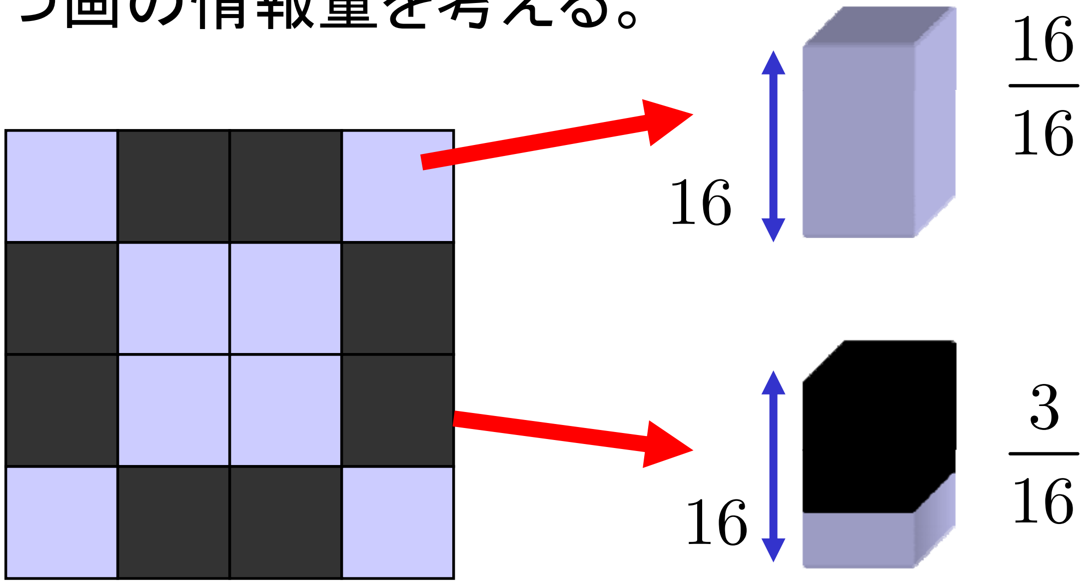
平均情報量の性質（３章）

(参考)画像の情報量

４×４の画素数を持ち、個々の画素が１６階調の輝度値を持つ画の情報量を考える。



このとき、各画素がある輝度値を持つ確率は、$\frac{1}{16}$ である。よって、この画像が持つ情報量I(画)は次式で表される。

$$I(\text{画}) = \sum_{j=1}^{16} i(\text{画素}_{\mathrm{j}}) = 16 \times \log 16 = 64[bit] = 8[byte]$$

前のスライドでは、輝度値が全ての画素で確率が均等であると仮定してあった。

実は、風景画、人物画等では、画素における輝度値の出現確率が一様でないことがある。

このような場合、より少ない情報量しか持たない。

すなわち、確率が一様でない場合には、1画素あたりの平均情報量は、一様な場合より小さくなる。

練習

（1）

256×256 の画素で、各画素が 16 階調の白黒画像の自己情報量を求めよ。

（1）

256×256 の画素のカラー画像の自己情報量を求めよ。ただし、1画素は赤、緑、青（RGB）の各色で表され、各色はそれぞれ16階調で表されるものとする。

1記号あたりの平均情報量例

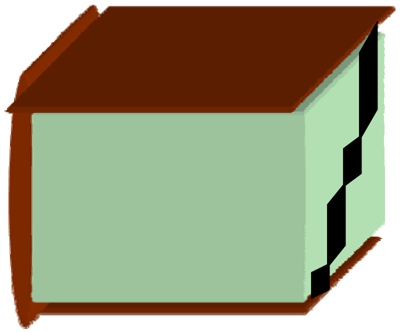
アルファベット$\mathcal{A} = \{a, b, c, \cdots, z\}$ に対して、
個々の記号の出現確率を考えよう。

記号 $\alpha \in \mathcal{A}$ の出現する確率を $P(\alpha)$ と書く。

例えば、 $P(a)$: a の現れる確率

$P(b)$: b の現れる確率

辞書



このとき、一般の英文において、各記号の出現確率は異なる。すなわち、以下である。

$$P(a) \neq P(b) \neq \cdots \neq P(z) \neq \frac{1}{26}$$

もちろん、アルファベット $\mathcal{A} = \{a, b, c, \cdots, z\}$ は一種の情報源とみなすことができる。

今、$\mathcal{A}$ の n 個の文字からなる英文

$$S = s_1 s_2 \cdots s_n$$

の情報量 $I(S)$ を考えよう。

$I(S)$ は各記号が S に出現する自己情報量の総和である。

$$I(S) = \sum_{i=1}^{n} i(s_i)$$

一方、S の情報量の期待値 $\overline{I(S)}$ は、n とエントロピー $H(\mathcal{A})$ の積である。

$$\overline{I(S)} = nH(\mathcal{A})$$

以上のようなことを踏まえると、アルファベットの（1記号あたりの）
平均情報量（エントロピー）が以下の式で表されることが確認できる。

$$H(\mathcal{A}) = \sum_{\alpha=a}^{z} \left\{ P(\alpha) \times i(\alpha) \right\}$$

