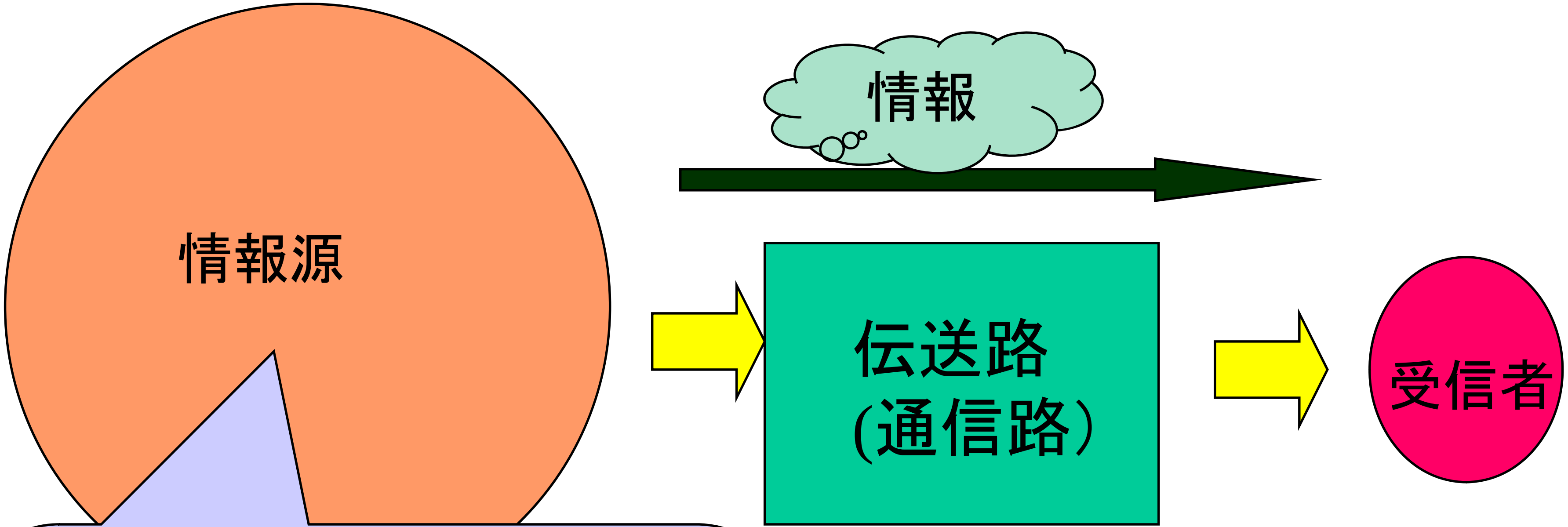
様々な情報源（4章）

情報源の役割



今回扱う。
☆無記憶情報源
（前の記号に依存しない情報源。サイコロのような情報源）
☆マルコフ情報源
（前の結果に依存する情報源。英文等は、こっちの方）

情報源モデル

情報源：
離散的な時刻に従い、
ある記号の集合から、
各時刻に一つの記号
を（ある確率的性格
で）出力する。

情報源アルファベット

$$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$$

情報源から発生する記号の集合

情報源シンボル（記号）

情報源から発生する記号。
情報源アルファベットの要素

記号 $s_{t_i} \in S$ は、時刻 t_i で発生した情報源記号

s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} s_{t_4} $\cdots$

時間軸

情報源例1

サイコロを振る試行
による記号の生成。

情報源アルファベット

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$s_{t_1} = 3$ $s_{t_2} = 5$ $s_{t_3} = 2$ $\cdots$

