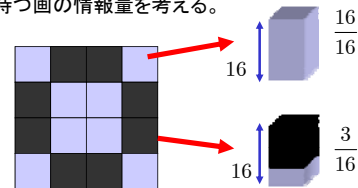


平均情報量の性質(3章)

1

(参考) 画像の情報量

4×4の画素数を持ち、個々の画素が16階調の輝度値を持つ画の情報量を考える。



このとき、各画素がある輝度値を持つ確率は、 $\frac{1}{16}$ である。よって、この画像が持つ情報量 $I(\text{画})$ は次式で表される。

$$I(\text{画}) = \sum_{j=1}^{16} i(\text{画素}_j) = 16 \times \log 16 = 64[\text{bit}] = 8[\text{byte}]$$

2

前のスライドでは、輝度値が全ての画素で確率が均等であると仮定してあった。
実は、風景画、人物画等では、画素における輝度値の出現確率が一律でないことがある。
このような場合、より少ない情報量しか持たない。
すなわち、確率が一律でない場合には、1画素あたりの平均情報量は、一律な場合より小さくなる。

3

練習

(1)

256×256 の画素で、各画素が 16 階調の白黒画像の自己情報量を求めよ。

(1)

256×256 の画素のカラー画像の自己情報量を求めよ。ただし、1画素は赤、緑、青(RGB)の各色で表され、各色はそれぞれ16階調で表されるものとする。

4

1記号あたりの平均情報量例

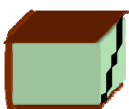
アルファベット $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$ に対して、個々の記号の出現確率を考えよう。

記号 $\alpha \in \mathcal{A}$ の出現する確率を $P(\alpha)$ と書く。

例えば、 $P(a)$: a の現れる確率

$P(b)$: b の現れる確率

辞書



このとき、一般の英文において、各記号の出現確率は異なる。すなわち、以下である。

$$P(a) \neq P(b) \neq \dots \neq P(z) \neq \frac{1}{26}$$

5

もちろん、アルファベット $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$ は一種の情報源とみなすことができる。

今、 $\mathcal{A}$ の n 個の文字からなる英文

$$S = s_1 s_2 \dots s_n$$

の情報量 $I(S)$ を考えよう。

$I(S)$ は各記号が S に出現する自己情報量の総和である。

$$I(S) = \sum_{i=1}^n i(s_i)$$

一方、 S の情報量の期待値 $\overline{I(S)}$ は、 n とエントロピーの積である。

$$\overline{I(S)} = nH(\mathcal{A})$$

6

以上のようなことを踏まえると、アルファベットの(1記号あたりの)平均情報量(エントロピー)が以下の式で表されることが確認できる。

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A}) &= \sum_{\alpha=a}^z \{P(\alpha) \times i(\alpha)\} \\ &= P(a)i(a) + P(b)i(b) + \cdots + P(z)i(z) \\ &= -P(a) \log P(a) - P(b) \log P(b) - \cdots - P(z) \log P(z) \\ &= -\sum_{\alpha=a}^z P(\alpha) \log P(\alpha) \quad [\text{bit/記号}] \end{aligned}$$

したがって、英文長は情報源 $\mathcal{A}$ のエントロピー $H(\mathcal{A})$ を"単位"とした情報量で表される。

7

練習

次の事象系のエントロピー(平均情報量)を求めよ。

(1) $A = \left\{ \begin{matrix} a_1 & , & a_2 & , & a_3 \\ \frac{1}{5} & , & \frac{2}{5} & , & \frac{2}{5} \end{matrix} \right\}$

(2) $B = \left\{ \begin{matrix} b_1 & , & b_2 & , & b_3 & , & b_4 \\ \frac{1}{9} & , & \frac{2}{9} & , & \frac{2}{9} & , & \frac{5}{9} \end{matrix} \right\}$

(3) C

「甲君はある1時間中、10分を休憩、20分を教科書読み、30分は計算するとする。この1時間中のある適当な時刻での甲君の行動から構成される事象系」

8

エントロピーの性質

事象系 $A = \left\{ \begin{matrix} a_1 & , & a_1 & , & \cdots & , & a_n \\ P(a_1) & , & P(a_1) & , & \cdots & , & P(a_1) \end{matrix} \right\}$

のエントロピーは次式で表される。

$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) = -\sum_{k=1}^n P(a_i) \log P(a_i)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

