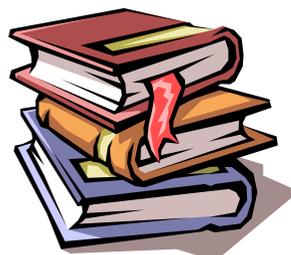


# 情報量(2章)

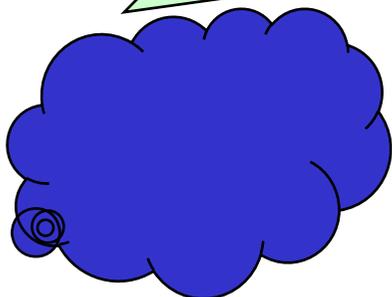
# 物理的概念との対比1 (入れ物と中身)

データ

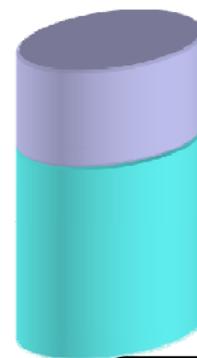


情報の量は見た目ではわからない。データと情報は異なる概念。

情報

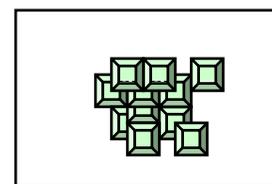


情報の量？



塩水

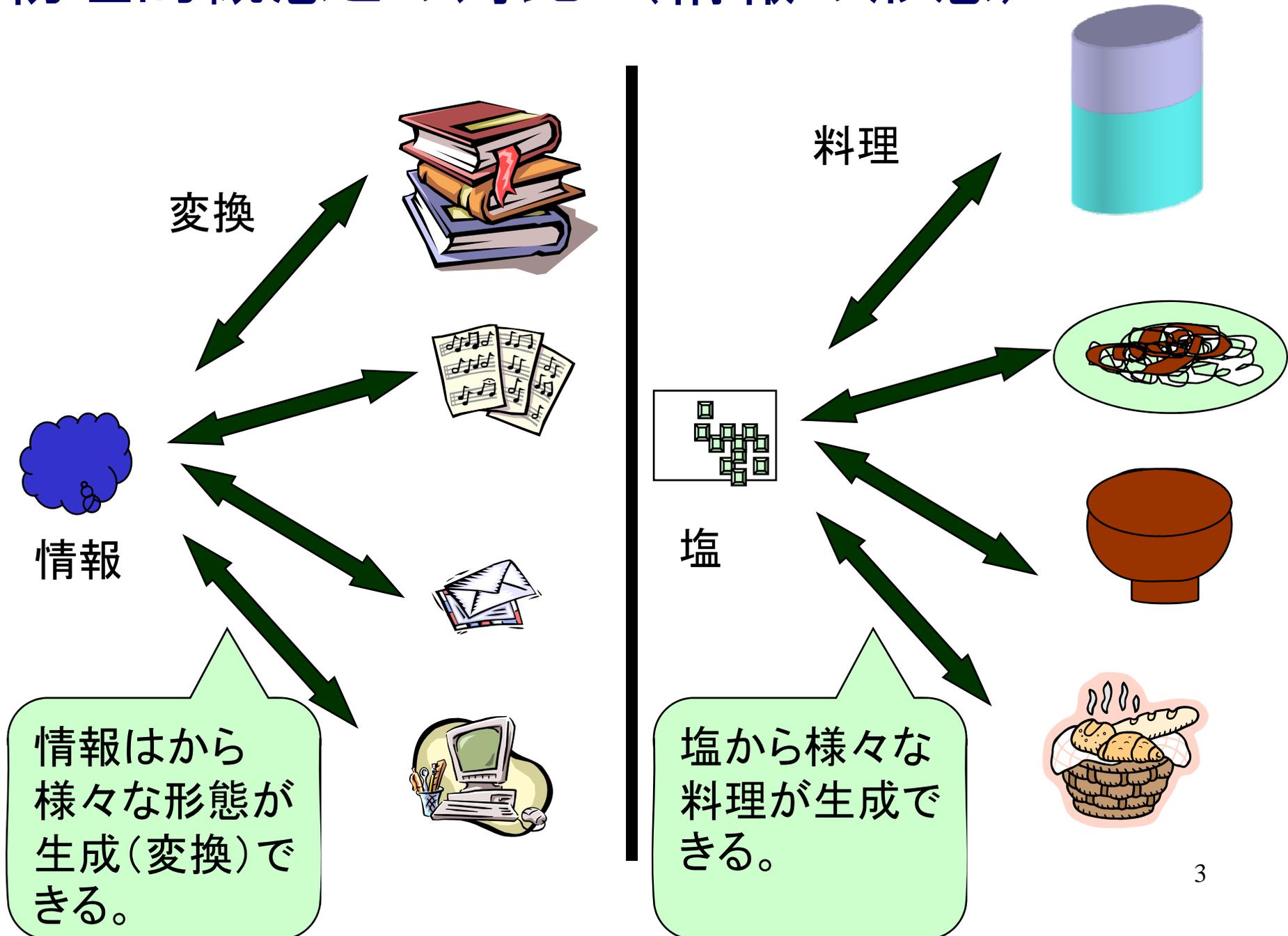
塩分の量は見た目ではわからない。しかし、本質的なもの。



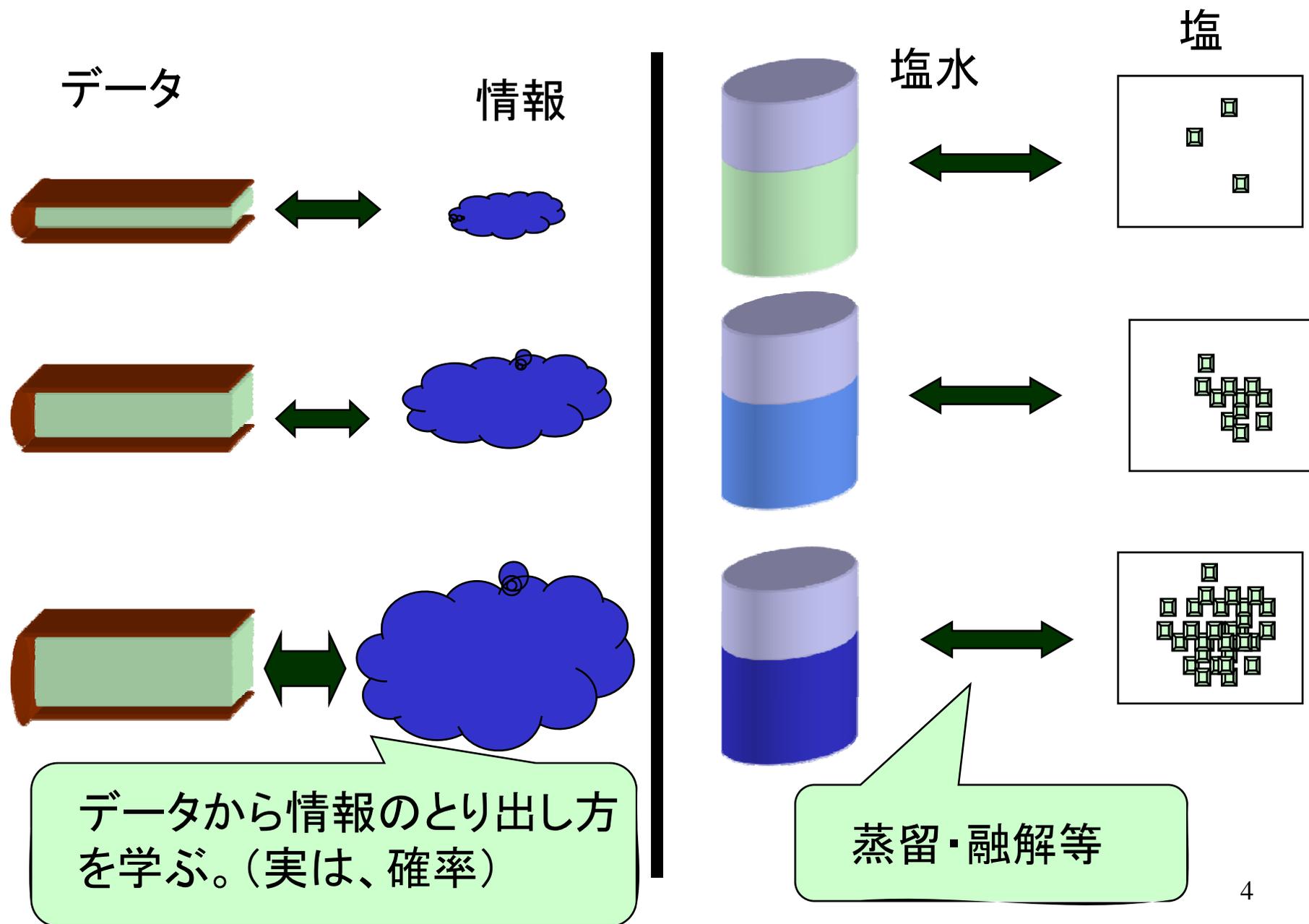
塩

塩分の量！

# 物理的概念との対比2 (情報の形態)



# 物理的概念との対比3 (情報量の計測)



# 情報の大小(情報量の性質1)

事象(出来事)

ニュースになる!

(a) 沖縄に雪が降った。

(b) 北海道に雪が降った。

ニュースになる?

情報量

$i(a)$

$i(b)$

一種の  
重要度  
と考える。

どれが妥当か?

$$i(a) < i(b)$$

$$i(a) = i(b)$$

$$i(a) > i(b)$$

**練習** 次のニュース(データ)の情報量の大小関係を示せ。

(1)

(宝a) 買った宝くじが外れた。

(宝b) 買った宝くじが1等当たった。

(2)

(事a) 今日事故にあった。

(事b) 今日事故にあわなかった

(3)

(サa) サイコロを振ったら1が出た。

(サb) 偶数がでた。

# 情報量と確率の関係

事象

情報量

確率

(a) 沖縄に雪が降った。

$i(a)$

$P(a)$

(b) 北海道に雪が降った。

$i(b)$

$P(b)$

$i(a) > i(b)$

$P(a) < P(b)$



1. 情報量は、確率の関数