t

1回は3の目がでた。

情報源例2

英文からアルファベットを拾って記号を生成。

情報源アルファベット

$$\mathcal{A} = \{a, b, c, \cdots, z\}$$

$s_{t_1} = i$ $s_{t_2} = n$ $s_{t_3} = f$ $\cdots$

t

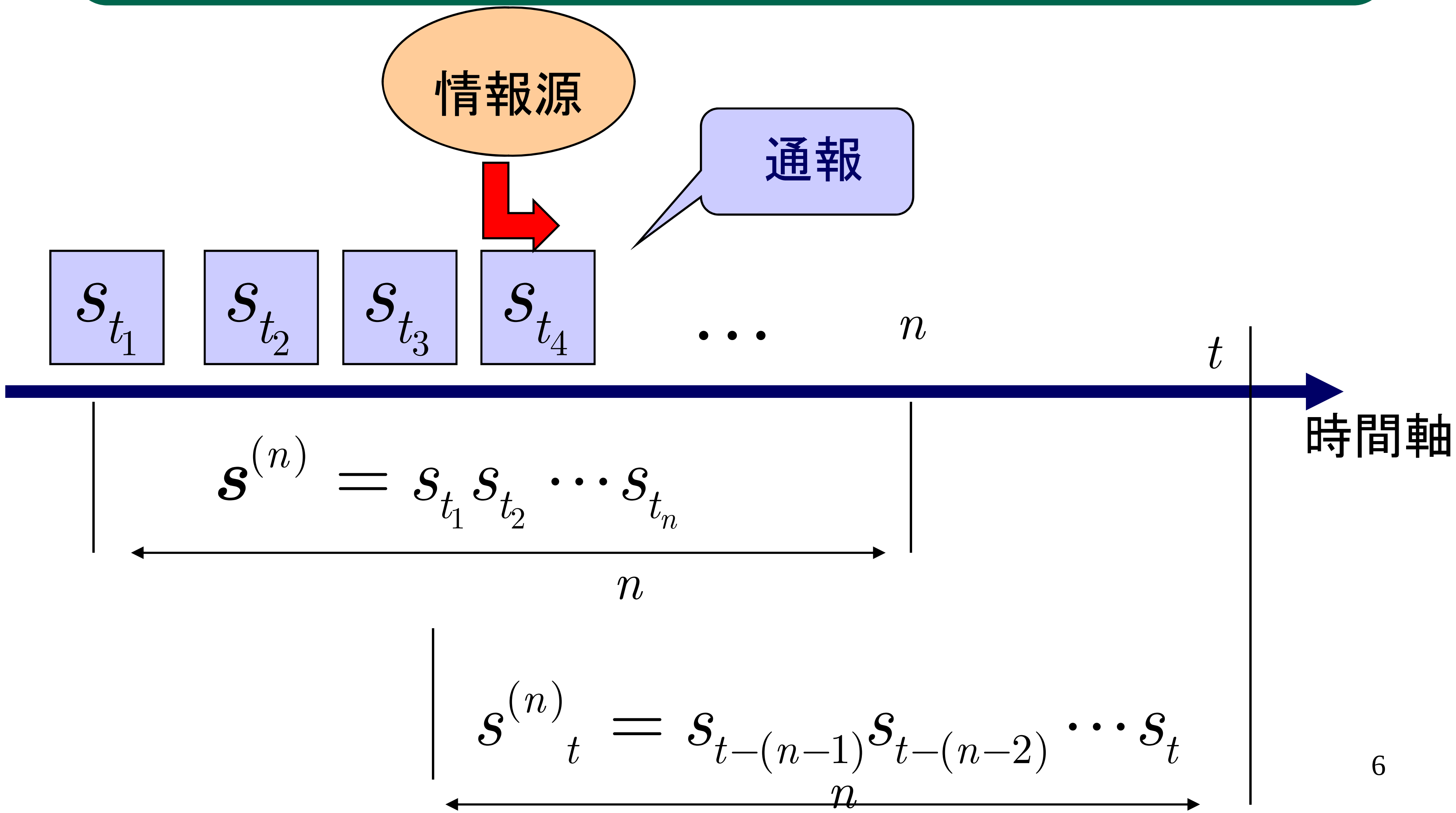
1文字目は”i”だった。

$\mathrm{inf}\,ormation\,?$

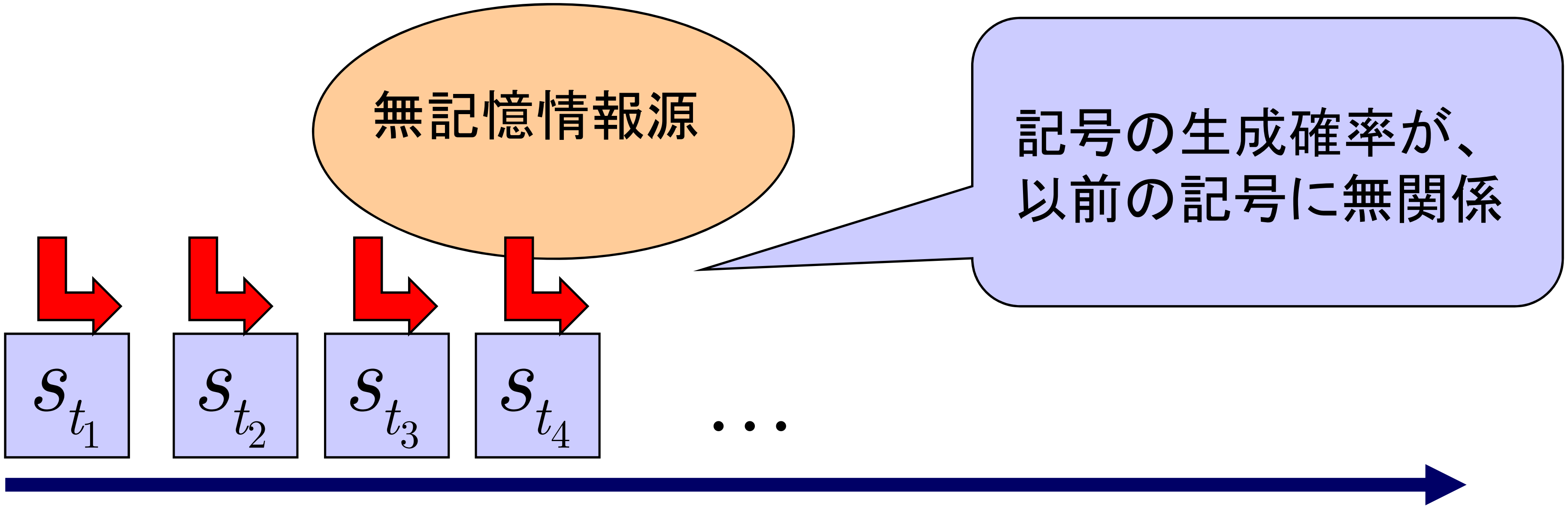
通報

定義:通報

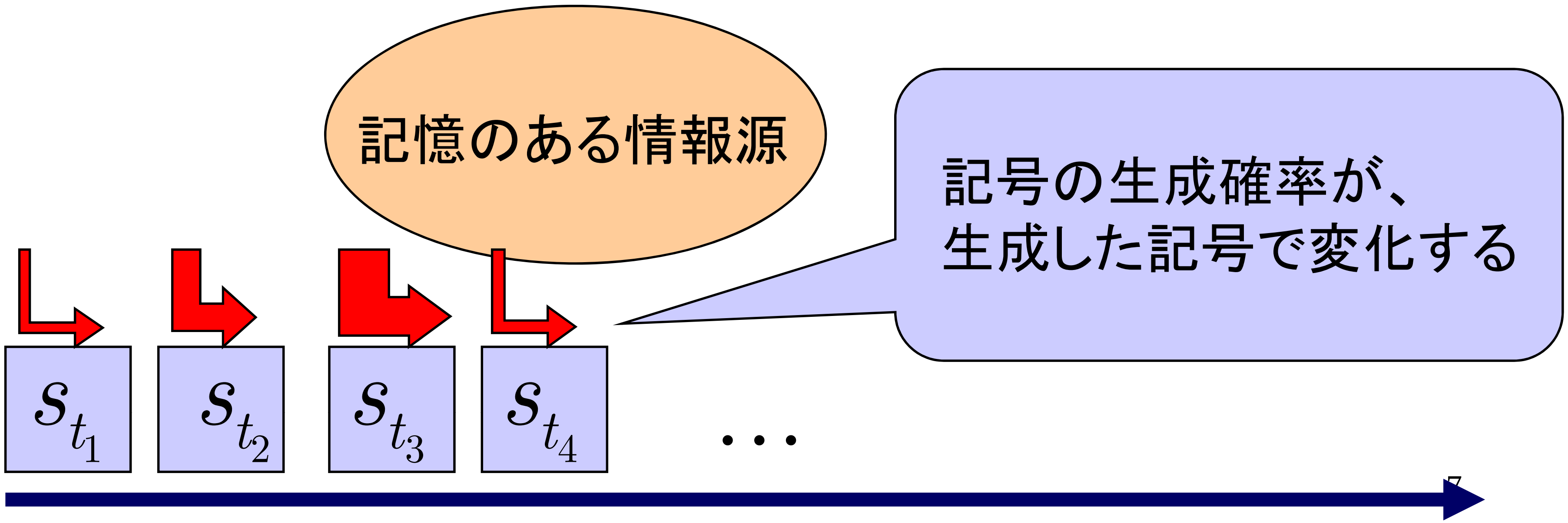
情報源から発生する記号系を通報という。



情報源における記憶



無記憶情報源
記号の生成確率が、
以前の記号に無関係
s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} s_{t_4} $\cdots$



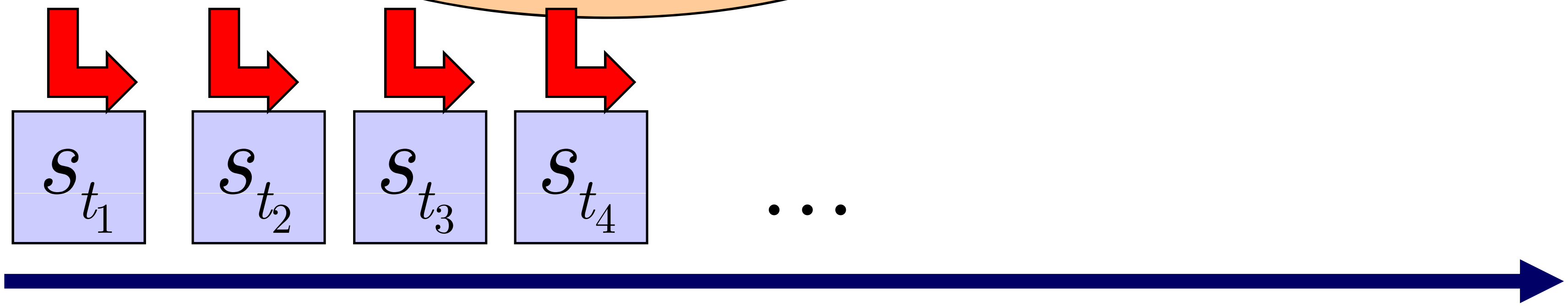
記憶のある情報源
記号の生成確率が、
生成した記号で変化する
s_{t_1} s_{t_2} s_{t_3} s_{t_4} $\cdots$

無記憶情報源(独立情報源)

無記憶情報源

$$S=\begin{Bmatrix} s_1 & , & \cdots & , & s_n \\ P(s_1) & , & \cdots & , & P(s_n) \end{Bmatrix}$$

記号の生成確率が、
以前の記号に無関係



無記憶情報源の1記号あたりの(平均)情報量は、
次式で表される。

$$H(S)=-\sum_{k=1}^{n}P(s_k)\log P(s_k) \quad [bit/\text{記号}]$$

１記号の発生速度を

$$r^* \quad [\text{記号}/\text{単位時間}]$$

とする。このとき、単位時間あたりの発生平均情報量は、
次式であらわされる。

$$H^*(S) = r^* H(S)$$

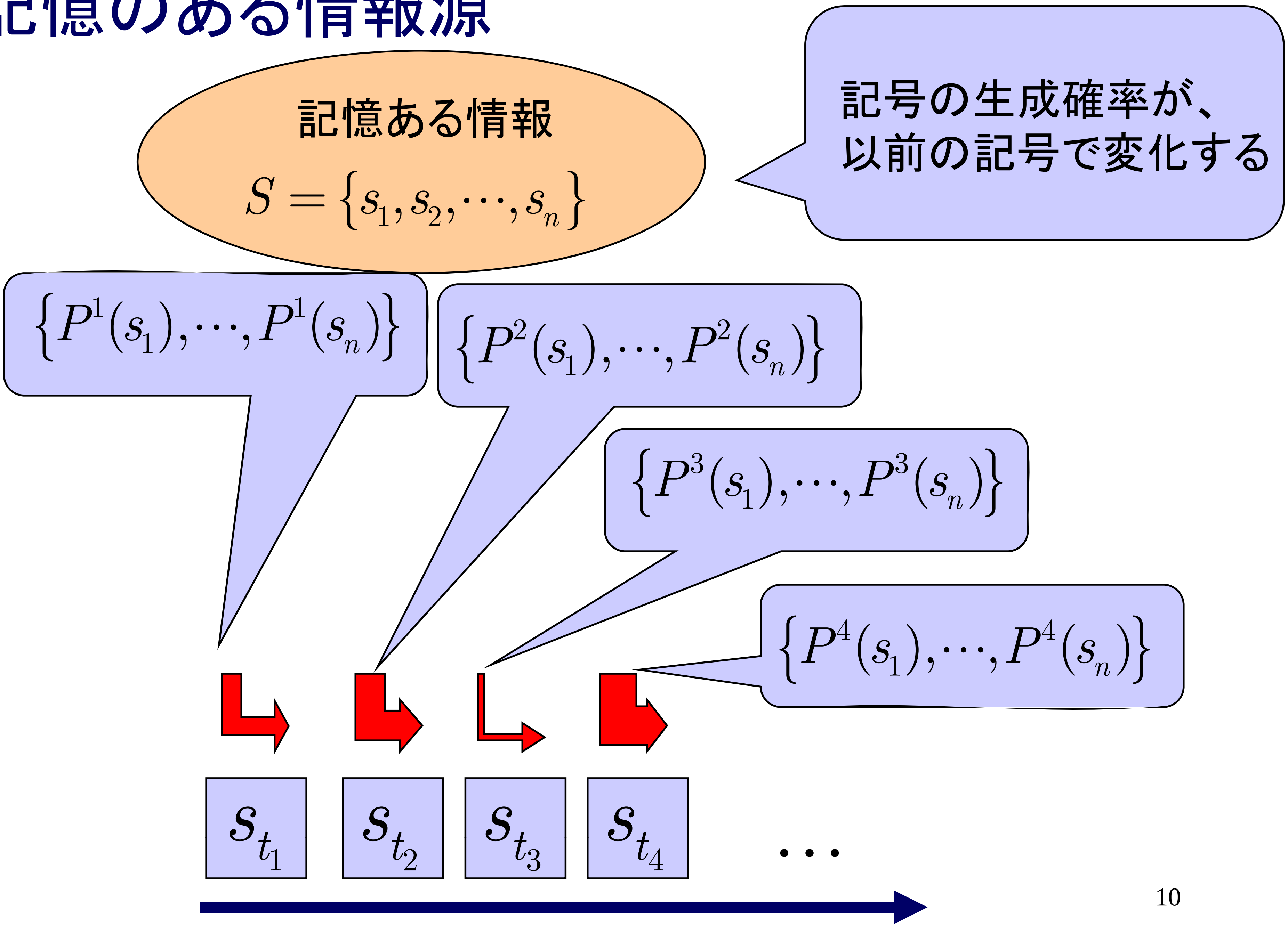
$$= -r^* \sum_{k=1}^{n} P(s_k) \log P(s_k) \quad [bit/\text{単位時間}]$$

以下に注意する。

左辺＝$[bit/\text{単位時間}]$

右辺＝$[\text{記号}/\text{単位時間}][bit/\text{記号}] = [bit/\text{単位時間}]$

記憶のある情報源



記憶ある情報
$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$
記号の生成確率が、
以前の記号で変化する
$\{P^1(s_1), \cdots, P^1(s_n)\}$
$\{P^2(s_1), \cdots, P^2(s_n)\}$
$\{P^3(s_1), \cdots, P^3(s_n)\}$
$\{P^4(s_1), \cdots, P^4(s_n)\}$
s_{t_1}
s_{t_2}
s_{t_3}
s_{t_4}
$\cdots$

