

通信路(7章)

1

通信路のモデル

送信者

受信者

通信路

送信アルファベット

受信アルファベット  
 $m \neq n$  でもよい。

2

イメージ

通信路

3

通信路

4

通信路線図

送信アルファベット

受信アルファベット

5

通信路行列

送信アルファベット

受信アルファベット

6

通信路行列の意味

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$t_{ij} = P(b_j | a_i) = P(a_i \rightarrow b_j)$$

通信路行列の要素

$a_i$  を送る条件の下で、 $b_j$  が受信される確率

$a_i$  を送信したら、 $b_j$  が受信される確率

通信路行列の関係式

$$\begin{cases} \forall i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m & 0 \leq t_{ij} \leq 1 \\ \forall i, 1 \leq i \leq n & \sum_{j=1}^m t_{ij} = 1 \end{cases}$$

確率の式。  
(行ベクトルが確率ベクトル)

7

通信路例1(2元対称通信路)

$A = \{0, 1\}$   $B = \{0\text{-bar}, 1\text{-bar}\}$   $p$ : 誤り確率

$$T_s^2 = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

応用上重要。  
誤り確率により、対称的に送信記号が変化する。

8

通信路例2(2元対称消失通信路)

$A = \{0, 1\}$   $B = \{0\text{-bar}, X, 1\text{-bar}\}$   $p_e$ : 誤り確率  $p_x$ : 消失確率

Xは消失を意味する記号。

応用上重要。  
送信記号の消失と誤りの両方が起こる。

$$T_X^2 = \begin{bmatrix} 1-p_x-p_e & p_x & p_e \\ p_e & p_x & 1-p_x-p_e \end{bmatrix}$$

9

練習

次の通信路線図で表されている通信路の、通信路行列を求めよ。

(1)

(2)

10

練習2

次の通信路行列で表されている通信路の通信路線図を示せ。

(1)

$$A = \{a, b, c\} \quad B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \quad T_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1-p-q & p & 0 & q \\ p & 1-p-q & q & 0 \\ 0 & p & 1-p-q & q \\ q & 0 & p & 1-p-q \end{bmatrix}$$

11

通信路での確率の関係1  
(全確率の公式)

通信路を通して受信される記号の受信確率は、送信記号の生成確率と通信路の確率的振る舞いで定まる。

$$\begin{aligned} \forall j, 1 \leq j \leq m, \\ P(b_j) &= \sum_{i=1}^n P(b_j | a_i) P(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(a_i) P(a_i \rightarrow b_j) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i t_{ij} \end{aligned}$$

12

**証明**

1

$b_j$  が受信される全ての可能性(経路)を考えて総和をとる。

図より、成立する。

QED <sub>13</sub>

**別証明**

結合確率と条件付き確率の関係式。

(1)  $P(a_i, b_j) = P(b_j | a_i)P(a_i)$

結合確率: 事象  $a_i$  が起こりかつ事象  $b_j$  が起こる確率。  
2つの事象が同時に起こる確率。

条件付き確率: 事象  $a_i$  が起こったとしたときに事象  $b_j$  が起こる確率。

結合確率による確率の計算

(2)  $P(b_j) = \sum_i P(a_i, b_j)$

結合確率を片方の事象系において総和をとる。

(1)、(2)より成り立つ。

QED <sub>14</sub>

**通信路での確率の関係2 (ベーズの定理)**

$$\forall i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

$$P(a_i | b_j) = \frac{P(b_j | a_i)P(a_i)}{\sum_{k=1}^n P(b_j | a_k)P(a_k)}$$

通信路を通して記号  $b_j$  が受信されたとき、送信側で記号  $a_i$  を送っている確率が計算できることを表す式。通信路の性質と送信アルファベットの発生確率は既知であることに注意する。

15

**証明**

結合確率の式

$$P(a_i, b_j) = P(b_j | a_i)P(a_i) = P(a_i | b_j)P(b_j)$$

$$\therefore P(a_i | b_j) = \frac{P(a_i, b_j)}{P(b_j)} = \frac{P(b_j | a_i)P(a_i)}{P(b_j)}$$

全確率の式を適用する。

$$\therefore P(a_i | b_j) = \frac{P(a_i, b_j)}{\sum_{k=1}^n P(b_j | a_k)P(a_k)} = \frac{P(b_j | a_i)P(a_i)}{\sum_{k=1}^n P(b_j | a_k)P(a_k)}$$