ある事象が必ず起きるとき。

$$a_1 = 1, a_2 = \cdots = a_n = 0$$

全ての事象が等確率のとき。

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$$

前のスライドの式を導出するために、次の2つの事象系を考える。

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_1 & , & a_1 & , & \cdots & , & a_n \\ P_1 & , & P_2 & , & \cdots & , & P_n \end{matrix} \right\}, \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$B = \left\{ \begin{matrix} b_1 & , & b_1 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{matrix} \right\}, \sum_{i=1}^n Q_i = 1$$

10

補題1 (lemma1)

$$-\sum_{i=1}^n P_i \log P_i \leq -\sum_{i=1}^n P_i \log Q_i$$

エントロピー

別の事象系の自己情報量を元の事象系の確率で平均する。

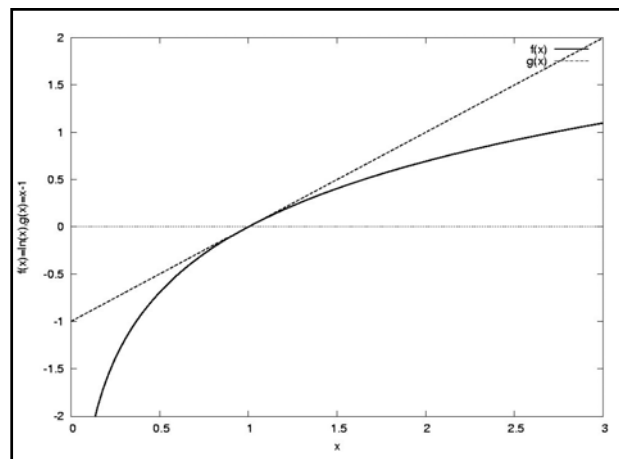
証明

$$\sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$

不等式の利用。

$$\ln x \leq x - 1$$

11



$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \ln \frac{Q_i}{P_i} \\
&\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n P_i \left(\frac{Q_i}{P_i} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n (Q_i - P_i) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n Q_i}_{=1} - \underbrace{\sum_{i=1}^n P_i}_{=1} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

この変形で、
 $x = \frac{Q_i}{P_i}$
 として $\ln$ 回不等式を利用する。

13

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n P_i \log \frac{Q_i}{P_i} &\leq 0 \\
\therefore \sum_{i=1}^n \left(P_i \log \frac{1}{P_i} - P_i \log \frac{1}{Q_i} \right) &\leq 0 \\
\therefore -\sum_{i=1}^n (P_i \log P_i) + \sum_{i=1}^n (P_i \log Q_i) &\leq 0 \\
\therefore -\sum_{i=1}^n (P_i \log P_i) &\leq -\sum_{i=1}^n (P_i \log Q_i)
\end{aligned}$$

QED

14

エントロピー最大となる情報源

定理1

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

証明

(左の不等号)

$$0 \leq P(a_i) \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{なので、}$$

$$H(A) = -\sum_{i=1}^n P(a_i) \log P(a_i) \geq 0$$

15

(右の不等号)

$$B = \left\{ \begin{matrix} b_1 & , & b_1 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} b_1 & , & b_1 & , & \cdots & , & b_n \\ \frac{1}{n} & , & \frac{1}{n} & , & \cdots & , & \frac{1}{n} \end{matrix} \right\}$$

とおく。補題1より、

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^n P_i \log P_i &\leq -\sum_{i=1}^n P_i \log Q_i \\
&= \sum_{i=1}^n P_i \log n \\
&= \log n \left(\sum_{i=1}^n P_i \right) \\
&= \log n
\end{aligned}$$

QED

16

練習

次の事象系のエントロピー(平均情報量)を求めよ。

(1)

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \end{Bmatrix}$$

$$A' = \begin{Bmatrix} a'_1 & , & a'_2 & , & a'_3 & , & a'_4 \\ \frac{1}{8} & , & \frac{1}{8} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$A'' = \begin{Bmatrix} a''_1 & , & a''_2 & , & a''_3 & , & a''_4 \\ \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

17

様々なエントロピー

複数の事象系が互いに関係している場合に、それぞれの事象系に関する様々なエントロピー(平均情報量)が定義できる。

次のようなゲームを考える。

サイコロゲーム:

「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

この勝ち負けに関する情報を2つの事象としてとらえる。

18

サイコロゲームの勝敗表

サイコロゲーム:「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

甲 \ 乙	1	2	3	4	5	6
1	△	○	○	○	○	○
2	×	△	○	○	○	○
3	×	×	△	○	○	○
4	×	×	×	△	○	○
5	×	×	×	×	△	○
6	×	×	×	×	×	△