2. 情報量は、確率に関する減少関数  
(確率が増加すれば、情報量は減少する。)

## 独立事象の確率と情報量（情報量の性質2）

事象「宝くじが当たって、しかも事故にあった。」の情報量を考えよう。

(宝a) 買った宝くじが外れた。  
(宝b) 買った宝くじが1等当たった。



(事a) 今日事故にあった。  
(事b) 今日事故にあわなかった

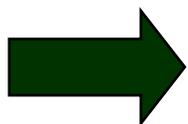
（互いに無関係な事象を独立な事象と言う。）

”独立”な事象の積事象の確率

$$P(\text{宝}b) \times P(\text{事}a)$$

”独立”な事象の積事象の情報量

$$i(\text{宝}b) + i(\text{事}a)$$



3. 独立な事象の積事象は、個々の情報量の和

# 情報量の性質から情報量の数値化へ

事象  $x$  がおきる確率を  $P(x)$  と表し、  
事象  $x$  がおきたことを知った情報量を  $i(x)$  と表す。  
このとき、以下を満たす関数  $f(x)$  で情報量を定義する。

1. 情報量は、確率の関数である。

$$i(x) = f(P(x))$$

2. 情報量は、確率に対する減少関数である。

$$P(x_1) < P(x_2) \Leftrightarrow i(x_1) > i(x_2)$$

3. 独立な積事象を知ったときの情報量は、個々の情報量の和である。

$$\begin{aligned} & i(x_1 \bullet x_2) \\ &= f(P(x_1) \bullet P(x_2)) = f(P(x_1)) + f(P(x_2)) \\ &= i(x_1) + i(x_2) \end{aligned}$$

# (自己)情報量と情報量の単位

先のスライドを満たすように、  
ある事象  $x$  を知る情報量  $i(x)$  は以下の関数で  
定義される。 ( $s > 1$ )

定義(自己情報量)