QED <sub>16</sub>

**通信路行列と確率**

$$\mathbf{P}_A = (P(a_1), \dots, P(a_n)) \quad \mathbf{P}_B = (P(b_1), \dots, P(b_m))$$

として、次式で表される。

$$\mathbf{P}_B = \mathbf{P}_A \mathbf{T}$$

$$(P(b_1), \dots, P(b_m)) = (P(a_1), \dots, P(a_n)) \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nm} \end{bmatrix}$$

情報理論では、行ベクトル(横ベクトル)が確率ベクトルになるように扱うことが多い。

17

**別表現**

転地を行うと、左右が反転することに注意

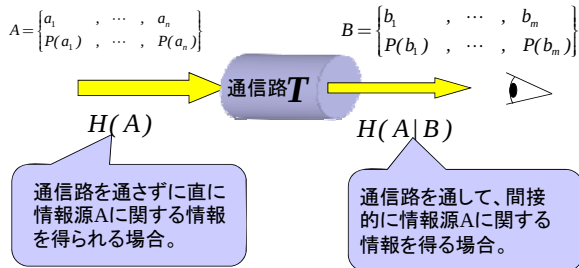
$${}^t \mathbf{P}_B = {}^t \mathbf{T} {}^t \mathbf{P}_A$$

$$\begin{bmatrix} P(b_1) \\ \vdots \\ P(b_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1m} & \cdots & t_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{bmatrix}$$

線形代数等では、列ベクトルを多く扱う。これらを混同せずに扱う必要がある。

18

### 通信路で送信される情報量 (相互情報量)



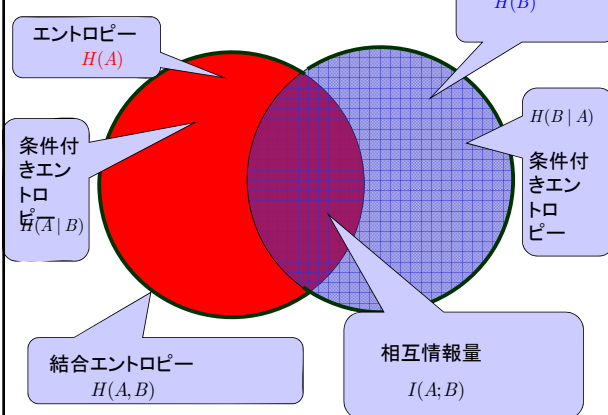
19

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B)$$

伝送される情報量は、相互情報量として求められる。

20

### 様々なエントロピー(復習)



$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 H(A|B) &= \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A|\beta) \\
 &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|\beta) \log P(\alpha|\beta) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha|\beta)
 \end{aligned}$$

$$H(B) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \log P(\beta)$$

$$\begin{aligned}
 H(B|A) &= \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) \log P(\beta|\alpha) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta|\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(A, B) &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) \\
 &= H(A) + H(B) - I(A; B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I(A; B) &= H(A) - H(A|B) \\
 &= H(B) - H(B|A) \\
 &= H(A) + H(B) - H(A, B)
 \end{aligned}$$

22

### 相互情報量の確率表現

$$\begin{aligned}
 I(A; B) &= H(A) - H(A|B) \\
 &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) - \left[ -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha|\beta) \right] \\
 &= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha) + \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha|\beta) \\
 &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log \frac{P(\alpha|\beta)}{P(\alpha)} \\
 &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log \frac{P(\alpha, \beta)}{P(\alpha)P(\beta)}
 \end{aligned}$$

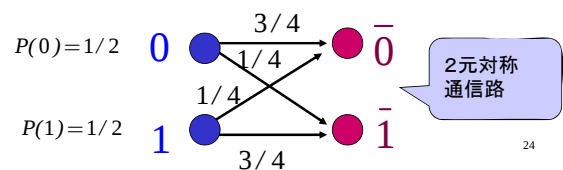
23

### 例1

情報源  $A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\}$  を

通信路行列  $T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$  の通信路で

伝送するとき、受信される情報源  $B = \left\{ \begin{matrix} \bar{0} & \bar{1} \\ P(\bar{0}) & P(\bar{1}) \end{matrix} \right\}$  と送信元の情報源の相互情報量  $I(A; B)$  を求めよ。



24

(計算例)