問題

次の四角に入るアルファベットを求めよ。

(1)

m □ n　　m □ in　　m □ il

(2)

t □ e　　t □ is　　t □ at

(3)

speake□　　teache□　　manne□

マルコフ情報源

マルコフ情報源

定義:マルコフ情報源

直前のm 個の記号よって、次記号の発生確率が変化する情報源を(m重)マルコフ情報源という。
　発生した記号を条件とする条件付確率で定式化される。すなわち、次の条件付き確率で定められる情報源である。

$$\forall s, s_1, s_2, \cdots, s_m \in S$$

$$P(s \mid s_1, s_2, \cdots, s_m)$$

s は今度発生する記号

$s_1, s_2, \cdots, s_m$ は直前のm個の記号列。
カンマはANDの意味。

(単純)マルコフ情報源

定義:マルコフ情報源

直前の生成された記号よって、次記号の発生確率が変化する情報源を単純マルコフ情報源という。

発生した記号を条件とする条件付確率で定式化される。

すなわち、

$\forall s, s' \in S$ に対して条件付確率

$$P(s \mid s')$$

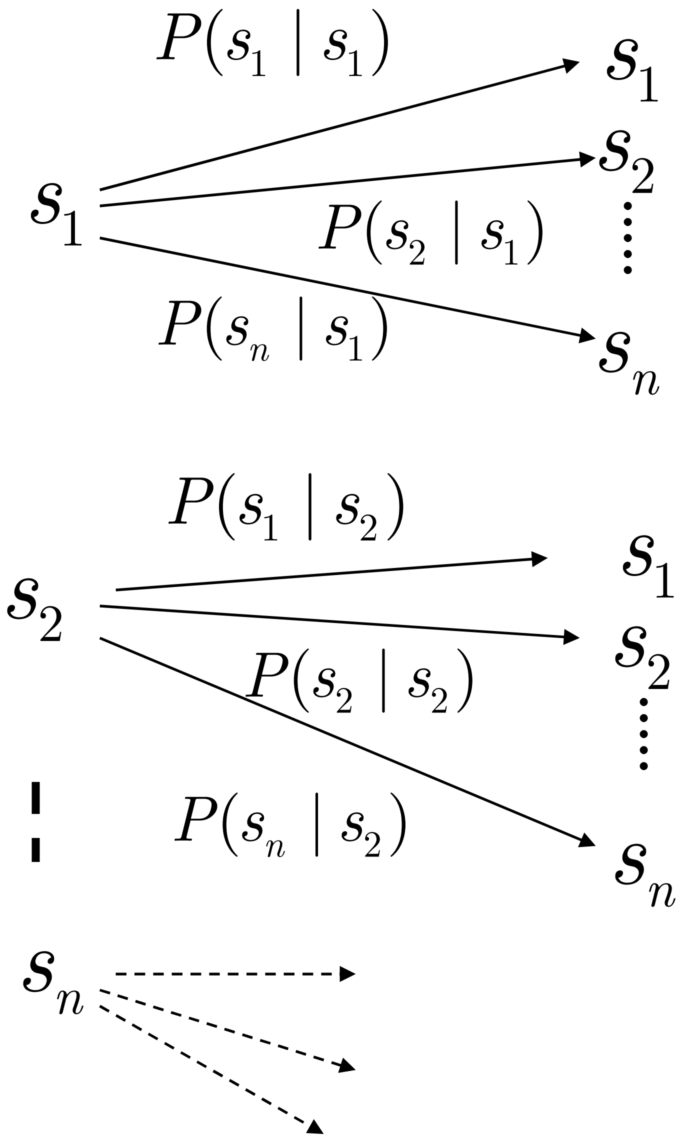
で定められる情報源である。

s は今度発生する記号

s' は直前に発生した記号

マルコフ情報源における状態の遷移

$$S = \{s_1, \cdots, s_n\}$$



状態遷移(確率)行列

$$P = \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) & \cdots & P(s_n \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) & \cdots & P(s_n \mid s_2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P(s_1 \mid s_n) & \cdots & \cdots & P(s_n \mid s_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

行ベクトルはすべて、確率ベクトル(要素は全て0から1の値を持ち、要素の総和が1)。すなわち、確率ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ に対して次式が成り立つ。

$$1 \le i \le n, \quad 0 \le p_i \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

状態遷移確率行列のイメージ

次の記号

s_j

前の記号

s_i

P

条件付確率
添え字の順序に注意

$$p_{ij} = P(s_j \mid s_i)$$

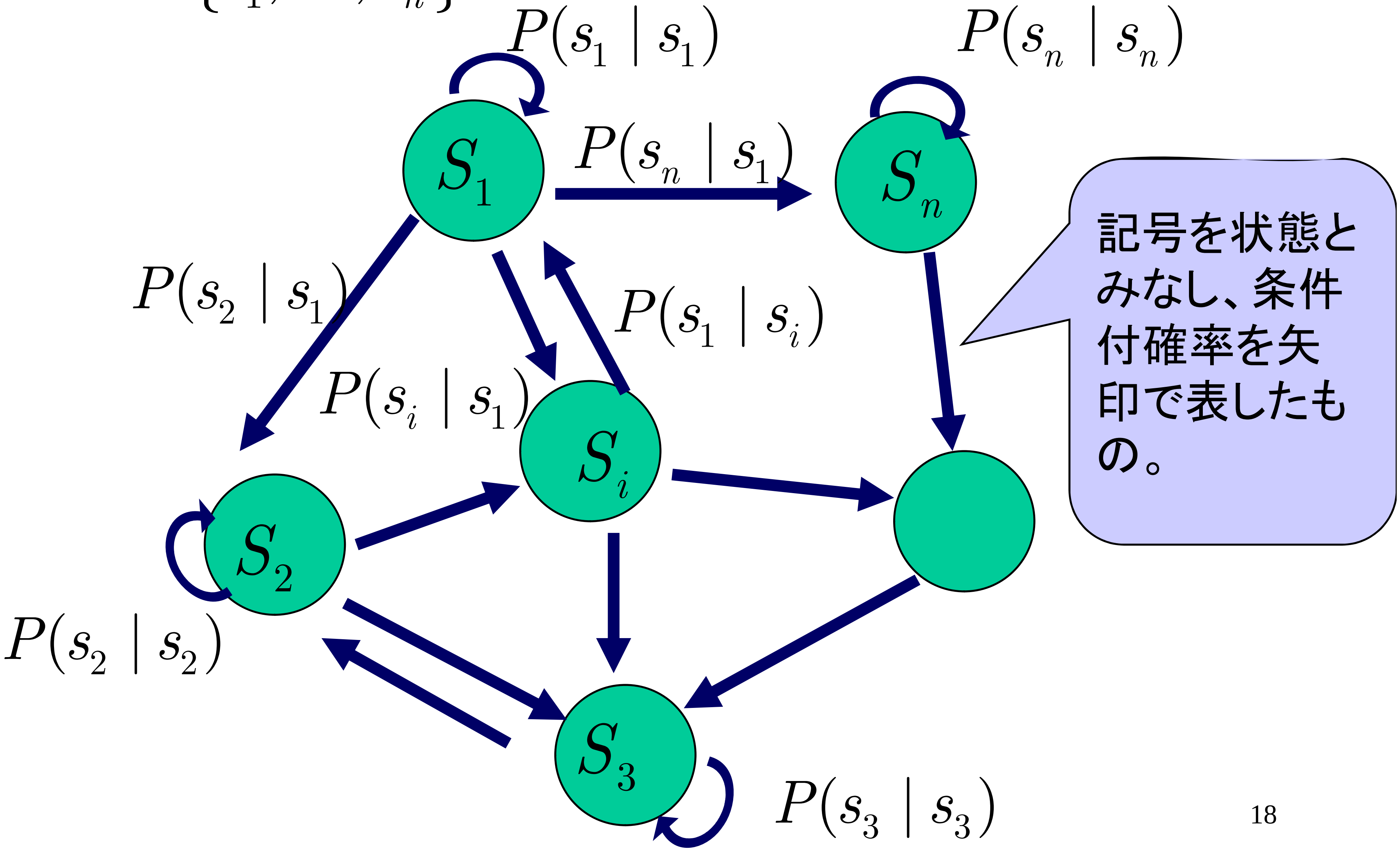
各行で総和は1

$s_i, s_j \in S = \{s_1, \cdots, s_n\}$

なので正方行列

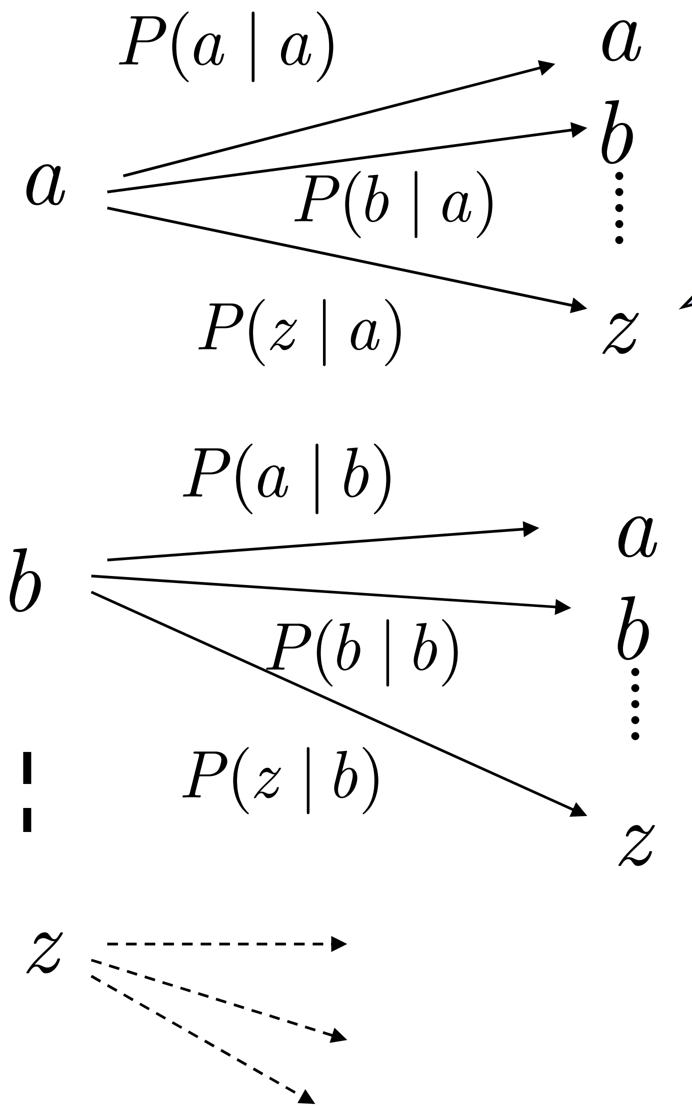
シャノン線図（状態遷移図）

$$S = \{s_1, \cdots, s_n\}$$



マルコフ情報源例（アルファベット）

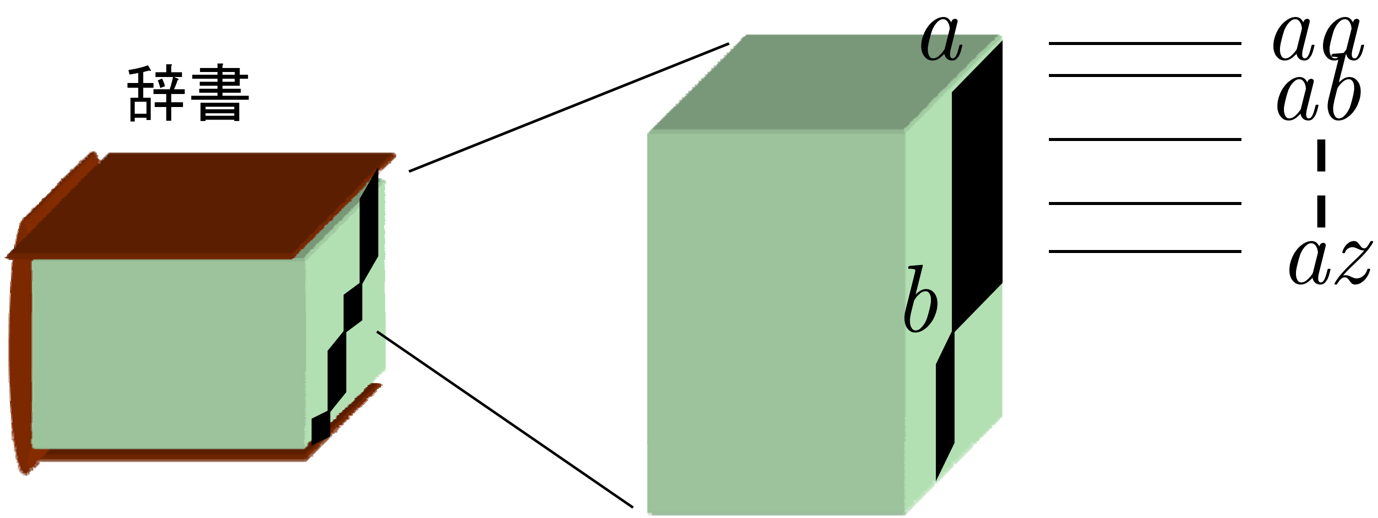
$$\mathcal{A} = \{a, b, c, \cdots, z\}$$