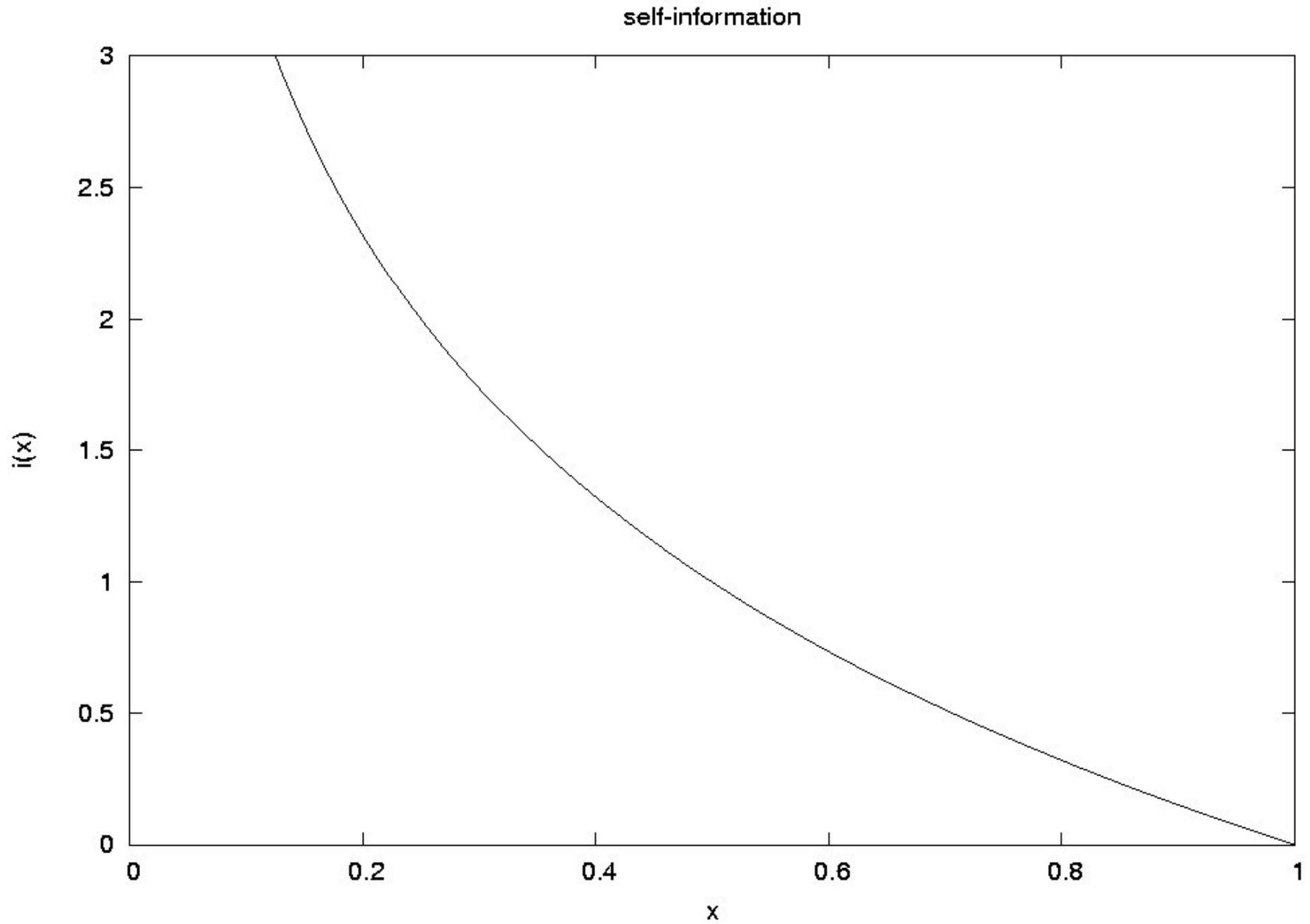
$$i(x) = -\log_s P(x)$$

情報量の単位

$(s = 2)$      $\longrightarrow$     [bit](ビット)  
 $(s = e)$      $\longrightarrow$     [nat](ナット)  
 $(s = 10)$     $\longrightarrow$     [decit](デシット)

1ビットは確率0.5の事象が起きたことを知る情報量。以後は、ビットだけを扱う。

# 自己情報量の外形



# 練習

次の事象の自己情報量を求めよ。

(1)

$a$  : 2枚のコインを投げて両方とも裏がでる。

(2)

$b$  : 52枚のトランプから絵札を1枚引く

(3)

$c$  : アルファベットの書いてある26個の玉から、 $c$ の玉を取り出す。

# 事象系

単独の事象ではなくて、事象の集合を考える。  
事象の集合とそれが生じる確率を以下のように表す。

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n \\ P(x_1) & , & P(x_2) & , & \cdots & , & P(x_n) \end{array} \right\}$$

ここで、

$$0 \leq P(x_i) \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

このように、確率が定められた事象の集合を事象系と言う。

# 事象系例

(1) コイントスの事象系

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \text{表} , \text{裏} \\ \frac{1}{2} , \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

(2) サイコロの事象系

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \\ \frac{1}{6} , \frac{1}{6} , \frac{1}{6} , \frac{1}{6} , \frac{1}{6} , \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

(3) トランプを引いたときの数の事象系

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 1 , 2 , \dots , K \\ \frac{1}{13} , \frac{1}{13} , \dots , \frac{1}{13} \end{array} \right\}$$

# 練習

次の事象系を形式的に示せ。

(1) トランプを引いたときのカードのマークの事象系

(2) 26文字のアルファベットと空白文字が書かれた、27個の玉が袋に入っている。その袋から1つの玉をとりだしす事象系。

# 事象系の平均情報量

## 定義(エントロピー)

事象系  $X$  のすべての事象に対して、その情報量の平均をとったものを**平均情報量**または**エントロピー**という。

ある事象系  $X$  が以下のように与えられるとする。

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & , & x_2 & , \dots , & x_n \\ P(x_1) & , & P(x_2) & , \dots , & P(x_n) \end{array} \right\}$$

このとき、平均情報量  $H(X)$  は自己情報量を元に以下のように表される。

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{x \in X} P(x) i(x) \\ &= - \sum_{x \in X} P(x) \log P(x) \end{aligned}$$

# 自己情報量と平均情報量

自己情報量は事象に対して定義され、  
平均情報量は事象系(事象の集合)に対して定義される。

事象 → 自己情報量

事象系  
(情報源) → 平均情報量  
(エントロピー)

# 平均情報量の計算例

$$(1) \quad C = \left\{ \begin{array}{cc} \text{表} & , & \text{裏} \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad H(C) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2$$
$$= 1$$

$$(2) \quad D = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

$$H(D) = -\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6}$$
$$= 6 \times \frac{1}{6} \log_2 6$$
$$= \log_2 6$$
$$= 2.585 \dots$$

# 練習1

次の確率事象系(情報源)の平均情報量(エントロピー)を求めよ。)

(1)

$$A = \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2 \\ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

(2)

$$B = \left\{ \begin{array}{l} b_1, b_2, b_3 \\ \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10} \end{array} \right\}$$

(3)  $C = \left\{ \begin{array}{l} c_1 \text{ さいころを振って1、または4の目} \\ c_2 \text{ さいころを振って1、4以外の目} \end{array} \right\}$