$$= P(a)i(a) + P(b)i(b) + \cdots + P(z)i(z)$$

$$= -P(a)\log P(a) - P(b)\log P(b) - \cdots - P(z)\log P(z)$$

$$= -\sum_{\alpha=a}^{z} P(\alpha)\log P(\alpha) \quad \text{[bit/記号]}$$

したがって、英文長は情報源 $\mathcal{A}$ のエントロピー $H(\mathcal{A})$
を”単位”とした情報量で表される。

練習

次の事象系のエントロピー(平均情報量)を求めよ。

(1)

$$A=\begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & a_3 \\ \dfrac{1}{5} & , & \dfrac{2}{5} & , & \dfrac{2}{5} \end{Bmatrix}$$

(2)

$$B=\begin{Bmatrix} b_1 & , & b_2 & , & b_3 & , & b_4 \\ \dfrac{1}{9} & , & \dfrac{2}{9} & , & \dfrac{2}{9} & , & \dfrac{5}{9} \end{Bmatrix}$$

(3)

C

「甲君はある1時間中、10分を休憩、20分を教科書読み、30分は計算するとする。この1時間中のある適当な時刻での甲君の行動から構成される事象系」

エントロピーの性質

事象系

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_1 & , & \cdots & , & a_n \\ P(a_1) & , & P(a_1) & , & \cdots & , & P(a_1) \end{Bmatrix}$$

のエントロピーは次式で表される。

$$H(A) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} P(a_i) \log P(a_i)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

ある事象が必ず起きるとき。

$$a_1 = 1, a_2 = \cdots = a_n = 0$$

全ての事象が等確率のとき。

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$$

前のスライドの式を導出するために、
次の2つの事象系を考える。

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & , & a_1 & , & \cdots & , & a_n \\ P_1 & , & P_2 & , & \cdots & , & P_n \end{Bmatrix}, \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_1 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{Bmatrix}, \sum_{i=1}^{n} Q_i = 1$$

補題1 (lemma1)

$$-\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i \le -\sum_{i=1}^{n} P_i \log Q_i$$