まず、受信記号  $B = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  の生成確率  $P(\bar{0}), P(\bar{1})$  を求める。

$$P_B = P_A T$$

$$\therefore (P(\bar{0}), P(\bar{1})) = (P(0), P(1))T$$

$$\therefore (P(\bar{0}), P(\bar{1})) = (1/2, 1/2) \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = (1/2, 1/2)$$

次に、結合確率を求める。

$$P(0, \bar{0}) = P(\bar{0}|0)P(0) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(0, \bar{1}) = P(\bar{1}|0)P(0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(1, \bar{0}) = P(\bar{0}|1)P(1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(1, \bar{1}) = P(\bar{1}|1)P(1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

0を送信

1を送信

25

以上より、相互情報量を求める。

$$\begin{aligned} I(A; B) &= \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log \frac{P(\alpha, \beta)}{P(\alpha)P(\beta)} \\ &= P(0, \bar{0}) \log \frac{P(0, \bar{0})}{P(0)P(\bar{0})} + P(0, \bar{1}) \log \frac{P(0, \bar{1})}{P(0)P(\bar{1})} + \\ &\quad P(1, \bar{0}) \log \frac{P(1, \bar{0})}{P(1)P(\bar{0})} + P(1, \bar{1}) \log \frac{P(1, \bar{1})}{P(1)P(\bar{1})} \\ &= \frac{3}{8} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \log \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{4} \log 3 - 1 \simeq 0.189 \end{aligned}$$

26

## 練習

情報源  $A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{array} \right\}$  を通信路行列  $T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$  の通信路で伝送するとき、受信される情報源  $B = \left\{ \begin{array}{cc} \bar{0} & \bar{1} \\ P(\bar{0}) & P(\bar{1}) \end{array} \right\}$  と送信元の情報源の相互情報量  $I(A; B)$  を求めよ。

27

## 通信路容量(重要)

(定義): 通信路容量

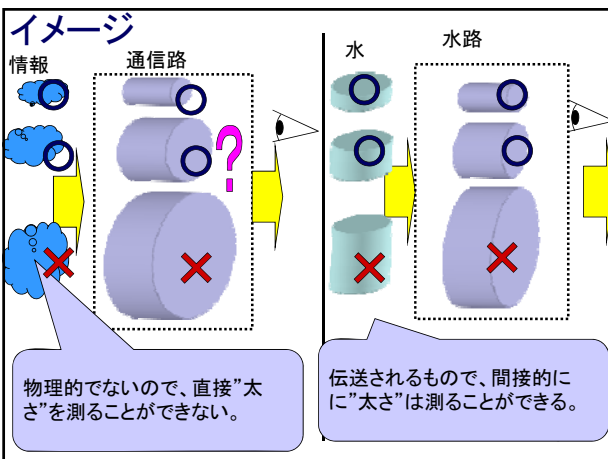
通信路  $T$  に対して、次式で表される値を通信路容量という。

$$C = \max_A I(A; B)$$

ここで、 $\max$  は送信情報源の確率的な組み合わせ全ての中で最大値を選ぶ。

通信路の"太さ"を表す式。情報を伝送してみて最大の情報量で定義する。

28



## 例

通信路行列  $T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$  の通信路の通信路容量  $C_T$  を求めよ。(誤り確率  $p = 1/4$  の2元対称通信路)

(解答例)

送信情報源を  $A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ p_A & 1-p_A \end{array} \right\}$  とし、受信情報源を  $B = \left\{ \begin{array}{cc} \bar{0} & \bar{1} \\ p_B & 1-p_B \end{array} \right\}$  とする。また、 $P_A = (p_A, 1-p_A), P_B = (p_B, 1-p_B)$  とする。

30

まず、受信記号の生起確率を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B &= \mathbf{P}_A \mathbf{T} \\ \therefore (p_B, 1-p_B) &= (p_A, 1-p_A) \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \\ \therefore (p_B, 1-p_B) &= \left(\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2}, \frac{3}{4} - \frac{p_A}{2}\right) \\ \therefore p_B &= \frac{1}{4} + \frac{p_A}{2} = \frac{1+p_A}{4} \end{aligned}$$

次に、結合確率は求める。

$$\begin{aligned} P(0, \bar{0}) &= P(\bar{0}|0)P(0) = \frac{3}{4}p_A \\ P(0, \bar{1}) &= P(\bar{1}|0)P(0) = \frac{1}{4}p_A \end{aligned}$$