甲

○: 勝ち
△: 引分け
×: 負け

19

サイコロゲームを2つの事象系として捕らえる。

事象系A: 甲の勝負に関する事象系

$$A = \left\{ \begin{array}{ccc} \circ & , & \triangle & , & \times \\ \frac{15}{36} & , & \frac{6}{36} & , & \frac{15}{36} \end{array} \right\}$$

この2つの事象系は独立ではなく、互いに密接に関連している。

事象系B: 甲のサイコロの目に関する事象系

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

20

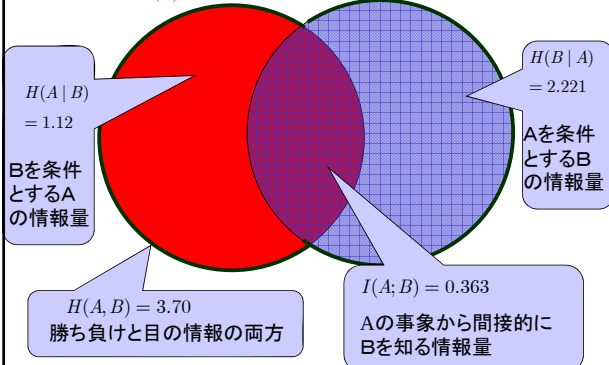
サイコロゲームにおける様々なエントロピー

甲の勝負の情報

$$H(A) = 1.483$$

甲の出目の情報

$$H(B) = 2.584$$



条件付エントロピー1

甲の出目の事象系を条件とする、甲の勝ち負けの事象系の平均情報量

条件付確率で定義されるエントロピー

$$H(A|B) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha|B) \log P(\alpha|B)$$

$$H(A|B) = \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A|B)$$

$$= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \sum_{\alpha \in A} P(\alpha|B) \log P(\alpha|B)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\alpha|B) \log P(\alpha|B)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha|B)$$

Bを条件とすることによって、情報源Aの情報量がBと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

条件付エントロピー2

甲の勝ち負けの事象系を条件とする甲の目の事象系の平均情報量

$$H(B|\alpha) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) \log P(\beta|\alpha)$$

$$H(B|A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta|\alpha) \log P(\beta|\alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\alpha|B) \log P(\beta|\alpha)$$

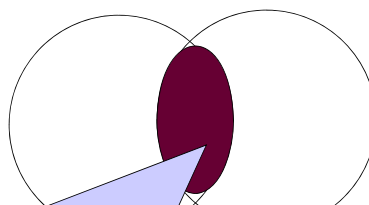
$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta|\alpha)$$

Aを条件とすることによって、情報源Bの情報量がAと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

23

相互情報量

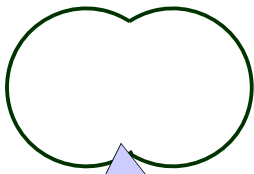
$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A) = I(B; A)$$



AとBが互いに関係している情報量。
Aを知ることによって、間接的にBに関する情報が得られる。同様に、Bを知ることによって、間接的にAの情報が得られる。これらは、等しい。

結合エントロピー

$$H(A, B) = - \sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta) = H(A) + H(B) - I(A; B)$$



α と β が同時に起こる確率。
結合確率。

$$\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) = 1$$

AとBがのすべての情報量。
Aだけの情報量と、Bだけの情報量を加えて、
関係する相互情報量を減ずる。

25

まず、2つの事象系のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned} H(A) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) \\ &= \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} + \frac{6}{36} \log \frac{36}{6} + \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} \\ &= \frac{5}{6} (\log 4 + \log 3 - \log 5) + \frac{1}{6} (\log 2 + \log 3) \\ &= \frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \\ &\simeq (1.833) + (1.585) - (1.93) \\ &= 1.4833 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(B) &= - \sum_{\beta \in B} P(\beta) \log P(\beta) \\ &= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 \\ &= \log 6 \\ &\simeq 2.5849 \dots \end{aligned}$$

26

次に、Bの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned} H(A | 1) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 1) \log P(\alpha | 1) \\ &= -P(\bigcirc | 1) \log P(\bigcirc | 1) - P(\triangle | 1) \log P(\triangle | 1) - P(\times | 1) \log P(\times | 1) \\ &= 0 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 2) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 2) \log P(\alpha | 2) \\ &= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 3) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 3) \log P(\alpha | 3) \\ &= \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} \end{aligned}$$

27

$$\begin{aligned} H(A | 4) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 4) \log P(\alpha | 4) \\ &= \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 5) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 5) \log P(\alpha | 5) \\ &= \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(A | 6) &= - \sum_{\alpha \in A} P(\alpha | 6) \log P(\alpha | 6) \\ &= \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \log 6 + 0 \end{aligned}$$