## 練習2

次の事象系のエントロピーを求めよ。

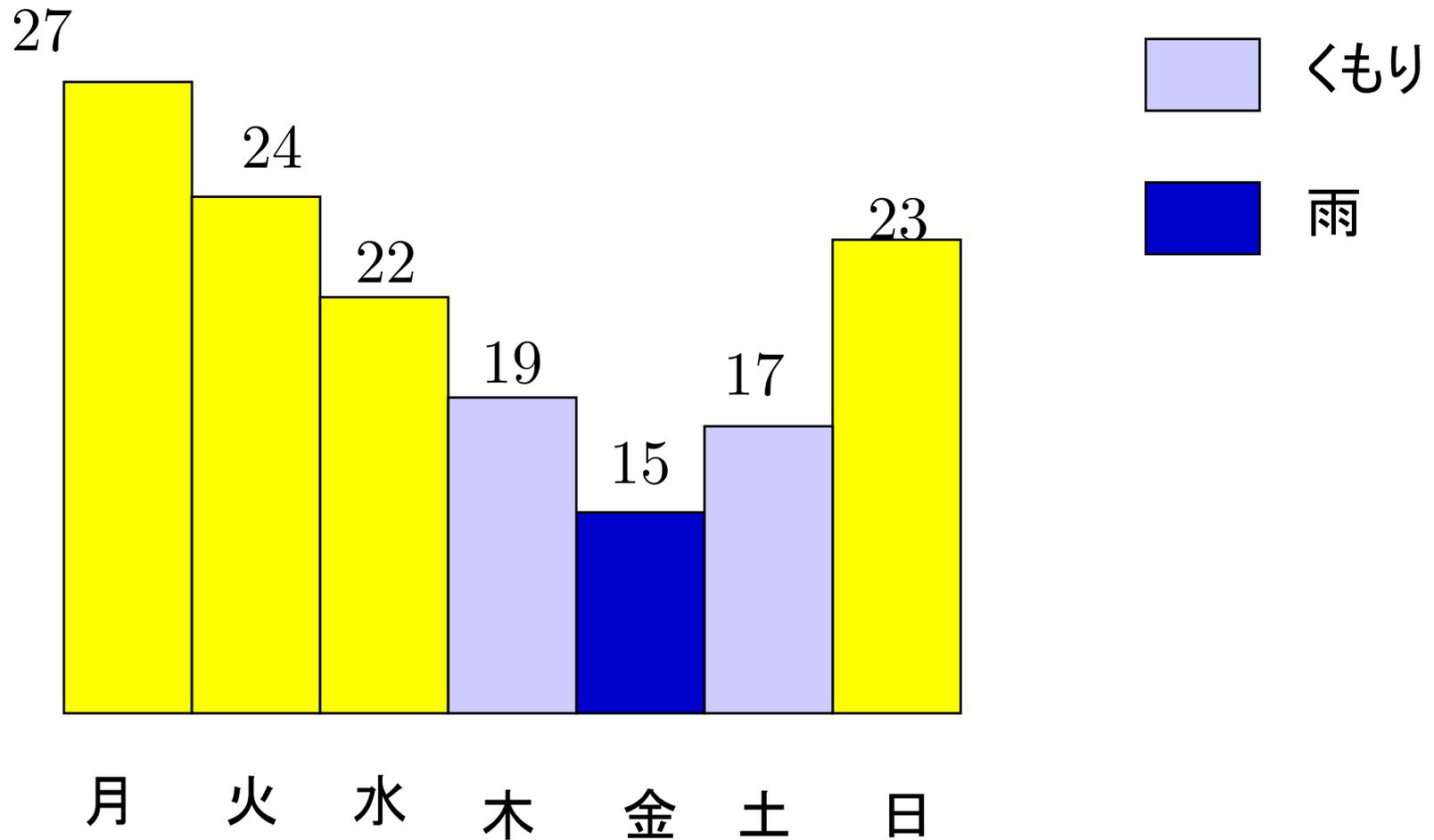
(1) トランプを引いたときのカードのマークの事象系

(2) 26文字のアルファベットと空白文字が書かれた、27個の玉が袋に入っている。その袋から1つの玉をとりだす事象系。

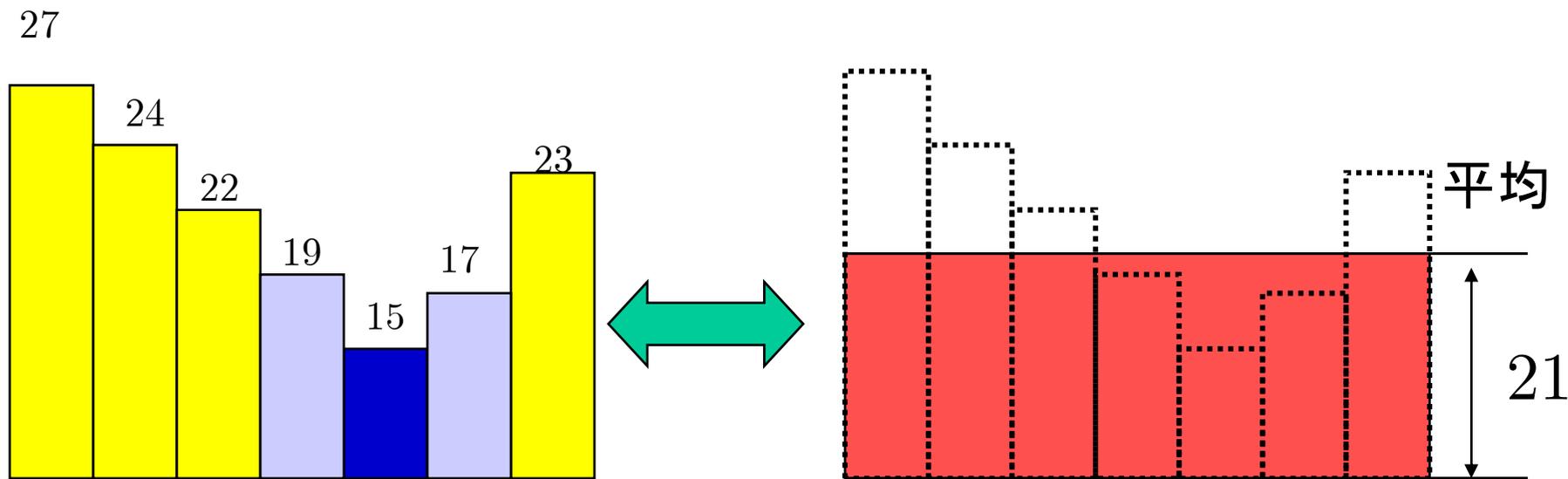
## 補足：平均（期待値）の話

# 期待値の式

1週間の間での平均気温を求めたい。