英単語において、
thやer
が多いことから、
$P(h \mid t)$ や $P(r \mid e)$
が大きいと考えられる。

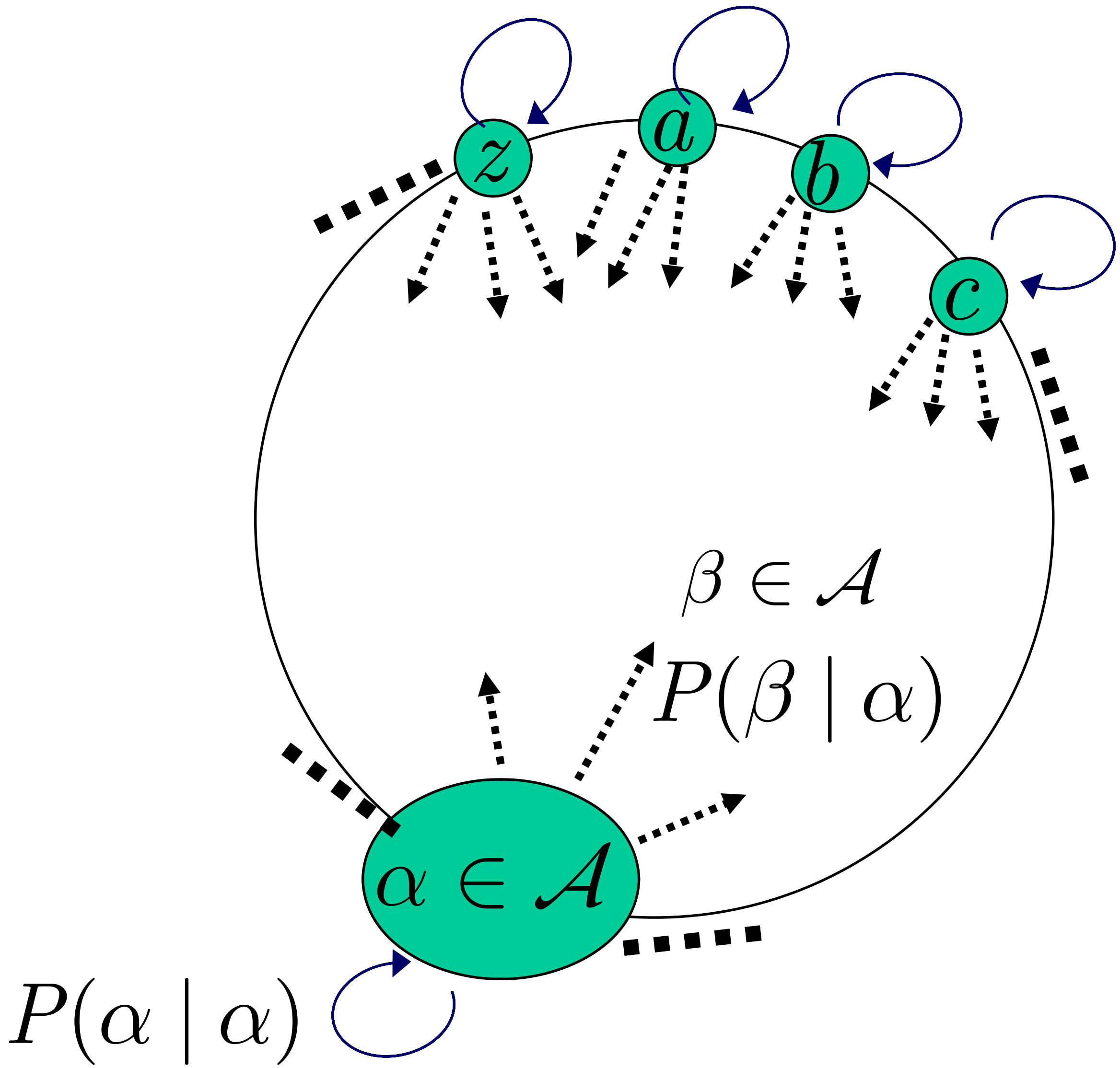
状態遷移行列

$$P = \begin{bmatrix} P(a|a) & P(b|a) & \cdots & P(z|a) \\ P(a|b) & P(b|b) & \cdots & P(z|z) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P(a|z) & \cdots & \cdots & P(z|z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a \\ P_b \\ \vdots \\ P_z \end{bmatrix}$$