エントロピー

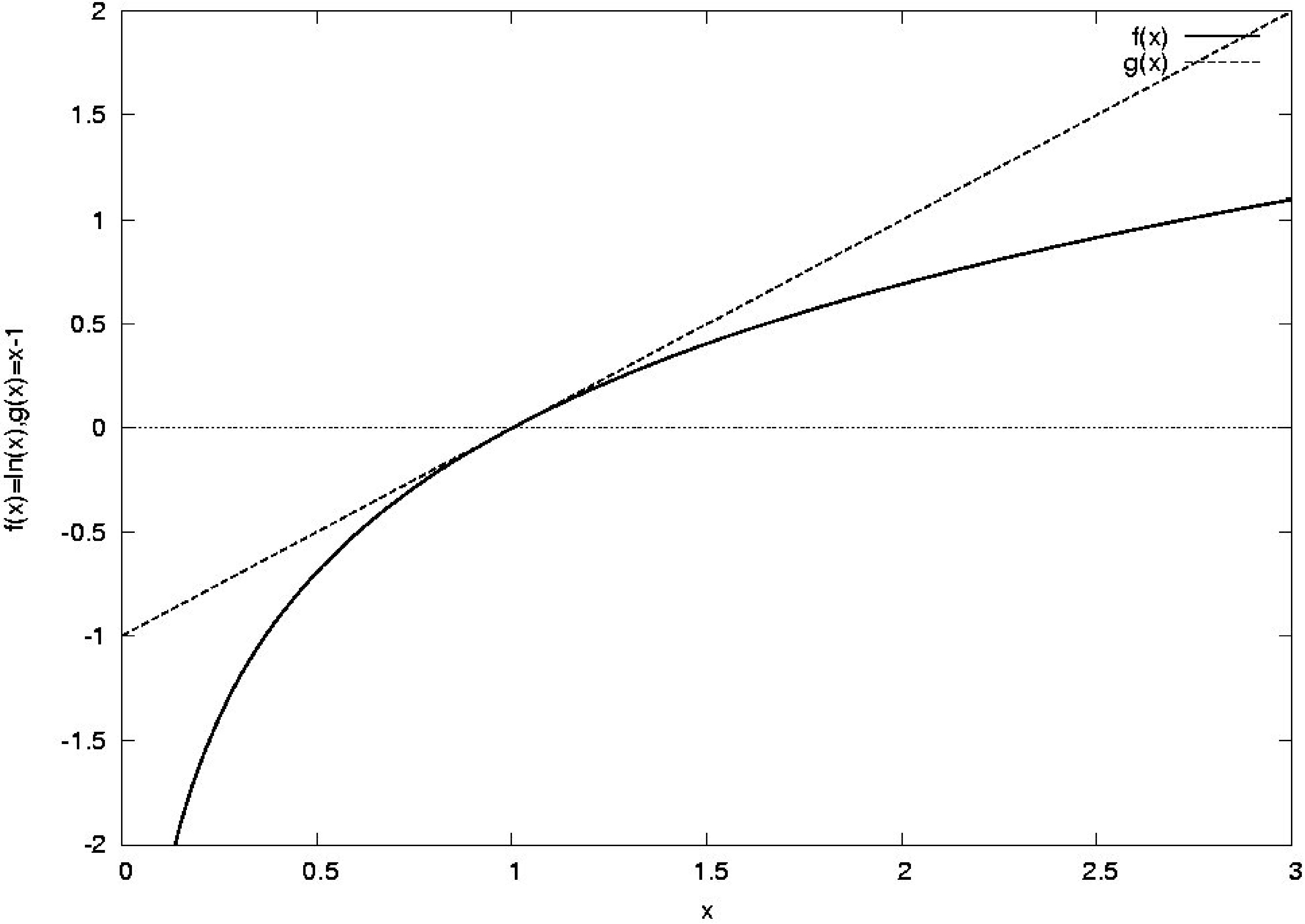
別の事象系の自己情報量を元の事象系の確率で平均する。

証明

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$

不等式の利用。

$$\ln x \le x - 1$$



f(x)
g(x)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x
f(x)=ln(x),g(x)=x-1

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$

$$\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{Q_i}{P_i} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{n} (Q_i - P_i)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Q_i}_{1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_i}_{1} \right)$$

$$= 0$$

この変形で、

$$x = \frac{Q_i}{P_i}$$

として n回不等式を利用いる。

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \log \frac{Q_i}{P_i} \leq 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log \frac{1}{P_i} - P_i \log \frac{1}{Q_i} \right) \leq 0$$

$$\therefore -\sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log P_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log Q_i \right) \leq 0$$

$$\therefore -\sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log P_i \right) \leq -\sum_{i=1}^{n} \left(P_i \log Q_i \right)$$

$$QED$$

エントロピー最大となる情報源

定理1

$$0 \leq H(A) \leq \log n$$

証明

（左の不等号）

$0 \leq P(a_i) \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n)$ なので、

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} P(a_i) \log P(a_i) \geq 0$$

（右の不等号）

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_1 & , & \cdots & , & b_n \\ Q_1 & , & Q_2 & , & \cdots & , & Q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 & , & b_1 & , & \cdots & , & b_n \\ \dfrac{1}{n} & , & \dfrac{1}{n} & , & \cdots & , & \dfrac{1}{n} \end{Bmatrix}$$

とおく。補題１より、

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i &\le -\sum_{i=1}^{n} P_i \log Q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_i \log n \\ &= \log n \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \right) \\ &= \log n \end{aligned}$$

QED

練習

次の事象系のエントロピー(平均情報量)を求めよ。

（１）

$$A=\begin{Bmatrix} a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \end{Bmatrix}$$

$$A'=\begin{Bmatrix} a'_1 & , & a'_2 & , & a'_3 & , & a'_4 \\ \frac{1}{8} & , & \frac{1}{8} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$A''=\begin{Bmatrix} a''_1 & , & a''_2 & , & a''_3 & , & a''_4 \\ \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

様々なエントロピー

複数の事象系が互いに関係している場合に、それぞれの事象系に関する様々なエントロピー（平均情報量）が定義できる。

次のようなゲームを考える。

サイコロゲーム：

「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

この勝ち負けに関する情報を2つの事象としてとらえる。

サイコロゲームの勝敗表

サイコロゲーム:「甲と乙がサイコロを振り合って、サイコロの目の大きい方が勝ち」

乙＼甲	1	2	3	4	5	6
1	△	○	○	○	○	○
2	×	△	○	○	○	○
3	×	×	△	○	○	○
4	×	×	×	△	○	○
5	×	×	×	×	△	○
6	×	×	×	×	×	△