# 単純平均

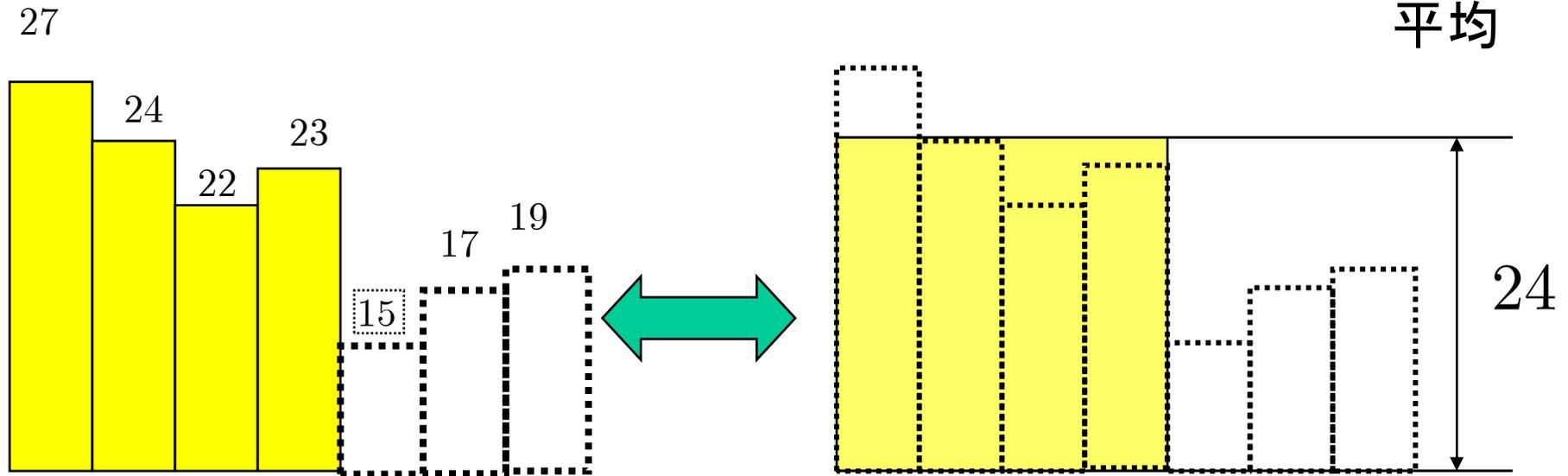


$$\bar{T} = \frac{27 + 24 + 22 + 19 + 15 + 17 + 23}{7}$$
$$= 21$$

# 晴れの平均気温

木と日を交換

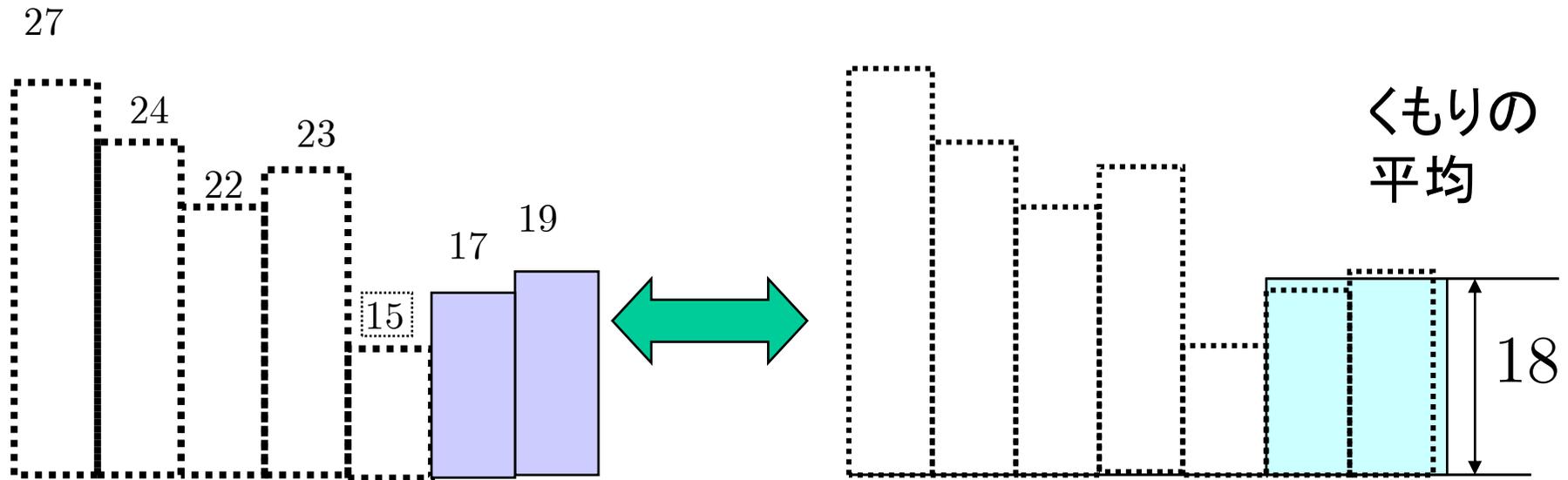
晴れの  
平均



面積が等しい

$$\begin{aligned}\overline{T}_f &= \frac{27 + 24 + 22 + 23}{4} \\ &= 24\end{aligned}$$