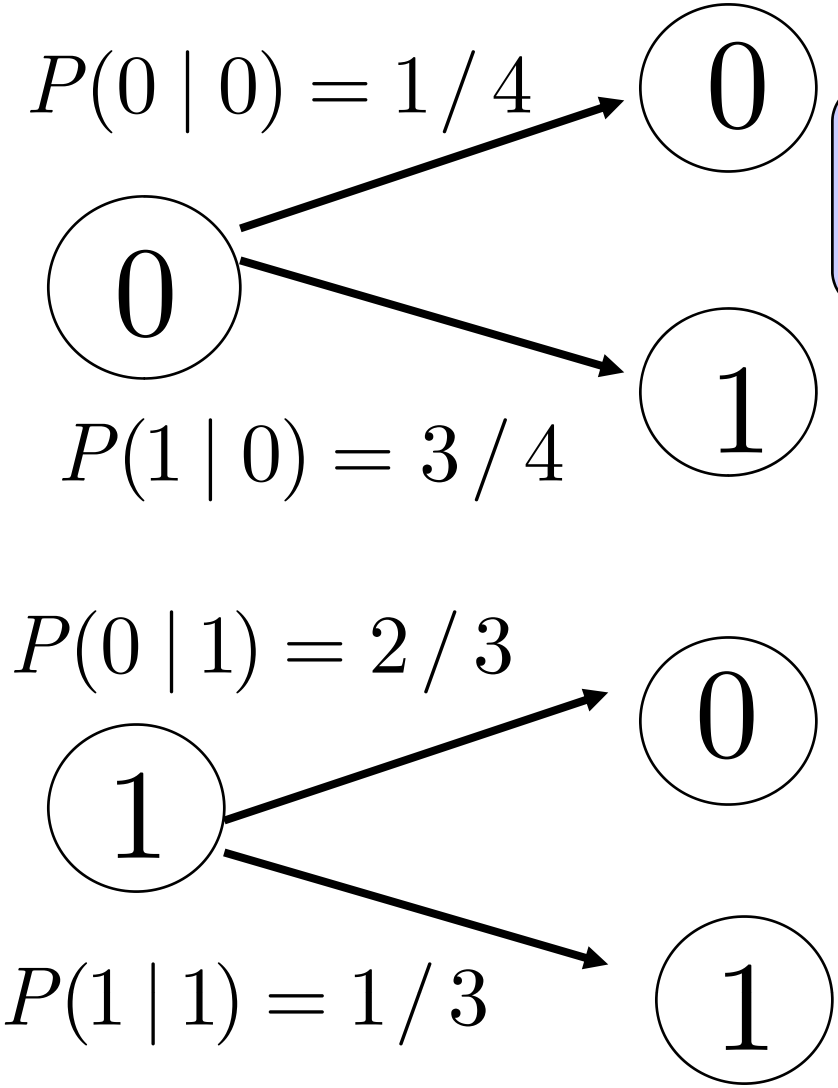
シャノン線図（アルファベット）

$$\mathcal{A} = \{a, b, c, \cdots, z\}$$



マルコフ情報源例（2元単純マルコフ情報源）

$B = \{0, 1\}$



生成記号が0の列

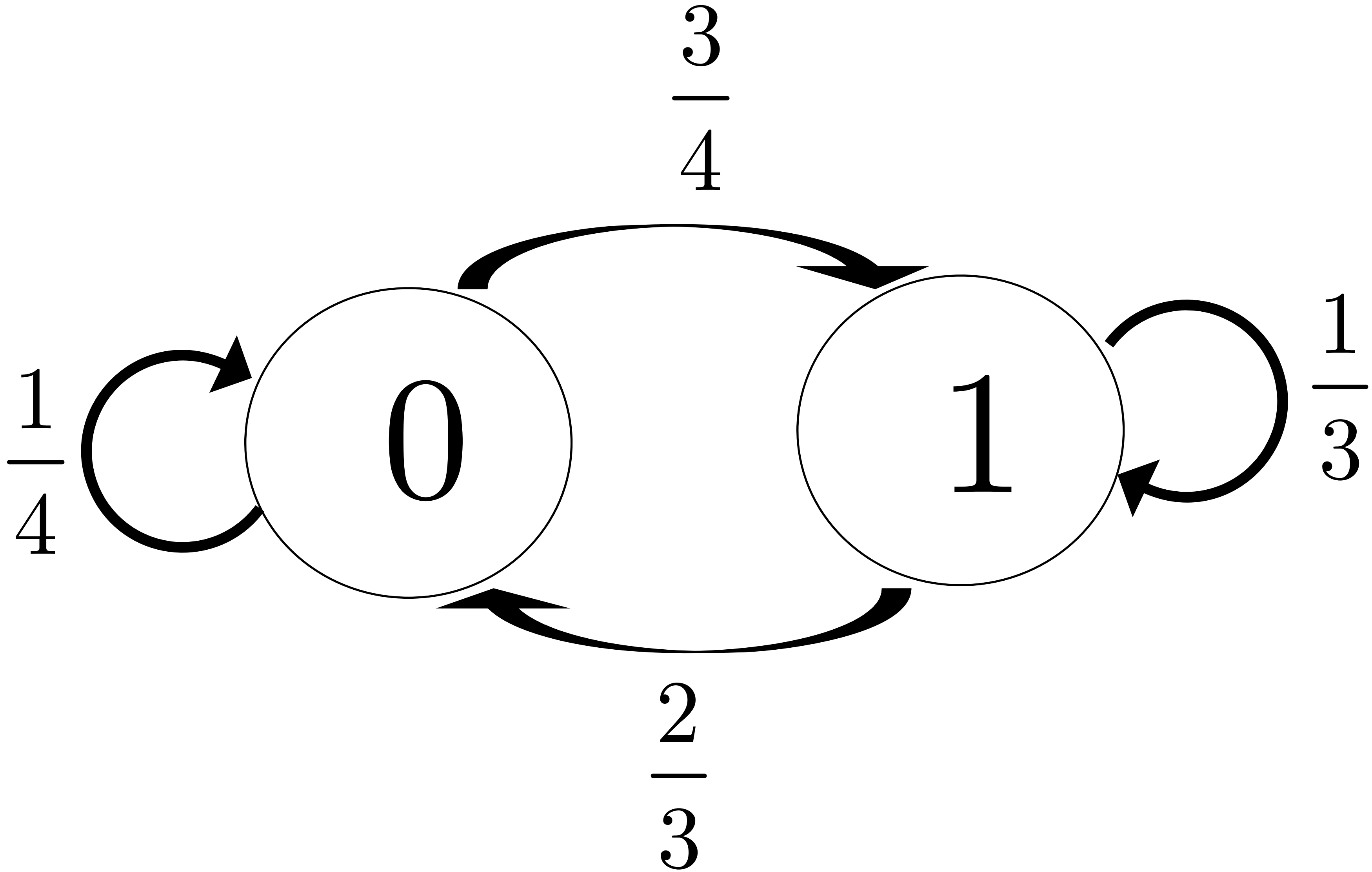
生成記号が1の列

状態（記号）が0の行

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

状態（記号）が1の行

２元単純マルコフ情報源のシャノン線図



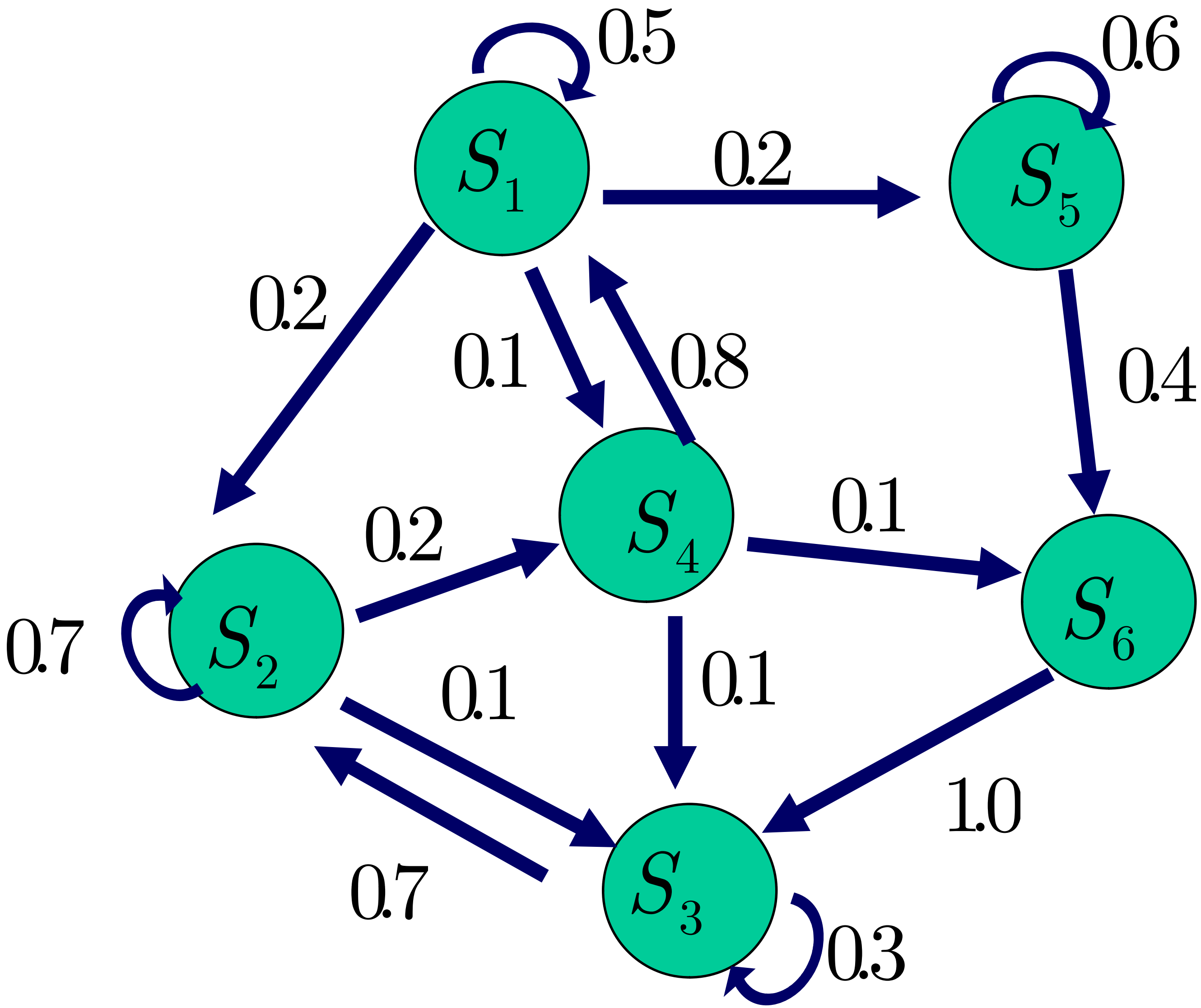
練習1

次の状態遷移確率行列で表されるマルコフ情報源を、シャノン線図で表せ。

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

練習2

次のシャノン線図で表されるマルコフ情報源の状態遷移確率行列を求めよ。



練習3

次のようなマルコフ情報源の、
状態遷移確率行列およびシャノン線図を求めよ。

$$手 = \left\{グー、チョキ、パー\right\}$$

自分が出した手の次の手は、
・前の手に勝つような手を出す確率が1/2である。
・前の手に引き分ける手を出す確率が1/3である。
・前の手に負ける手を出す確率が1/6である。

（参考）無記憶情報源の状態遷移行列

均等なサイコロを振ったときの状態遷移行列

次　出る目

今の目

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \end{array}$$

条件付
確率

偶数の出やすいサイコロ（無記憶情報源）

次　出る目

今の目

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 2 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 3 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 5 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \\ 6 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 1/4 \end{array}$$

条件付
確率

練習

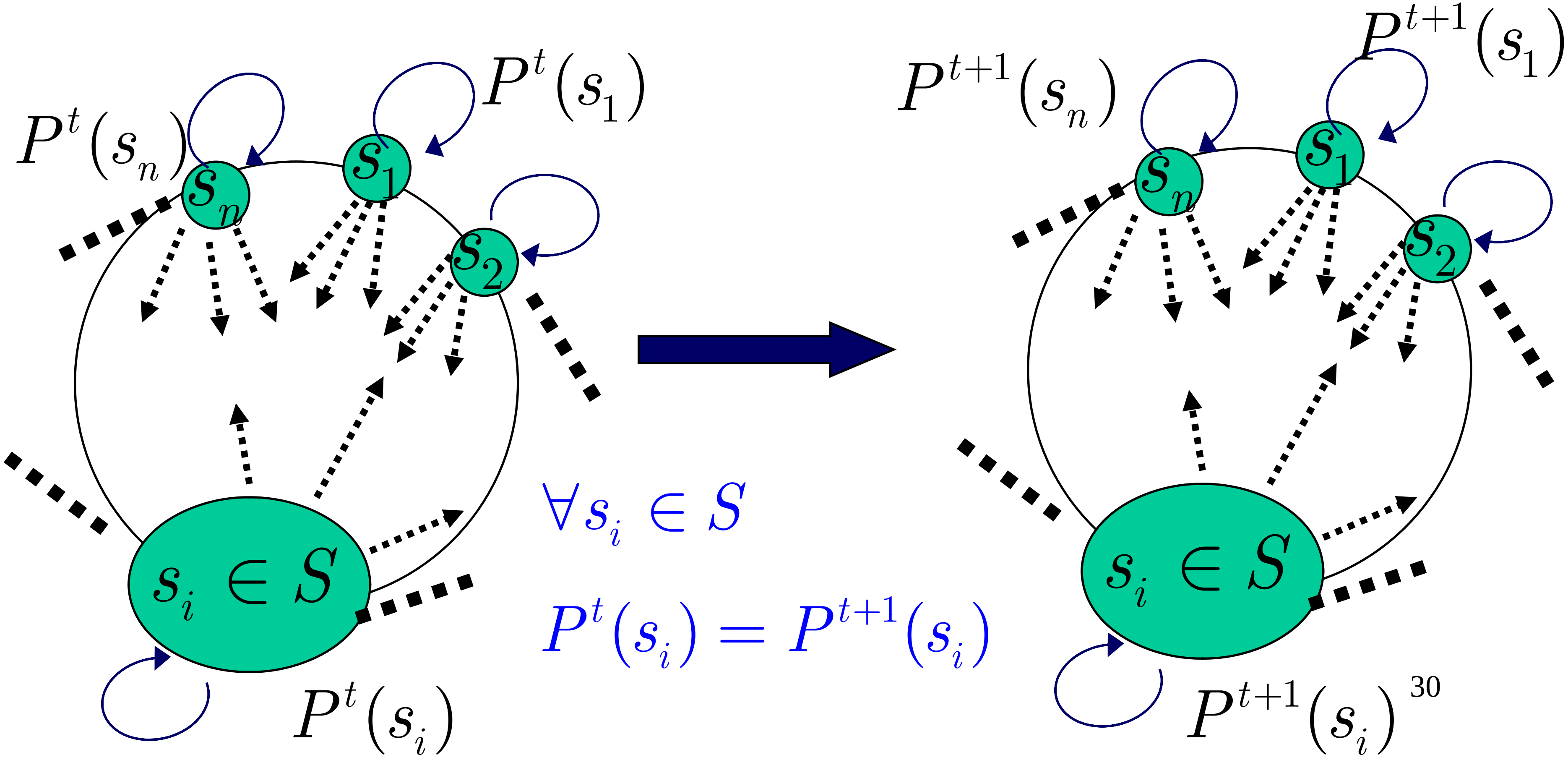
（1）コインを振って得られる状態遷移関数を求めよ。

（2）表の出る確率が、裏のでる確率の２倍であるコインを振って得られる状態遷移関数を求めよ。

定常分布

定義:定常分布

情報源アルファベット $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ に対して、出現確率が時刻 t と時刻 $t+1$ で変化しないような記号の分布を定常分布という。



定常分布の求め方

定常分布は、状態遷移確率行列から求めることができる。
定常分布を$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ とし、状態遷移確率行列を
$\boldsymbol{P} = [p_{ij}]$ とする。このとき、次式が成り立つ。