甲

○:勝ち
△:引分け
×:負け

サイコロゲームを2つの二つの事象系として捕らえる。

事象系A: 甲の勝負に関する事象系

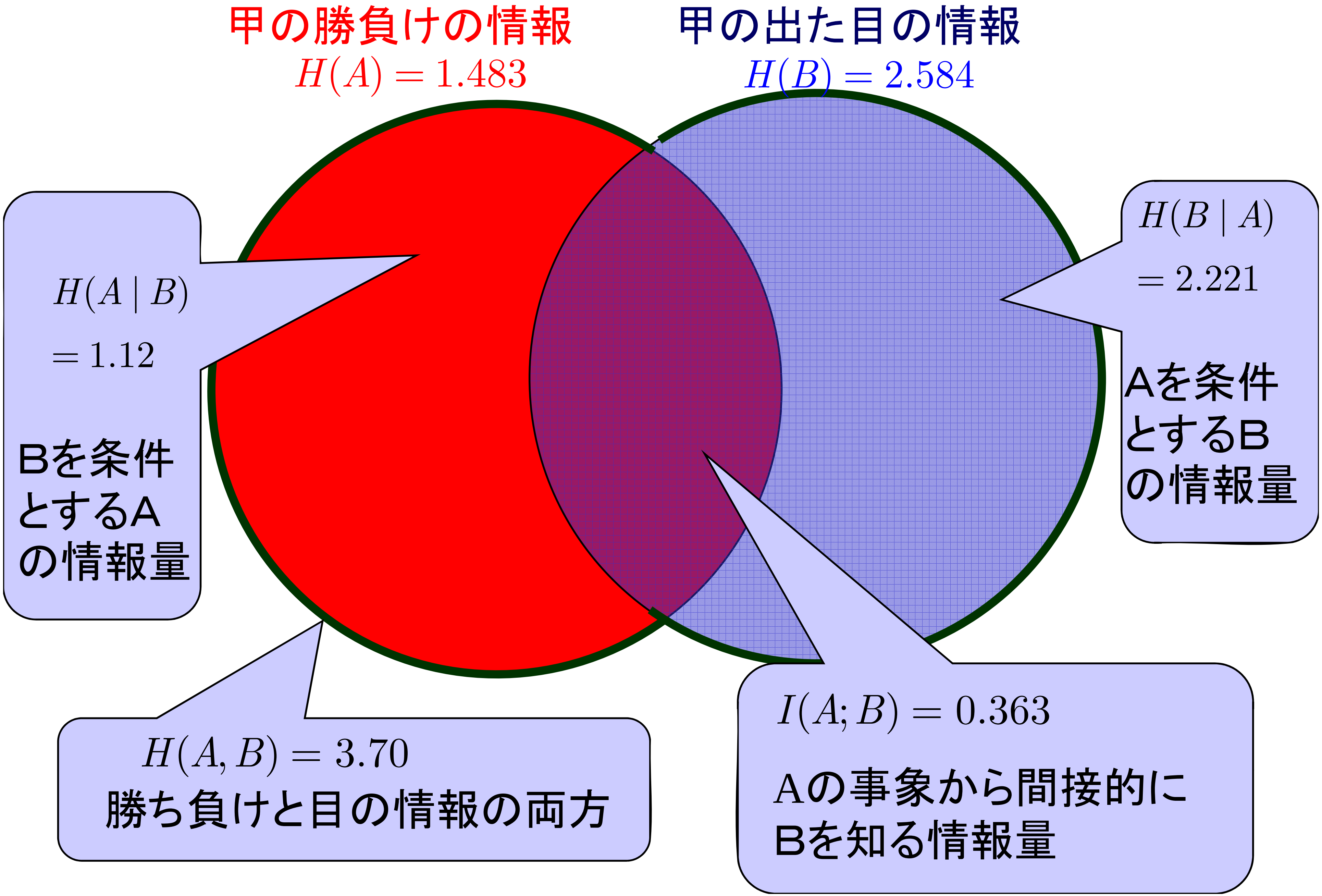
$$A = \begin{Bmatrix} \bigcirc & , & \triangle & , & \times \\ \frac{15}{36} & , & \frac{6}{36} & , & \frac{15}{36} \end{Bmatrix}$$

この2つの事象系は独立ではなく、互いに密接に関係している。

事象系B: 甲のサイコロの目に関する事象系

$$B = \begin{Bmatrix} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{Bmatrix}$$