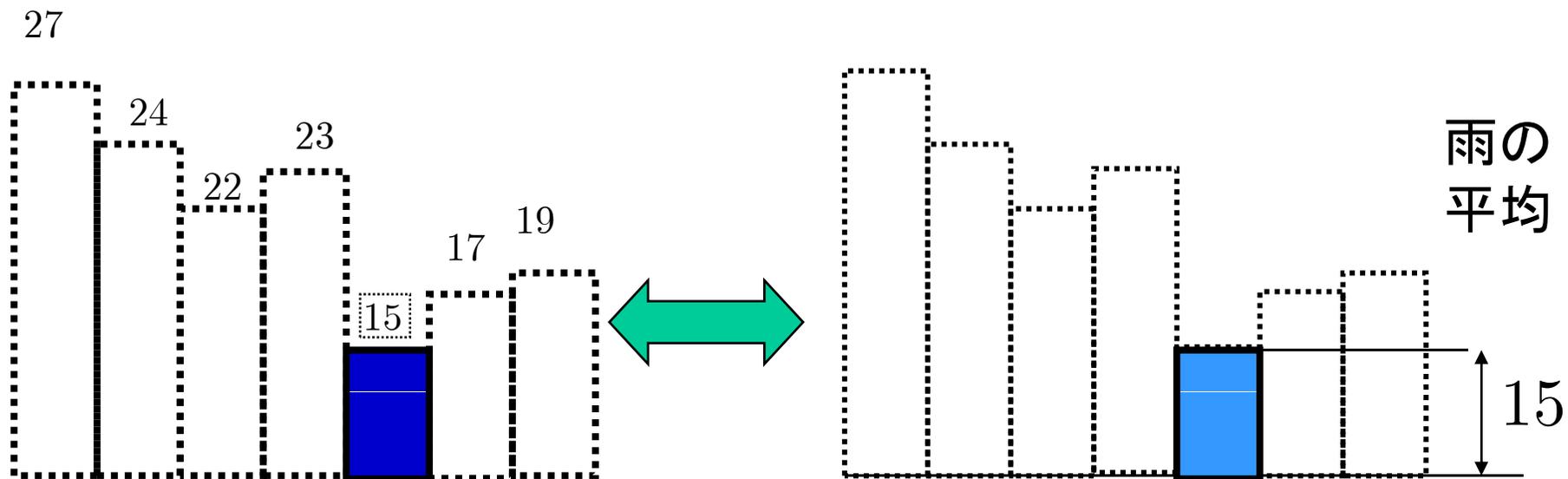
# 曇りの平均気温



面積が等しい

$$\begin{aligned}\overline{T}_c &= \frac{17 + 19}{2} \\ &= 18\end{aligned}$$

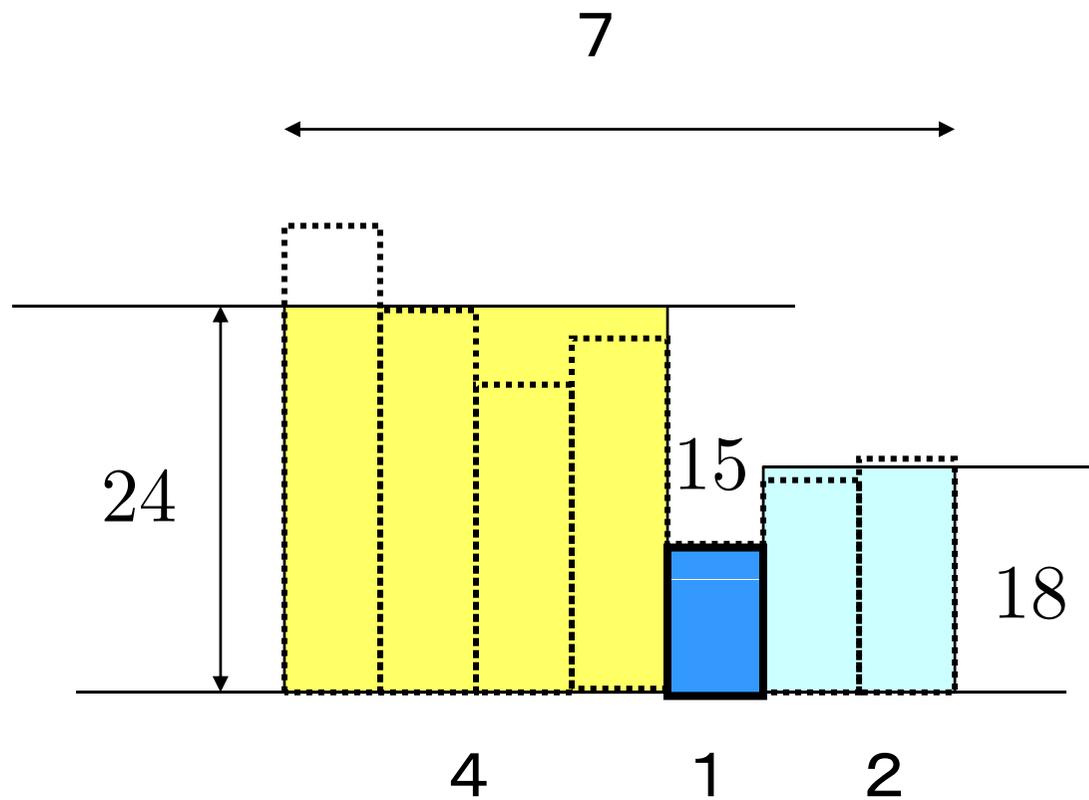
# 雨の平均気温



面積が等しい

$$\begin{aligned}\overline{T}_r &= \frac{15}{1} \\ &= 15\end{aligned}$$

# 確率

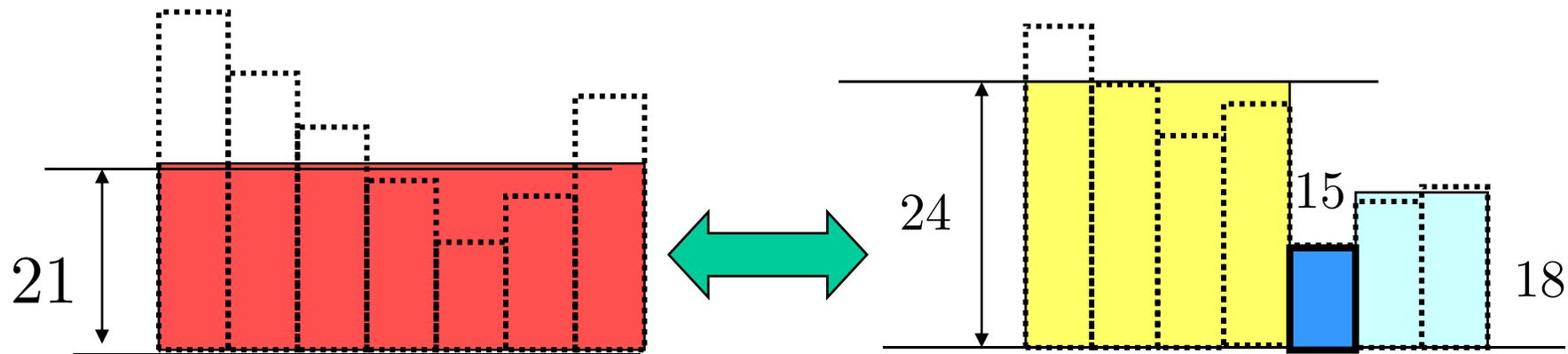


晴れの確率:  $P_f = \frac{4}{7}$

雨の確率:  $P_r = \frac{1}{7}$

曇りの確率:  $P_c = \frac{2}{7}$

# 単純平均と期待値の関係



面積が等しい

$$\begin{aligned}
 \bar{T} &= P_f \bar{T}_f + P_r \bar{T}_r + P_c \bar{T}_c \\
 &= \frac{4}{7} \cdot \frac{27 + 24 + 22 + 23}{4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{15}{1} + \frac{2}{7} \cdot \frac{19 + 17}{2} \\
 &= \frac{27 + 24 + 22 + 19 + 15 + 17 + 23}{7} \\
 &= 21
 \end{aligned}$$

## 2事象の事象系の平均情報量(重要)

ある事象系  $X$  が以下のように与えられるとする。

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x, \bar{x} \\ p, 1-p \end{array} \right\}$$