31

$$\begin{aligned} P(1, \bar{0}) &= P(\bar{0}|1)P(1) = \frac{1}{4}(1-p_A) \\ P(1, \bar{1}) &= P(\bar{1}|1)P(1) = \frac{3}{4}(1-p_A) \end{aligned}$$

条件付きエントロピー  $H(B|A)$  を求める。

$$\begin{aligned} H(B|A) &= - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta|\alpha) \\ &= \frac{3}{4}p_A \log \frac{4}{3} + \frac{1}{4}p_A \log 4 + \frac{1}{4}(1-p_A) \log 4 + \frac{3}{4}(1-p_A) \log \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{4} \log 4 + \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} \\ &= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \mathcal{H}(p) \end{aligned}$$

通信路の誤り確率だけで定まる。  
 $\mathcal{H}(p)$  は2元のエントロピー関数  
 $\mathcal{H}(p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$

32

従って、相互情報量  $I(A; B)$  は次式で求められる。

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H(B) - H(B|A) \\ &= \mathcal{H}(p_B) - \mathcal{H}(p) \\ &= \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p_A\right) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

よって、通信路容量  $C_T$  は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} C_T &= \max_A I(A; B) \\ &= \max_{p_A \in [0, 1]} \left\{ \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2}\right) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \right\} \\ &= \max_{p_A \in [0, 1]} \left\{ \mathcal{H}\left(\frac{1}{4} + \frac{p_A}{2}\right) \right\} - \mathcal{H}\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} \log 4 + \frac{3}{4} \log \frac{4}{3}\right) \simeq 0.189 \end{aligned}$$

ここで、最大値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{p_A}{2} &= \frac{1}{2} \\ \therefore p_A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

のときに実現される。また、このときの  $p_B$  は以下である。

$$p_B = \frac{1}{4} + \frac{p_A}{2} = \frac{1}{2}$$

33

## 練習

通信路行列  $T = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$  の通信路の通信路容量  $C_T$  を求めよ。

34

## 2元対称通信路の通信路容量

### 2元対称通信路の通信路容量

誤り確率  $p$  の2元対称通信路の通信路容量  $C$  は次式で求められる。

$$C = 1 - \mathcal{H}(p)$$

通信路容量が達成されるとき、送信、受信の各確率は以下で表される。

$$P_A = (P(0), P(1)) = (1/2, 1/2)$$

$$P_B = (P(\bar{0}), P(\bar{1})) = (1/2, 1/2)$$

対称性より、送信を均等に行うと、受信も均等になる。  
(式で計算して確かめると良い。)

35

証明 通信路行列は、次式のようになる。

$$T_p = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

例題と同様にして以下のように求められる。

$$(p_B, 1-p_B) = (p_A, 1-p_A) \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$\therefore p_B = p_A + p - 2p_A p$$

$$C_T = \max_A I(A; B)$$

$$= \max_{p_A \in [0, 1]} \{ \mathcal{H}(p_B) - \mathcal{H}(p) \}$$

$$= \max_{p_A \in [0, 1]} \{ \mathcal{H}(p_B) \} - \mathcal{H}(p)$$

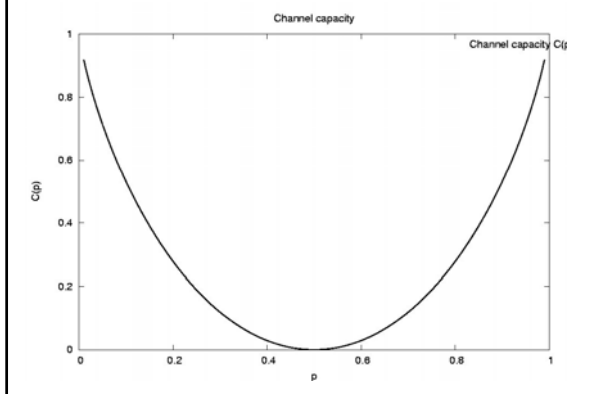
$$= 1 - \mathcal{H}(p)$$

$$\begin{aligned} \therefore (p_A = 1/2) \\ \rightarrow p_B = 1/2 \\ \rightarrow \mathcal{H}(p_B) = 1 \end{aligned}$$