時刻 t から$t+1$になっても変化しない。
常に一定の出現確率となる。

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}\boldsymbol{P}$$

記号の出現確率。

生成した記号の確率と状態遷移確率積なので、次の記号の出現確率を表す。

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}\boldsymbol{P}$$ の意味。

$$(P(s_1),\cdots,P(s_n)) = (P(s_1),\cdots,P(s_n))\begin{bmatrix} P(s_1\mid s_1) & P(s_2\mid s_1) & \cdots & P(s_n\mid s_1) \\ P(s_1\mid s_2) & P(s_2\mid s_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(s_1\mid s_n) & \cdots & \cdots & P(s_n\mid s_n) \end{bmatrix}$$

情報理論では、慣用的に確率ベクトルは行ベクトルで表される。

$${}^t\boldsymbol{z} = {}^t\boldsymbol{P}\,{}^t\boldsymbol{z}$$ 転置を用いて左式のようにも表せる。

$$\begin{pmatrix} P(s_1) \\ P(s_2) \\ \vdots \\ P(s_n) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P(s_1\mid s_1) & P(s_1\mid s_2) & \cdots & P(s_1\mid s_n) \\ P(s_2\mid s_1) & P(s_2\mid s_2) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(s_n\mid s_1) & \cdots & \cdots & P(s_n\mid s_n) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} P(s_1) \\ P(s_2) \\ \vdots \\ P(s_n) \end{pmatrix}$$

定常分布例

情報源アルファベット$B=\{0,1\}$ に対する2元マルコフ情報源の状態遷移確率関数が次式で与えられている。

$$P=\begin{bmatrix}1/4 & 3/4\\ 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

このとき、定常分布 $\boldsymbol{z}=(z_0,z_1)=(P(0),P(1))$ を求めよ。

解）

$$(z_0,z_1)=(z_0,z_1)\begin{bmatrix}1/4 & 3/4\\ 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

より、

$$\begin{pmatrix}z_0\\ z_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1/4 & 2/3\\ 3/4 & 1/3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_0\\ z_1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{4}z_0 = \frac{2}{3}z_1 \\ \frac{2}{3}z_1 = \frac{3}{4}z_0 \end{cases}$$

全ての行ベクトルが確率ベクトルなので遷移確率行列は正則でなく逆行列を持たない。よって、このように必ず不定の解になる。

$$\therefore 9z_0 = 8z_1$$

一方、z は確率ベクトルなので、

$$z_0 + z_1 = 1$$

前のスライドとこの式から求める。

が成り立つ。

$$\therefore z_0 + \frac{9}{8}z_0 = 1$$

$$\therefore z_0 = \frac{8}{17}$$

$$\therefore z_1 = \frac{9}{17}$$

検算

$$\begin{pmatrix} 8/17 & 9/17 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/17 + 6/17 & 6/17 + 9/17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8/17 & 9/17 \end{pmatrix}$$

練習

次の状態遷移確率行列で表される情報源の定常分布を求めよ。

（1）

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

（2）

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

無記憶情報源における定常分布

無記憶情報源における定常分布は、出現確率と一致する。

無記憶情報源が次式で表されているとする。

$$S = \begin{Bmatrix} s_1 & , & \cdots & , & s_n \\ P(s_1) & , & \cdots & , & P(s_n) \end{Bmatrix}$$

このとき、状態遷移確率行列は次式で表される。

$$P = \begin{bmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{bmatrix}$$

すべての行が同一な
状態遷移行列。
逆に、このような行列
で表される情報源が
無記憶情報源。

$$\begin{pmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(s_1) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(s_i)}_{1} & \cdots & P(s_n) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(s_i)}_{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(s_1) & \cdots & P(s_n) \end{pmatrix}$$

マルコフ情報源の随伴(無記憶)情報源

定義:随伴情報源

マルコフ情報源 S の定常分布を確率分布とするような無記憶情報源を元のマルコフ情報源の**随伴情報源** $\overline{S}$ という。

例

情報源アルファベット $B=\{0,1\}$ を持ち、状態遷移確率行列が

$$P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

で表されるマルコフ情報源を S_B とする。
このとき、随伴情報源 $\overline{S_B}$ は次式で表される。

$$\overline{S_B} = \begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ 8/17 & , & 9/17 \end{Bmatrix}$$

マルコフ情報源のエントロピー

定義：マルコフ情報源のエントロピー

マルコフ情報源 S に対して、S を条件とする S の条件付きエントロピー $H(S \mid S)$ をマルコフ情報源のエントロピーという。

$$H(S \mid S) = \sum_{s_i \in S} P(s_i) H(S \mid s_i)$$

$$= -\sum_{s_i \in S} P(s_i) \sum_{s_j \in S} P(s_j \mid s_i) \log P(s_j \mid s_i)$$

$$= -\sum_{s_i, s_j \in S} P(s_i) P(s_j \mid s_i) \log P(s_j \mid s_i)$$

$$= -\sum_{s_i, s_j \in S} P(s_j, s_i) \log P(s_j \mid s_i)$$

マルコフ情報源のエントロピー例

状態遷移確率行列 $P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

で定まるマルコフ情報源 S_B のエントロピーを求める。

まず、定常分布 $\boldsymbol{z}$ は以下で与えられる。

$$\boldsymbol{z} = (P(0), P(1)) = \left(\frac{8}{17}, \frac{9}{17} \right)$$

状態0におけるエントロピー（0を条件とする条件付きエントロピー）
$H(S_B \mid 0)$ および状態1におけるエントロピー $H(S_B \mid 1)$
を求める。

$$H(S_B \mid 0) = -P(0 \mid 0)\log P(0 \mid 0) - P(1 \mid 0)\log P(1 \mid 0)$$

$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\simeq 0.811$$

0の時のエントロピー

$$H(S_B \mid 1) = -P(0 \mid 1)\log P(0 \mid 1) - P(1 \mid 1)\log P(1 \mid 1)$$

$$= \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\simeq 0.918$$

1の時のエントロピー

$$\therefore H(S_B \mid S_B) = P(0)H(S_B \mid 0) + P(1)H(S_B \mid 1)$$

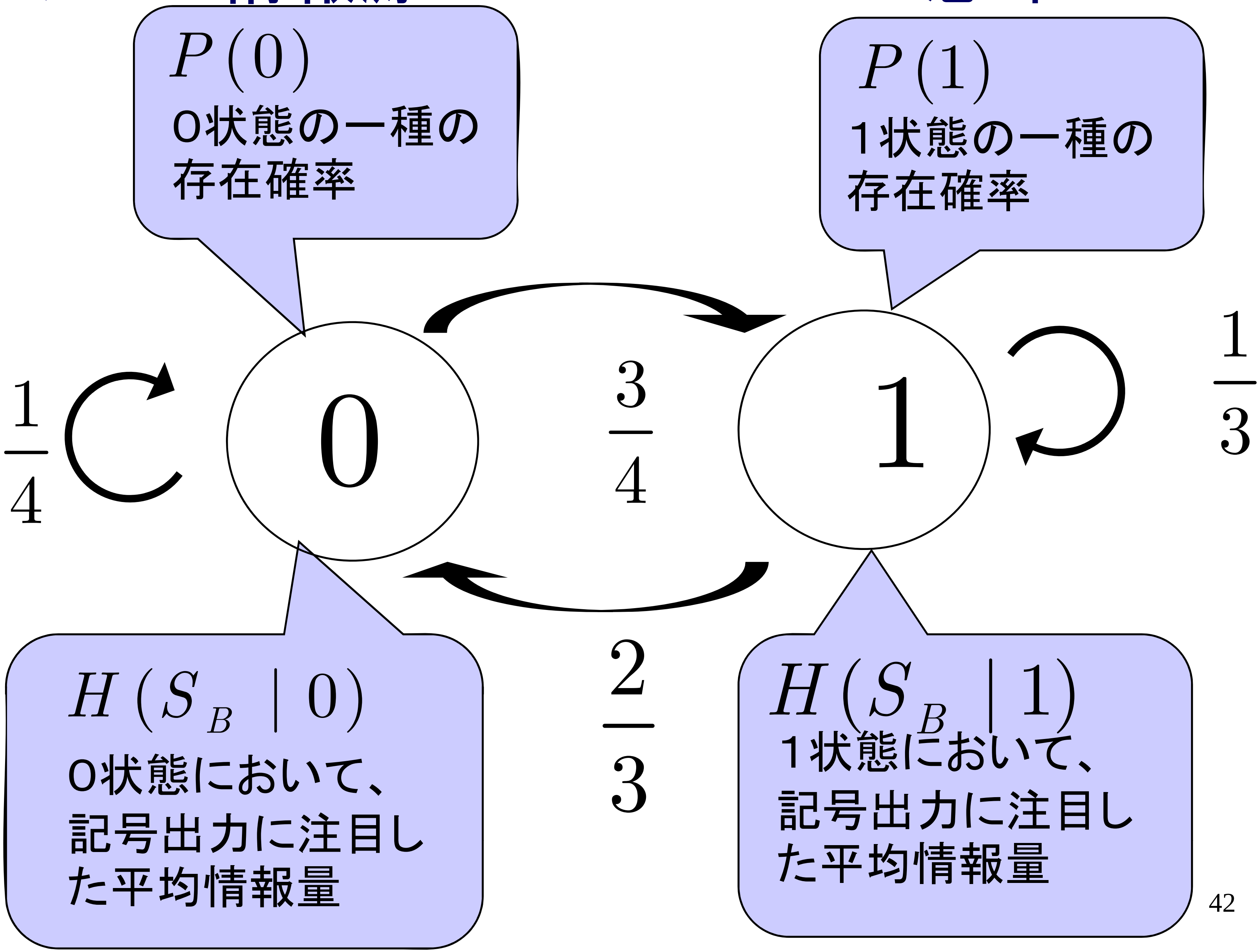
$$= \frac{8}{17}\mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{17}\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\simeq 0.382 + 0.486$$