引数が、事象系

このとき、エントロピーは次式となる。

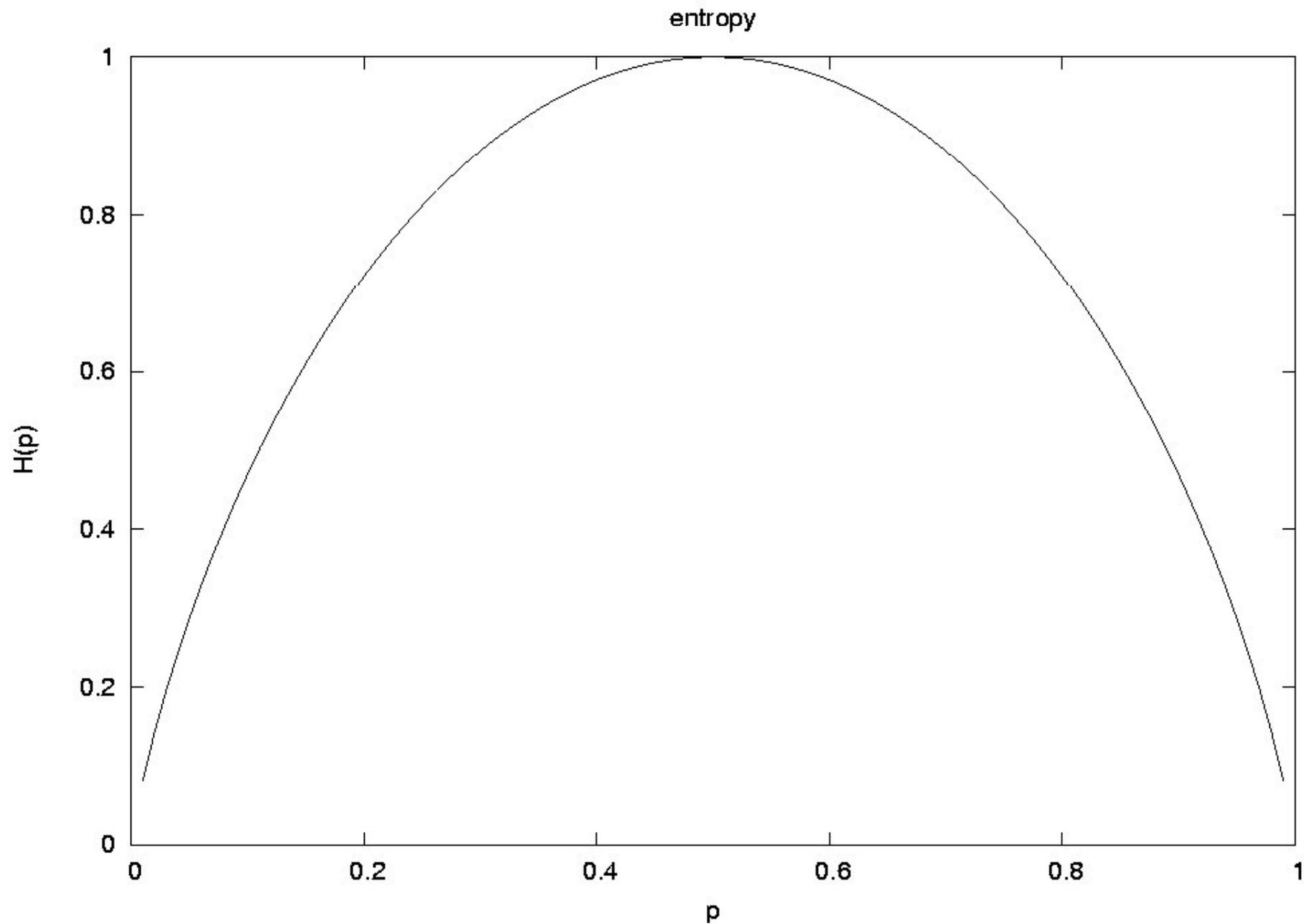
$$H(X) = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

この形の事象系は非常によく用いられ、この右辺の形の関数をエントロピー関数といい以下のように表す。

$$\mathcal{H}(p) \equiv -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

引数が、数

# エントロピー関数の外形 $\mathcal{H}(p)$



# 具体例1: 文書の情報量

## (1 記号あたりの平均情報量の意味)

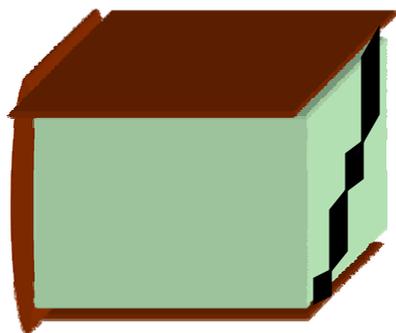
アルファベット  $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$  に対して、  
個々の記号の出現確率を考えよう。

記号  $\alpha \in \mathcal{A}$  の出現する確率を  $P(\alpha)$  と書く。

例えば、 $P(a)$  :  $a$  の現れる確率

$P(b)$  :  $b$  の現れる確率

辞書



このとき、一般の英文において、各記号の出現  
確率は異なる。すなわち、以下である。

$$P(a) \neq P(b) \neq \dots \neq P(z) \neq \frac{1}{26}$$

まず、アルファベット  $A = \{a, b, c, \dots, z\}$  中の文字を用いた文書の情報量を考える。

今、 $A$  の  $n$  個の文字からなる英文

$$S = s_1 s_2 \cdots s_n$$

出現確率に基づく事象とみなせることに注意する。

の情報量を  $I(S)$  とする。

$I(S)$  は各記号が  $S$  中出现する自己情報量の総和である。

$$I(S) = \sum_{i=1}^n i(s_i)$$

事象に対する  
確率の逆数の対数

今度は逆に、情報量  $I(S)$  を持つ事象を文書  $S$  で表すことを考える。

まず、アルファベットの(1記号あたりの)平均情報量(エントロピー)が以下の式で表される。

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A}) &= \sum_{\alpha=a}^z \{P(\alpha) \times i(\alpha)\} \\ &= P(a)i(a) + P(b)i(b) + \dots + P(z)i(z) \\ &= -P(a) \log P(a) - P(b) \log P(b) - \dots - P(z) \log P(z) \\ &= -\sum_{\alpha=a}^z P(\alpha) \log P(\alpha) \quad [\text{bit/記号}] \end{aligned}$$

よって、文書  $S$  中に含まれる文字数の期待値  $\bar{n}$  は次式で求められる。

$$\bar{n}[\text{記号}] = \frac{I(S)[\text{bit}]}{H(\mathcal{A})[\text{bit} / \text{記号}]}$$

したがって、文書の長さは情報源  $\mathcal{A}$  の1記号あたりの平均情報量(エントロピー)  $H(\mathcal{A})$  を”単位”とした情報量で表される。