サイコロゲームにおける様々なエントロピー



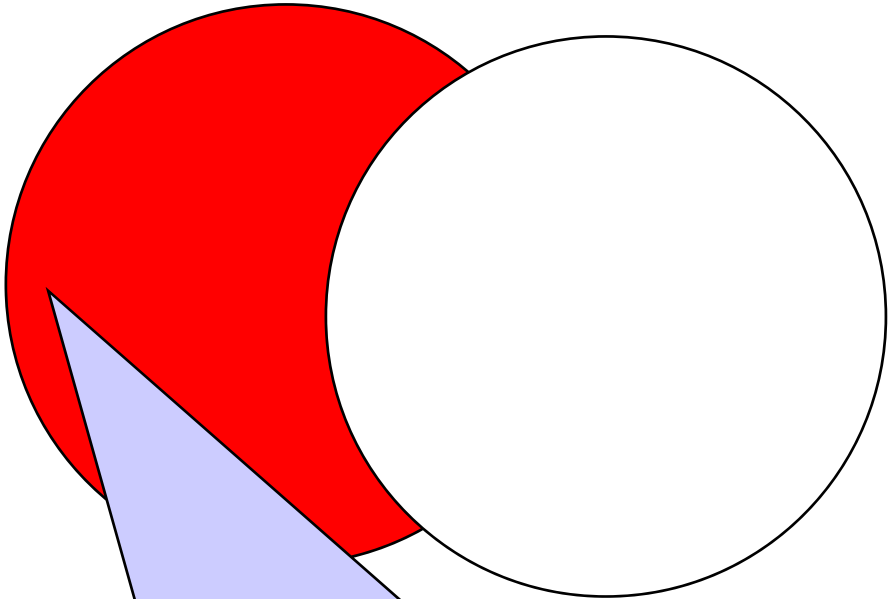
条件付エントロピー１

甲の出た目の事象系を条件とする、
甲の勝ち負けの事象系の平均情報量

$$H(A\mid\beta) = -\sum_{\alpha\in A} P(\alpha\mid\beta)\log P(\alpha\mid\beta)$$

条件付確率で定義されるエントロピー

$$\begin{aligned}
H(A\mid B) &= \sum_{\beta\in B} P(\beta)H(A\mid\beta)\\
&= -\sum_{\beta\in B} P(\beta)\sum_{\alpha\in A} P(\alpha\mid\beta)\log P(\alpha\mid\beta)\\
&= -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\beta)P(\alpha\mid\beta)\log P(\alpha\mid\beta)\\
&= -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha\mid\beta)
\end{aligned}$$

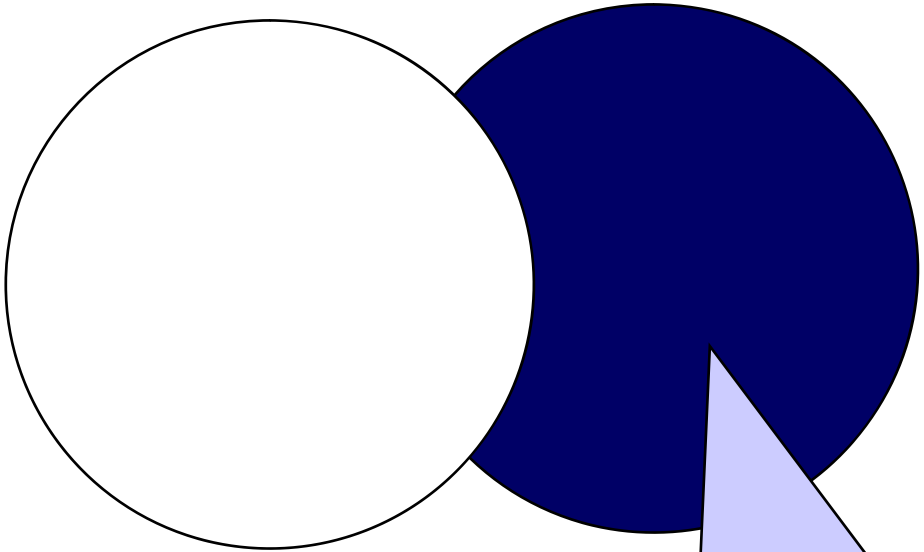


Bを条件とすることによって、情報源Aの情報量がBと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

条件付エントロピー2

甲の勝ち負けの事象系を条件とする甲の目の事象系の平均情報量

$$H(B \mid \alpha) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \alpha) \log P(\beta \mid \alpha)$$



$$H(B \mid A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B \mid \alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \alpha) \log P(\beta \mid \alpha)$$