$$= 0.868$$

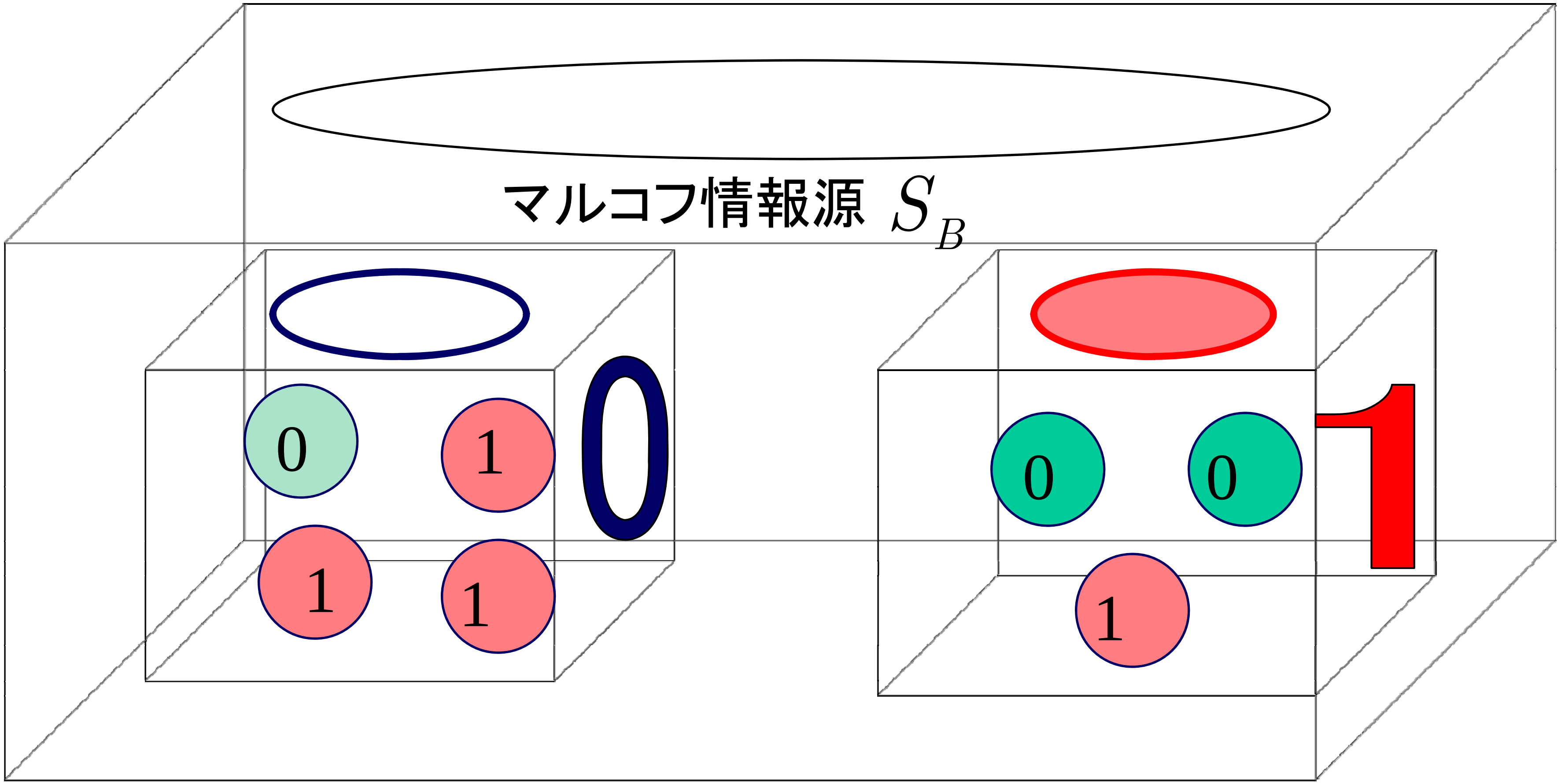
マルコフ情報源のエントロピー

マルコフ情報源のエントロピーの意味



イメージ

0を取ったら次は0の箱から取り、1を取ったら次は1の箱からとる。取った玉は元に戻す。(前のスライドに対応する。)



練習

次の状態遷移確率行列で表される情報源のエントロピーを求めよ。

（1）
$$P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

（2）
$$P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

マルコフ情報源のエントロピーの性質

マルコフ情報源 S に対して、随伴情報源を $\overline{S}$ とする。このとき、随伴情報源のエントロピーは、マルコフ情報源のエントロピー以上である。すなわち、次式が成り立つ。

$$H(S \mid S) \leq H(\overline{S})$$

出現確率は同じでも、マルコフ情報源の方は記号の現れ方に制限がある。（すなわち、記号の出現の予測が無記憶情報源比べて行いやすい。）したがって、マルコフ情報源の方が平均情報量が少なくなる。

随伴情報源のエントロピー例

$$P_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$ の随伴情報源は

$$\overline{S_B} = \begin{Bmatrix} 0 & , & 1 \\ 8/17 & , & 9/17 \end{Bmatrix}$$ である。

したがて、エントロピー $H(\overline{S_B})$ は次式で求められる。

$$H(\overline{S_B}) = \mathcal{H}\left(\frac{8}{17}\right) \simeq 0.997$$

$$\therefore\ 0.868 \simeq H(S_B \mid S_B) \leq H(\overline{S_B}) \simeq 0.997$$

練習

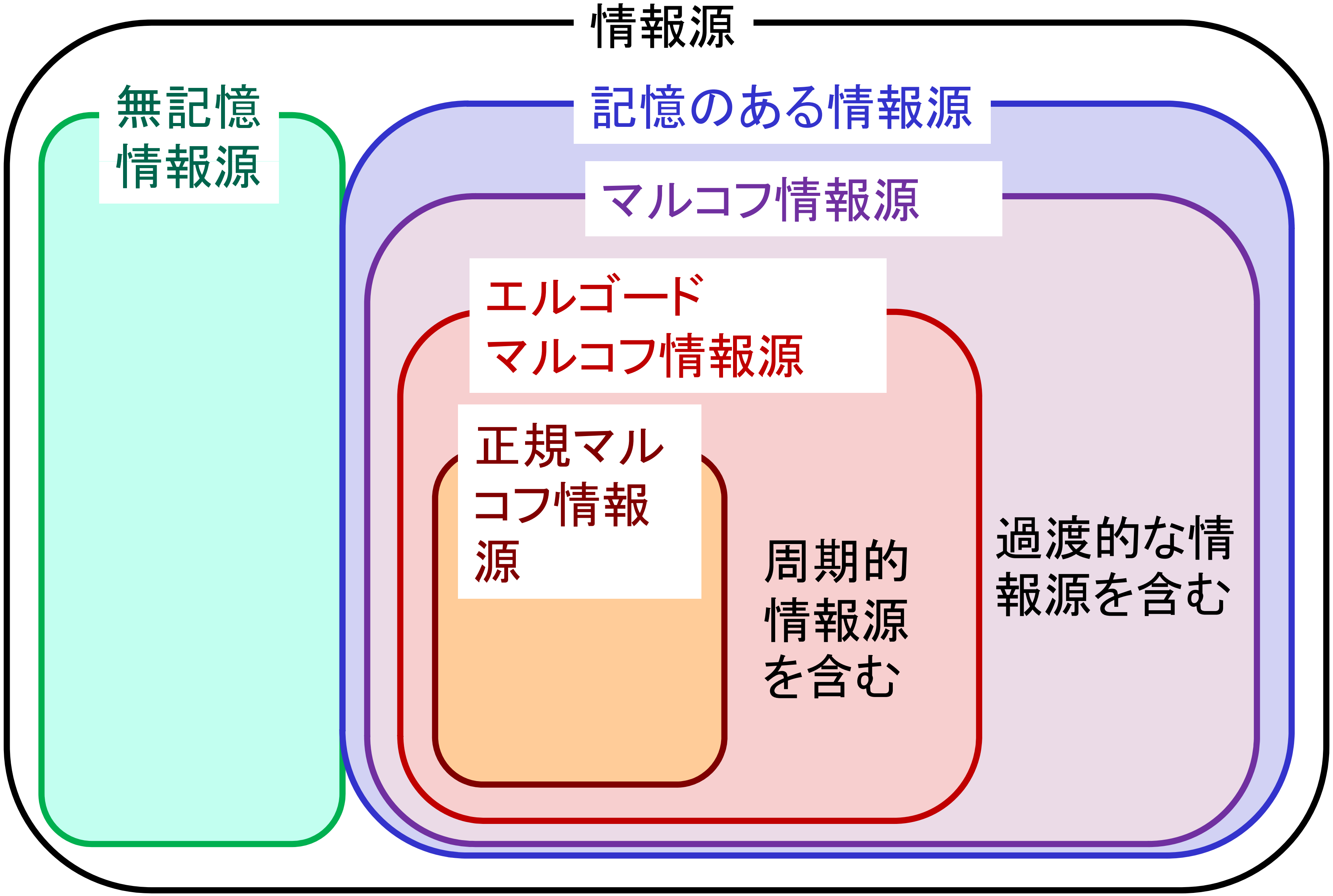
次の状態遷移確率行列で現されるマルコフ情報源の随伴情報源のエントロピーを求めよ。