また、情報源  $\mathcal{A}$  の長さ  $n$  の文書(事象)の平均情報量  $\bar{I}(S)$  に関して次式が成り立つ。

$$\bar{I}(S)[\text{bit}] = n[\text{記号}] \times H(\mathcal{A})[\text{bit} / \text{記号}]$$

# 練習1

次の事象系のエントロピー(平均情報量)を求めよ。

$$(1) \quad A = \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & , & a_2 & , & a_3 \\ \frac{1}{5} & , & \frac{2}{5} & , & \frac{2}{5} \end{array} \right\}$$

$$(2) \quad B = \left\{ \begin{array}{cccc} b_1 & , & b_2 & , & b_3 & , & b_4 \\ \frac{1}{9} & , & \frac{2}{9} & , & \frac{2}{9} & , & \frac{5}{9} \end{array} \right\}$$

## 練習2

情報源(事象系)から生成された文字列の自己情報量を求めよ。

$$(1) \quad A = \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & , & a_2 & , & a_3 \\ \frac{1}{5} & , & \frac{2}{5} & , & \frac{2}{5} \end{array} \right\}$$

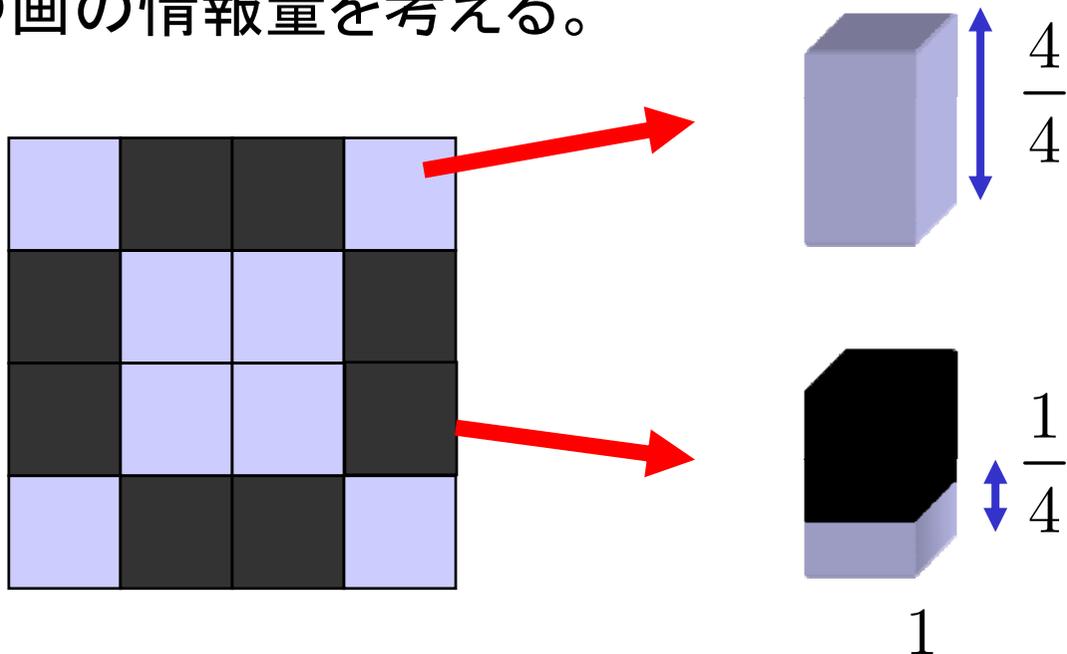
から生成された、文字列  $s_1 = a_3 a_2 a_1 a_3$  の自己情報量  $I(s_1)$

$$(2) \quad B = \left\{ \begin{array}{cccc} b_1 & , & b_2 & , & b_3 & , & b_4 \\ \frac{1}{9} & , & \frac{2}{9} & , & \frac{2}{9} & , & \frac{5}{9} \end{array} \right\}$$

から生成された、文字列  $s_2 = b_3 b_4 b_4 b_1 b_2$  の自己情報量  $I(s_2)$

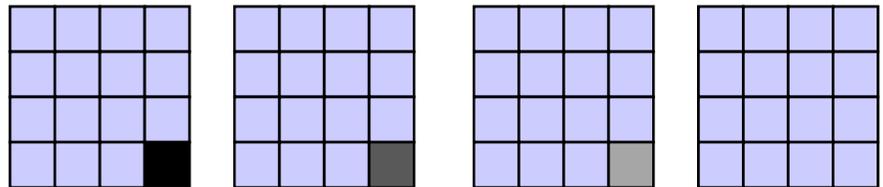
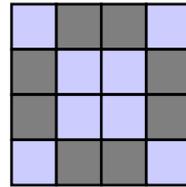
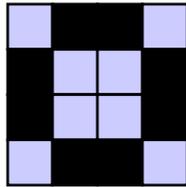
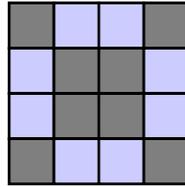
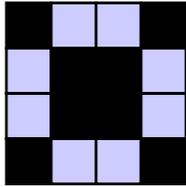
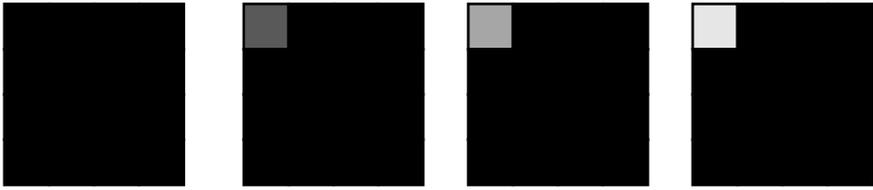
## 具体例2: 画像の情報量

4×4の画素数を持ち、個々の画素が4階調の輝度値を持つ画の情報量を考える。



各画素がある輝度値を持つ確率を、 $\frac{1}{4}$ とする。このとき、この画像が持つ情報量 $I(\text{画})$ は次式で表される。

$$I(\text{画}) = \sum_{j=1}^{16} i(\text{画素}_j) = 16 \times \log 4 = 32[\text{bit}] = 4[\text{byte}]$$



前のスライドでは、輝度値が全ての画素で確率が均等であると仮定してあった。

実は、風景画、人物画等では、画素における輝度値の出現確率は一様ではない。

このような場合、より少ない情報量しか持たない。

すなわち、確率が一様でない場合には、1画素あたりの平均情報量は、一様な場合より小さくなる。

# 練習

下の画像の自己情報量を求めよ。ただし、各画素の階調値はすべて均等に現れるのものとする。

(1)

$256 \times 256$  の画素で、各画素が 16 階調の白黒画像の自己情報量を求めよ。

(1)

$256 \times 256$  の画素のカラー画像の自己情報量を求めよ。ただし、1画素は赤、緑、青(RGB)の各色で表され、各色はそれぞれ16階調で表されるものとする。