28

以上より、事象系Bを条件とする、条件付エントロピー $H(A | B)$ が求められる。

$$\begin{aligned} H(A | B) &= \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A | \beta) \\ &= \frac{1}{6} H(A | 1) + \frac{1}{6} H(A | 2) + \frac{1}{6} H(A | 3) + \frac{1}{6} H(A | 4) + \frac{1}{6} H(A | 5) + \frac{1}{6} H(A | 6) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \log 6 + \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{6} \log 6 + \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{6} \log \frac{6}{3} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{2}{6} \log \frac{6}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(3 \log 6 - \frac{5}{6} \log 5 - \frac{2}{3} \log 4 - \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{3} \log 2 \right) \\ &= \log 6 - \frac{5}{18} \log 5 - \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{5}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5 \\ &\simeq (0.444) + (1.321) - (0.645) \\ &= 1.12 \end{aligned}$$

29

今度は、逆にAの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$\begin{aligned} H(B | \bigcirc) &= - \sum_{\beta \in B} P(\beta | \bigcirc) \log P(\beta | \bigcirc) \\ &= -P(1 | \bigcirc) \log P(1 | \bigcirc) - P(2 | \bigcirc) \log P(2 | \bigcirc) - \dots - P(6 | \bigcirc) \log P(6 | \bigcirc) \\ &= 0 + \frac{1}{15} \log 15 + \frac{2}{15} \log \frac{15}{2} + \frac{3}{15} \log \frac{15}{3} + \frac{4}{15} \log \frac{15}{4} + \frac{5}{15} \log \frac{15}{5} \\ &= \log 15 - \frac{2}{15} \log 2 - \frac{3}{15} \log 3 - \frac{4}{15} \log 4 - \frac{5}{15} \log 5 \\ &= \frac{12}{15} \log 3 + \frac{10}{15} \log 5 - \frac{10}{15} \\ &= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

30

$$H(B|\Delta) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\Delta) \log P(\beta|\Delta)$$

$$= 6 \times \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \log 6$$

$$H(B|\times) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta|\times) \log P(\beta|\times)$$

$$= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}$$

以上より、事象系Aを条件とする、条件付エントロピーが求められる。

$$H(B|A)$$

$$H(B|A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B|\alpha)$$

$$= \frac{30}{36} \left(\frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \frac{5}{6} \log 3 + \frac{5}{9} \log 5 - \frac{7}{18}$$

$$\simeq (1.321) + (1.290) - (0.389)$$

$$= 2.221$$

31

$$H(A) - H(A|B)$$

$$= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \right) - \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5 \right)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5$$

$$H(B) - H(B|A)$$

$$= \log 6 - \left(\frac{5}{6} \log 3 + \frac{5}{9} \log 5 - \frac{7}{18} \right)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5$$

$$\therefore I(A; B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5$$

$$\simeq (1.389) + (0.264) - (1.290)$$

$$= 0.363$$

32

結合エントロピーを求めるためには、A、Bの積の事象系を考えても良い。サイコロゲームの勝敗表より以下の事象系が得られる。

$$(A, B) = \left\{ \begin{array}{cccccc} (\bigcirc, 1) & , & (\triangle, 1) & , & (\times, 1) & , & (\bigcirc, 2) & , & (\triangle, 2) & , & (\times, 2) & , \\ 0 & , & \frac{1}{36} & , & \frac{5}{36} & , & \frac{1}{36} & , & \frac{1}{36} & , & \frac{4}{36} & , \\ (\bigcirc, 3) & , & (\triangle, 3) & , & (\times, 3) & , & (\bigcirc, 4) & , & (\triangle, 4) & , & (\times, 4) & , \\ \frac{2}{36} & , & \frac{1}{36} & , & \frac{3}{36} & , & \frac{3}{36} & , & \frac{1}{36} & , & \frac{2}{36} & , \\ (\bigcirc, 5) & , & (\triangle, 5) & , & (\times, 5) & , & (\bigcirc, 6) & , & (\triangle, 6) & , & (\times, 6) & , \\ \frac{4}{36} & , & \frac{1}{36} & , & \frac{1}{36} & , & \frac{5}{36} & , & \frac{1}{36} & , & 0 & \end{array} \right\}$$