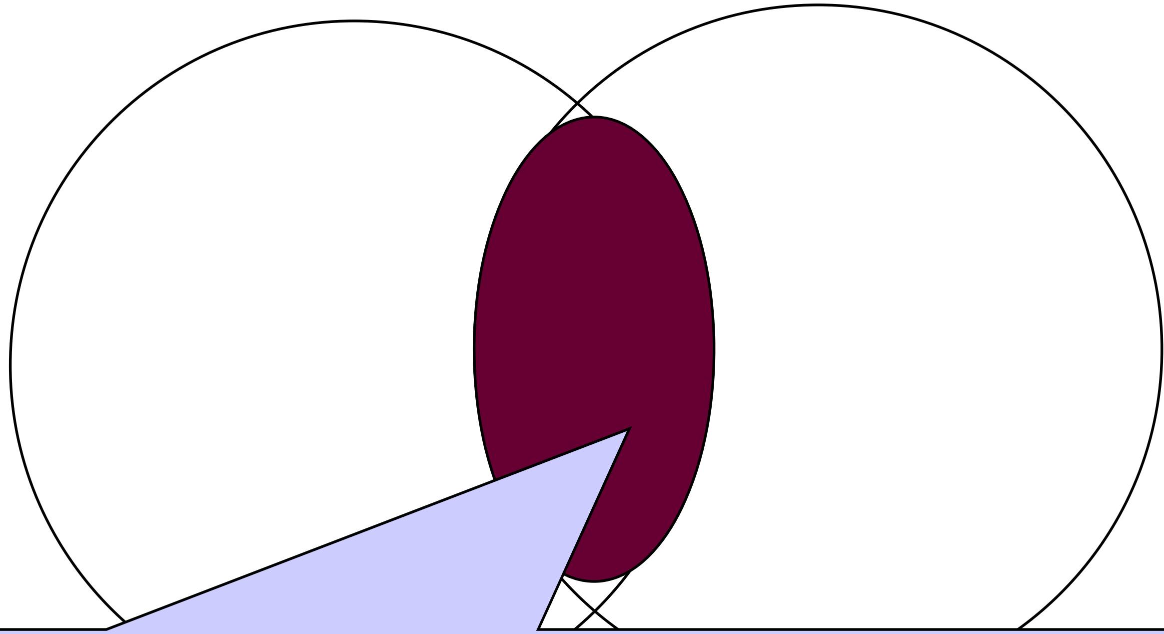
$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\beta) P(\beta \mid \alpha) \log P(\beta \mid \alpha)$$

$$= -\sum_{\alpha \in A, \beta \in B} P(\alpha, \beta) \log P(\beta \mid \alpha)$$

Aを条件とすることによって、情報源Bの情報量がAと関係している分減少する。したがって、減少分は、AとBの共通の情報。

相互情報量

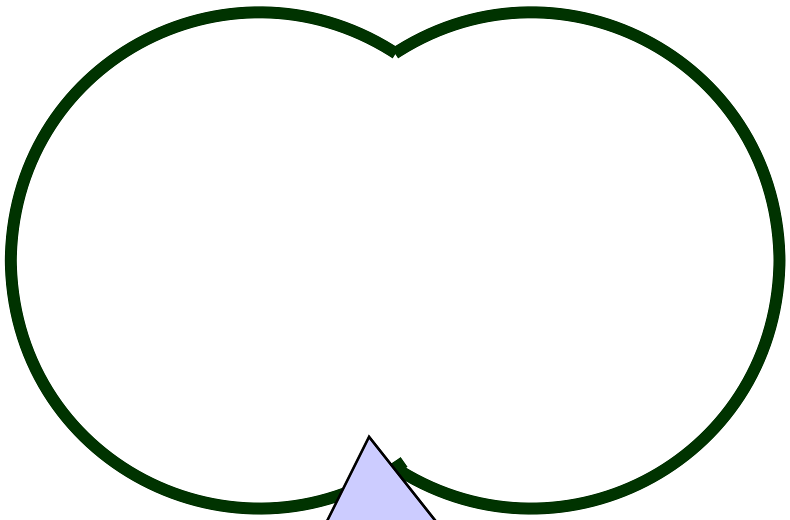
$$I(A;B) = H(A) - H(A \mid B) = H(B) - H(B \mid A) = I(B;A)$$



AとBが互いに関係している情報量。
Aを知ることによって、間接的にBに関する情報が得られる。
同様に、Bを知ることによって、間接的にAの情報が得られる。
これらは、等しい。