QED

36

## 2元対称通信路の通信路容量(概形)



## 雑音のない通信路

(定義) 雑音の無い通信路

受信記号から送信記号が一意に確定できるような通信路を**雑音の無い通信路**という。

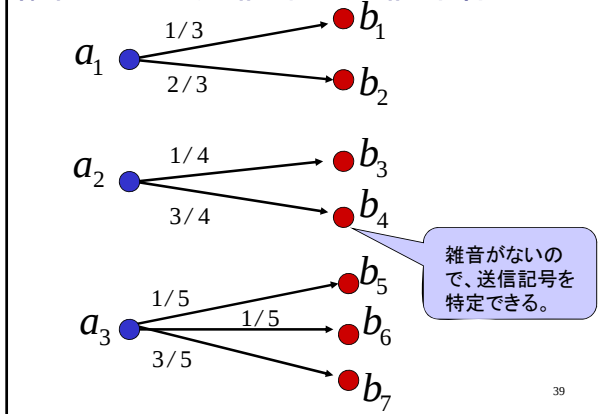
雑音の無い通信路の通信路行列

$$T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

列ベクトルが全て、1要素以外0。  
(行ベクトルは確率ベクトル)

38

## 雑音の無い通信路の通信路線図



39

## 雑音のない通信路の通信路容量

雑音の無い通信路では、受信記号を条件とする条件付き確率が必ず1または0となる。すなわち、

$$\forall \alpha \in A, \beta \in B \quad P(\alpha | \beta) = 1 \text{ or } 0$$

$$\therefore \forall \beta \in B \quad H(A | \beta) = - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | \beta) \log P(\alpha | \beta) = 0$$

$$\therefore H(A | B) = \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A | \beta) = 0$$

よって、

$$I(A; B) = H(A) - H(A | B) = H(A)$$

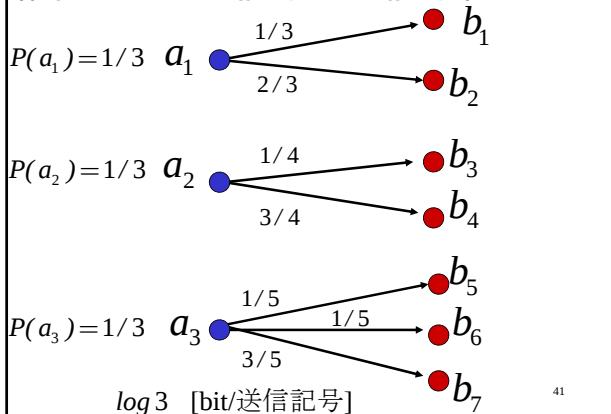
したがって、

$$C = \max_A I(A; B) = \max_A H(A) = \log n$$

ただし、 $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n)$

40

## 雑音の無い通信路の通信路容量例



41

## 確定的通信路

(定義) 確定的通信路

各送信記号が唯一つの受信記号に伝送されるような通信路を**確定的通信路**という。

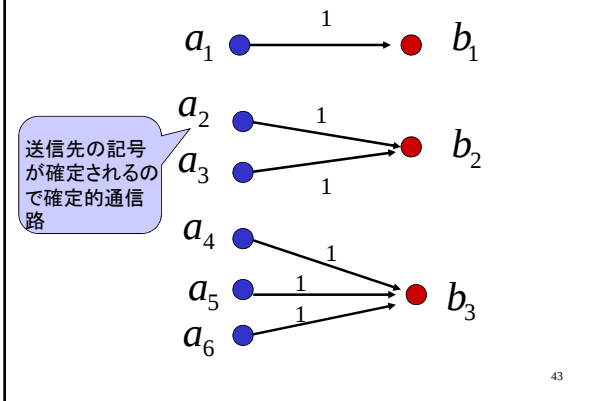
確定的通信路の通信路行列

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行ベクトルが全て、1要素以外0。  
(行ベクトルは確率ベクトル)

42

### 確定的通信路の通信路線図



### 確定的通信路の通信路容量

確定的通信路では、送信記号を条件とする条件付き確率が必ず1または0となる。すなわち、

順序に注意

$$\forall \alpha \in A, \beta \in B \quad P(\beta|\alpha) = 1 \text{ or } 0$$

$$\therefore \forall \alpha \in A \quad H(B|\alpha) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) \log P(\beta|\alpha) = 0$$

$$\therefore H(B|A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha) = 0$$

よって、

$$I(A;B) = H(B) - H(B|A) = H(B)$$

したがって、

$$C = \max_A I(A;B) = \max_A H(B) = \log m$$

ただし、 $P(b_1) = P(b_2) = \dots = P(b_m)$

受信側の確率が均等になるように、送信記号の確率選べる。

### 確定的通信路の通信路容量例