33

$$H(A, B) = -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\alpha, \beta)$$

$$= \frac{8}{36} \log 36 + \frac{4}{36} \log \frac{36}{2} + \frac{6}{36} \log \frac{36}{3} + \frac{8}{36} \log \frac{36}{4} + \frac{10}{36} \log \frac{36}{5}$$

$$= \frac{36}{36} \log 36 - \frac{1}{9} \log 2 - \frac{1}{6} \log 3 - \frac{2}{9} \log 4 - \frac{5}{18} \log 5$$

$$= \frac{13}{9} + \frac{11}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5$$

$$H(A, B) = H(A) + H(B) - I(A; B)$$

$$= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \right) + (\log 6) - \left(\frac{25}{18} + \frac{1}{6} \log 3 - \frac{5}{9} \log 5 \right)$$

$$= \frac{13}{9} + \frac{11}{6} \log 3 - \frac{5}{18} \log 5$$

34

練習

コインゲームを考える。

「甲と乙がそれぞれコインを投げる。
表より裏が強いとする。」

このゲームを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系 (コA):

「甲の勝負けを表す事象系」

事象系 (コB):

「甲の出したコインの裏表を表す事象系」

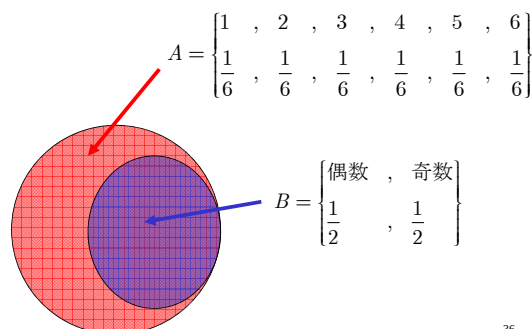
次の各種エントロピーを求めよ。

$$H(\text{コA}), H(\text{コB}), H(\text{コA}|\text{コB}), H(\text{コB}|\text{コA}), I(\text{コA}; \text{コB})$$

35

部分的な情報源

サイコロを投げて出た目に従って、以下の2つの情報源を考える。



36

$$H(A) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58[\text{bit}]$$

$$H(B) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1[\text{bit}]$$

$$H(A | \text{偶数}) = \frac{0}{1} + \frac{1}{3} \log 3 + \frac{0}{3} + \frac{1}{3} \log 3 + \frac{0}{5} + \frac{1}{3} \log 3 = \log 3$$

$$H(A | \text{奇数}) = \frac{1}{3} \log 3 + \frac{0}{2} + \frac{1}{3} \log 3 + \frac{0}{4} + \frac{1}{3} \log 3 + \frac{0}{6} = \log 3$$

$$H(A | B) = \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \log 3 = \log 3 \simeq 1.58[\text{bit}]$$

$$I(A; B) = H(A) - H(A | B) = 1[\text{bit}]$$

Bのエントロピーと等しい。

37

$$I(B; A) = H(B) - H(B | A)$$

$$\therefore H(B | A) = H(B) - I(B; A) = 0$$

Aを条件とすれば、Bに関する残された情報が無いことを意味する。すなわち、サイコロの目がわかれば、偶数が奇数かもわかる。

$$H(B | 1) = \frac{-1 \log 1}{\text{奇数}} - \frac{0 \log 0}{\text{偶数}} = 0$$

$$\vdots$$

$$H(B | 6) = \frac{-0 \log 0}{\text{奇数}} - \frac{-1 \log 1}{\text{偶数}} = 0$$

$$\therefore H(B | A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B | \alpha) = 0$$

38

練習

試行T「トランプから1枚カードを引く」

この試行Tを次の2つの事象系としてとらえる。

事象系 (TA):
「引いたカードの数」

事象系 (TB):
「引いたカードが絵札かどうか」

次の各種エントロピーを求めよ。

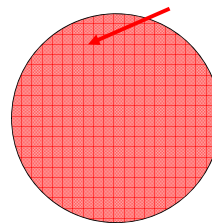
$$H(TA), H(TB), H(TA | TB), H(TB | TA), I(TA; TB)$$

39

独立な情報源

サイコロを投げて得られる情報源と、コインを投げて得られる情報源を考える。

$$A = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6} \right\}$$



$$B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

40

$$H(A) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58[\text{bit}]$$

$$H(B) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1[\text{bit}]$$

$$H(A | \text{表}) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(A | \text{裏}) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(A | B) = \frac{1}{2} \log 6 + \frac{1}{2} \log 6 = \log 6$$

$$I(A; B) = H(A) - H(A | B) = 0[\text{bit}]$$

コインの試行からは、サイコロに関する情報が得られないことを意味する。

41

$$I(B; A) = H(B) - H(B | A)$$

$$H(B | A) = H(B) - I(B; A) = \log 2 = 1[\text{bit}]$$

Aを条件としても、Bに関する平均情報量に変化がない。

42