結合エントロピー

$$H(A,B) = -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha,\beta) = H(A)+H(B)-I(A;B)$$



α と β が同時に起こる確率。
結合確率。

$$\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta) = 1$$

AとBがのすべての情報量。
Aだけの情報量と、Bだけの情報量を加えて、
関係する相互情報量を減ずる。

まず、2つの事象系のエントロピーを求める。

$$
\begin{aligned}
H(A) &= -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha) \log P(\alpha) \\
&= \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} + \frac{6}{36} \log \frac{36}{6} + \frac{15}{36} \log \frac{36}{15} \\
&= \frac{5}{6} (\log 4 + \log 3 - \log 5) + \frac{1}{6} (\log 2 + \log 3) \\
&= \frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6} \log 5 \\
&\simeq (1.833) + (1.585) - (1.93) \\
&= 1.4833 \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(B) &= -\sum_{\beta \in B} P(\beta) \log P(\beta) \\
&= \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6 \\
&= \log 6 \\
&\simeq 2.5849 \cdots
\end{aligned}
$$

次に、Bの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$H(A\,|\,1) = -\sum_{\alpha\in A} P(\alpha\,|\,1)\log P(\alpha\,|\,1)$$

$$= -P(\bigcirc\,|\,1)\log P(\bigcirc\,|\,1) - P(\triangle\,|\,1)\log P(\triangle\,|\,1) - P(\times\,|\,1)P(\times\,|\,1)$$

$$= 0 + \frac{1}{6}\log 6 + \frac{5}{6}\log\frac{6}{5}$$

$$H(A\,|\,2) = -\sum_{\alpha\in A} P(\alpha\,|\,2)\log P(\alpha\,|\,2)$$

$$= \frac{1}{6}\log 6 + \frac{1}{6}\log 6 + \frac{4}{6}\log\frac{6}{4}$$

$$H(A\,|\,3) = -\sum_{\alpha\in A} P(\alpha\,|\,3)\log P(\alpha\,|\,3)$$

$$= \frac{2}{6}\log\frac{6}{2} + \frac{1}{6}\log 6 + \frac{3}{6}\log\frac{6}{3}$$

$$H(A \mid 4) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 4) \log P(\alpha \mid 4)$$

$$= \frac{3}{6} \log \frac{6}{3} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{2}{6} \log \frac{6}{2}$$

$$H(A \mid 5) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 5) \log P(\alpha \mid 5)$$

$$= \frac{4}{6} \log \frac{6}{4} + \frac{1}{6} \log 6 + \frac{1}{6} \log 6$$

$$H(A \mid 6) = -\sum_{\alpha \in A} P(\alpha \mid 6) \log P(\alpha \mid 6)$$

$$= \frac{5}{6} \log \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \log 6 + 0$$

以上より、事象系Bを条件とする、条件付エントロピー $H(A \mid B)$ が求められる。

$$
\begin{aligned}
H(A \mid B) &= \sum_{\beta \in B} P(\beta) H(A \mid \beta) \\
&= \frac{1}{6} H(A \mid 1) + \frac{1}{6} H(A \mid 2) + \frac{1}{6} H(A \mid 3) + \frac{1}{6} H(A \mid 4) + \frac{1}{6} H(A \mid 5) + \frac{1}{6} H(A \mid 6) \\
&= \frac{1}{3}(\frac{1}{6}\log 6 + \frac{5}{6}\log\frac{6}{5}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{6}\log 6 + \frac{4}{6}\log\frac{6}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{6}\log\frac{6}{3} + \frac{1}{6}\log 6 + \frac{2}{6}\log\frac{6}{2}) \\
&= \frac{1}{3}(3\log 6 - \frac{5}{6}\log 5 - \frac{2}{3}\log 4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{3}\log 2) \\
&= \log 6 - \frac{5}{18}\log 5 - \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9} \\
&= \frac{4}{9} + \frac{5}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5 \\
&\simeq (0.444) + (1.321) - (0.645) \\
&= 1.12
\end{aligned}
$$