（1）
$$P_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

（2）
$$P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

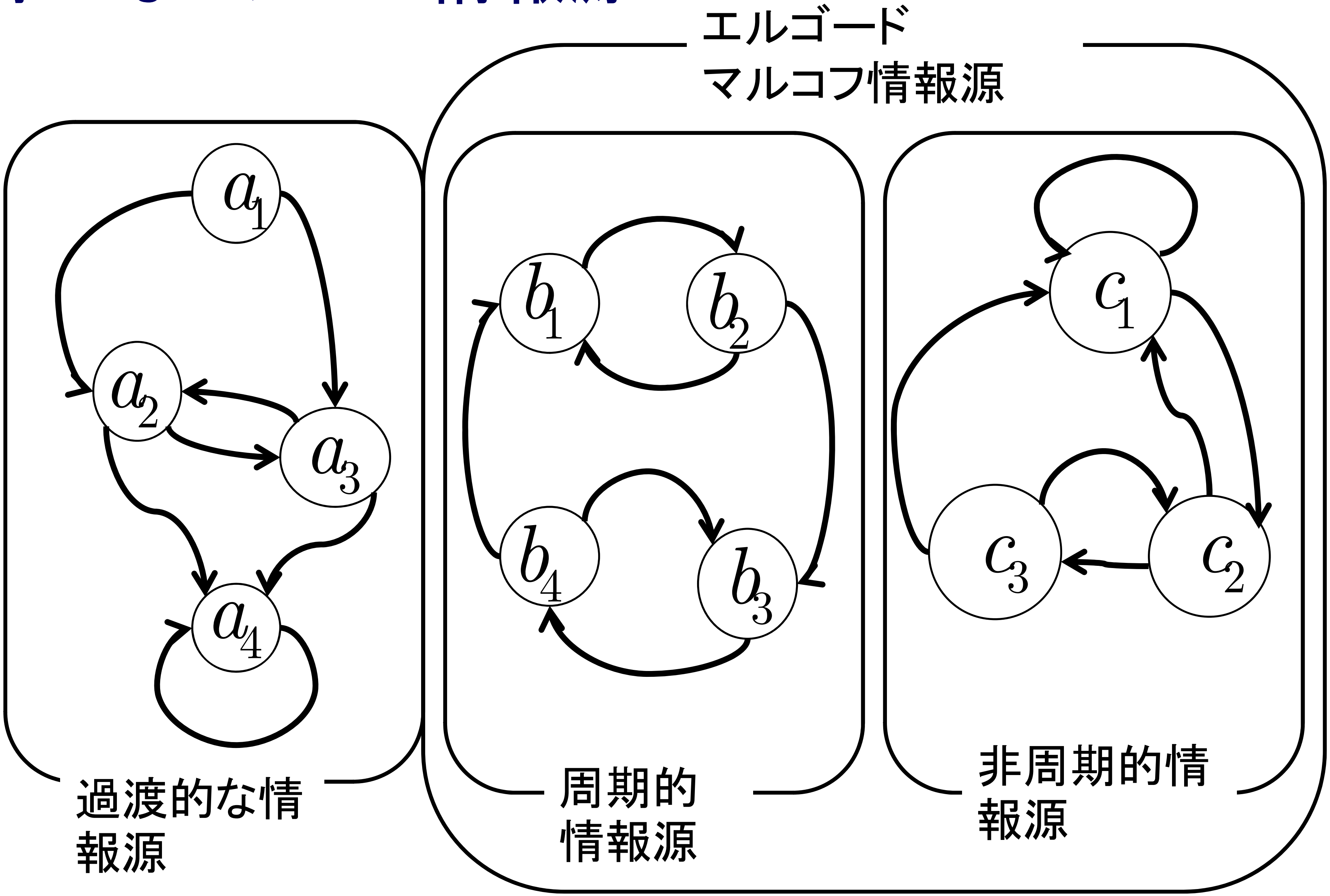
情報源の分類

情報源の分類図



情報源
無記憶
情報源
記憶のある情報源
マルコフ情報源
エルゴード
マルコフ情報源
正規マル
コフ情報
源
周期的
情報源
を含む
過渡的な情
報源を含む

様々なマルコフ情報源



矢印には0より大きい確率が割り当てられている。

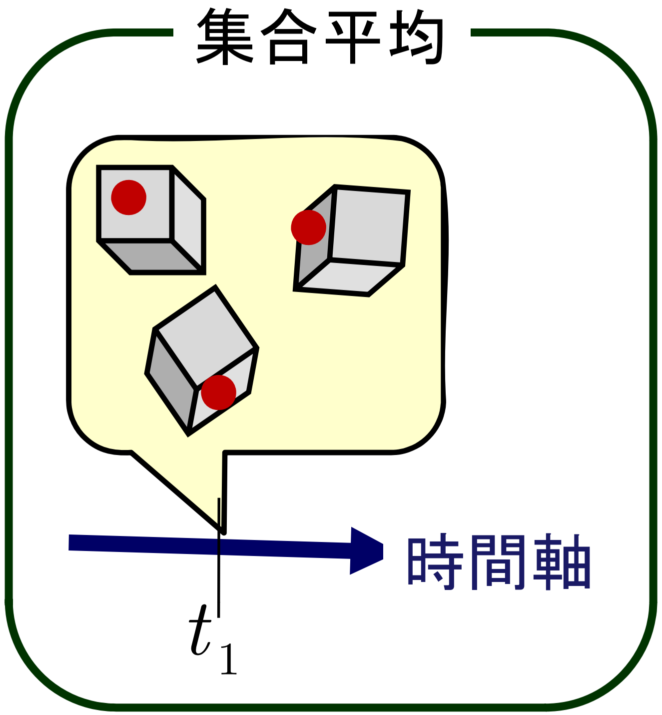
エルゴード性

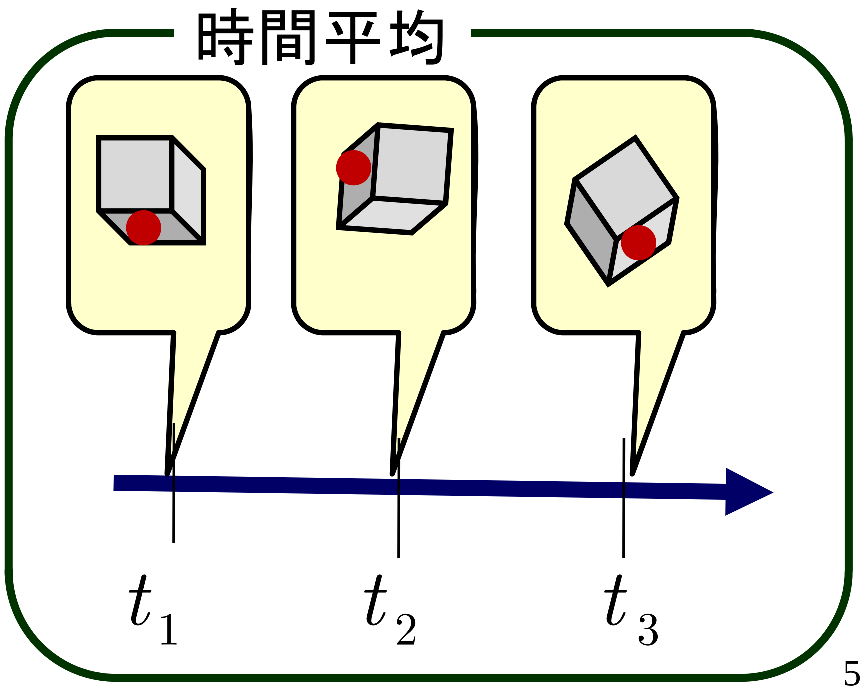
定義：エルゴード性

集合平均と時間平均が等しい性質を**エルゴード性**という。

[集合平均]＝[時間平均]

エルゴード性を持つ情報源を**エルゴード情報源**という。





サイコロ D_i を振ったときの目を情報源と考えると、エルゴード性を満たす。

	t_1	t_2	$\cdots$	t_j	$\cdots$	t_T
D_1	3	2	$\cdots$	6	$\cdots$	1
D_2	2	4	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
D_i	5	3	$\cdots$	6	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
D_n	2	1	$\cdots$	4	$\cdots$	3

時間平均:1つのサイコロを何回も振ったときの平均

集合平均:1回に多数のサイコロを振ったときの平均

状態遷移行列による判別

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij} = P(s_j \mid s_i)$$

前の記号 s_i のときに次の記号 s_j を生成する確率。
添え字の順序に注意する。

$$P^t = \begin{bmatrix} p^{(t)}{}_{11} & p^{(t)}{}_{12} & \cdots & p^{(t)}{}_{1n} \\ p^{(t)}{}_{21} & p^{(t)}{}_{22} & \cdots & p^{(t)}{}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p^{(t)}{}_{n1} & \cdots & \cdots & p^{(t)}{}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$P^t = \underbrace{P \bullet P \bullet \cdots \bullet P}_{t\text{個}}$$

遷移を t 回繰り返すときの遷移確率。

過渡的なマルコフ情報源

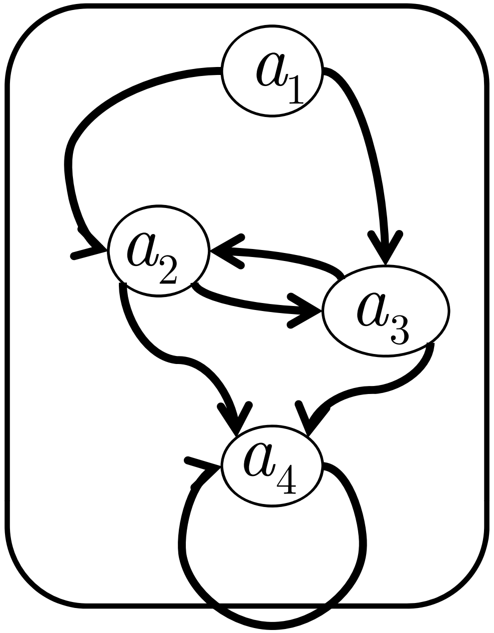
定義：過渡的な情報源

十分な時間経過の後に、生成確率がすべて0に収束するような状態を持つマルコフ情報源を過渡的な情報源という。

過渡的な情報源

$\Updownarrow$

$$\exists j, \forall i, \quad t \to \infty \Rightarrow p_{ij}^{(t)} \to 0$$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & p_{32} & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

過渡的

エルゴードマルコフ情報源

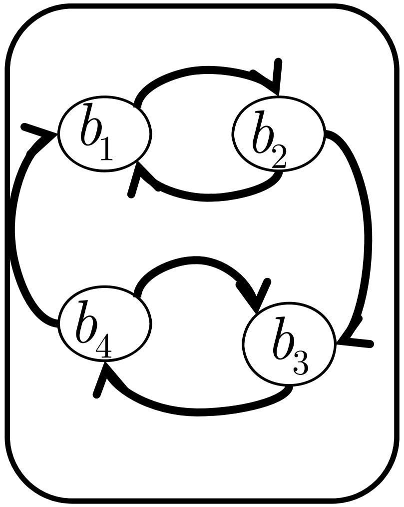
定義:エルゴード情報源

過渡的でない情報源を**エルゴード情報源**という。エルゴード情報源は**エルゴード性**を満たす。

エルゴード情報源

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, i, j, \exists\, t_{ij}, \quad p_{ij}^{(t_{ij})} > 0$$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} \\ p_{41} & 0 & p_{43} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{t_o} = \begin{bmatrix} 0 & p^{(t_o)}{}_{12} & 0 & p^{(t_o)}{}_{14} \\ p^{(t_o)}{}_{21} & 0 & p^{(t_o)}{}_{23} & 0 \\ 0 & p^{(t_o)}{}_{32} & 0 & p^{(t_o)}{}_{34} \\ p^{(t_o)}{}_{41} & 0 & p^{(t_o)}{}_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$P^{t_e} = \begin{bmatrix} p^{(t_e)}{}_{11} & 0 & p^{(t_3)}{}_{13} & 0 \\ 0 & p^{(t_e)}{}_{22} & 0 & p^{(t_e)}{}_{24} \\ p^{(t_e)}{}_{31} & 0 & p^{(t_e)}{}_{33} & 0 \\ 0 & p^{(t_e)}{}_{42} & 0 & p^{(t_e)}{}_{44} \end{bmatrix}$$

周期的

正規マルコフ情報源

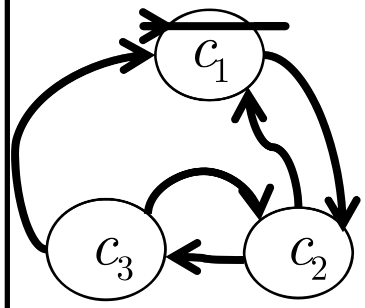
定義:エルゴード情報源

十分な時間経過後、各状態からすべての状態への遷移確率が0より大きいマルコフ情報源を正規マルコフ情報源という。

正規マルコフ情報源

$$\Updownarrow$$

$$\forall i, j, \exists t, \quad p_{ij}^{(t)} > 0$$



$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{bmatrix} p^{(t)}{}_{11} & p^{(t)}{}_{12} & p^{(t)}{}_{13} \\ p^{(t)}{}_{21} & p^{(t)}{}_{22} & p^{(t)}{}_{23} \\ p^{(t)}{}_{31} & p^{(t)}{}_{32} & p^{(t)}{}_{33} \end{bmatrix}$$

全ての確率は非零

練習

次の遷移行列で表わされるマルコフ情報源の種類が、
過渡的、周期的、正規マルコフ情報源のいずれかを答えよ。

（１）

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

（２）

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$