源となる。

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & \cdots & , & a_r \\ 1/r & , & \cdots & , & 1/r \end{Bmatrix}$$

これらを、通信路符号化定理に代入する。

$$R\left(\phi\right) < C$$

$$\therefore \frac{H(S)}{\overline{L\left(\phi\right)}} < \log r$$

$$\therefore \frac{H(S)}{\log r} < \overline{L\left(\phi\right)}$$

これは、r元記号を用いた情報源符号化定理である。

逆に、情報源符号化定理と、雑音の無い通信路における通信路容量より、通信路定理を導ける。

QED