今度は、逆にAの事象系において、事象が既知である場合の個々のエントロピーを求める。

$$H(B \mid \bigcirc) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \bigcirc) \log P(\beta \mid \bigcirc)$$

$$= -P(1 \mid \bigcirc) \log P(1 \mid \bigcirc) - P(2 \mid \bigcirc) \log P(2 \mid \bigcirc) - \cdots - P(6 \mid \bigcirc) \log P(6 \mid \bigcirc)$$

$$= 0 + \frac{1}{15} \log 15 + \frac{2}{15} \log \frac{15}{2} + \frac{3}{15} \log \frac{15}{3} + \frac{4}{15} \log \frac{15}{4} + \frac{5}{15} \log \frac{15}{5}$$

$$= \log 15 - \frac{2}{15} \log 2 - \frac{3}{15} \log 3 - \frac{4}{15} \log 4 - \frac{5}{15} \log 5$$

$$= \frac{12}{15} \log 3 + \frac{10}{15} \log 5 - \frac{10}{15}$$

$$= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}$$

$$H(B \mid \triangle) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \triangle) \log P(\beta \mid \triangle)$$

$$= 6 \times \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \log 6$$

$$H(B \mid \times) = -\sum_{\beta \in B} P(\beta \mid \times) \log P(\beta \mid \times)$$

$$= \frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}$$

以上より、事象系Aを条件とする、条件付エントロピーが求められる。 $H(B \mid A)$

$$H(B \mid A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B \mid \alpha)$$

$$= \frac{30}{36} \left(\frac{4}{5} \log 3 + \frac{2}{3} \log 5 - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6} \log 6$$

$$= \frac{5}{6} \log 3 + \frac{5}{9} \log 5 - \frac{7}{18}$$

$$\simeq (1.321) + (1.290) - (0.389)$$

$$= 2.221$$

$$H(A) - H(A \mid B)$$

$$= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6}\log 5\right) - \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5\right)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$

$$H(B) - H(B \mid A)$$

$$= \log 6 - \left(\frac{5}{6}\log 3 + \frac{5}{9}\log 5 - \frac{7}{18}\right)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$

$$\therefore I(A;B) = H(A) - H(A \mid B) = H(B) - H(B \mid A)$$

$$= \frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5$$

$$\simeq (1.389) + (0.264) - (1.290)$$

$$= 0.363$$

結合エントロピーを求めるためには、A、Bの積の事象系を考えても良い。サイコロゲームの勝敗表より以下の事象系が得られる。

$$
(A,B)=\left\{\begin{matrix}(\bigcirc,1) & , & (\triangle,1) & , & (\times,1) & , & (\bigcirc,2) & , & (\triangle,2) & , & (\times,2) & , \\ 0 & , & \dfrac{1}{36} & , & \dfrac{5}{36} & , & \dfrac{1}{36} & , & \dfrac{1}{36} & , & \dfrac{4}{36} & , \end{matrix}\right.
$$

$$
\begin{matrix}(\bigcirc,3) & , & (\triangle,3) & , & (\times,3) & , & (\bigcirc,4) & , & (\triangle,4) & , & (\times,4) & , \\ \dfrac{2}{36} & , & \dfrac{1}{36} & , & \dfrac{3}{36} & , & \dfrac{3}{36} & , & \dfrac{1}{36} & , & \dfrac{2}{36} & , \end{matrix}
$$

$$
\left.\begin{matrix}(\bigcirc,5) & , & (\triangle,5) & , & (\times,5) & , & (\bigcirc,6) & , & (\triangle,6) & , & (\times,6) \\ \dfrac{4}{36} & , & \dfrac{1}{36} & , & \dfrac{1}{36} & , & \dfrac{5}{36} & , & \dfrac{1}{36} & , & 0 \end{matrix}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
H(A,B) &= -\sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(\alpha,\beta)\log P(\alpha,\beta) \\
&= \frac{8}{36}\log 36 + \frac{4}{36}\log\frac{36}{2} + \frac{6}{36}\log\frac{36}{3} + \frac{8}{36}\log\frac{36}{4} + \frac{10}{36}\log\frac{36}{5} \\
&= \frac{36}{36}\log 36 - \frac{1}{9}\log 2 - \frac{1}{6}\log 3 - \frac{2}{9}\log 4 - \frac{5}{18}\log 5 \\
&= \frac{13}{9} + \frac{11}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(A,B) &= H(A) + H(B) - I(A;B) \\
&= \left(\frac{11}{6} + \log 3 - \frac{5}{6}\log 5\right) + (\log 6) - \left(\frac{25}{18} + \frac{1}{6}\log 3 - \frac{5}{9}\log 5\right) \\
&= \frac{13}{9} + \frac{11}{6}\log 3 - \frac{5}{18}\log 5
\end{aligned}
$$

練習

コインゲームを考える。

「甲と乙がそれぞれコインを投げる。
表より裏が強いとする。」

このゲームを次の２つの事象系としてとらえる。

事象系 （コA）:
「甲の勝負けを表す事象系」

事象系 （コB）:
「甲の出したコインの裏表を表す事象系」

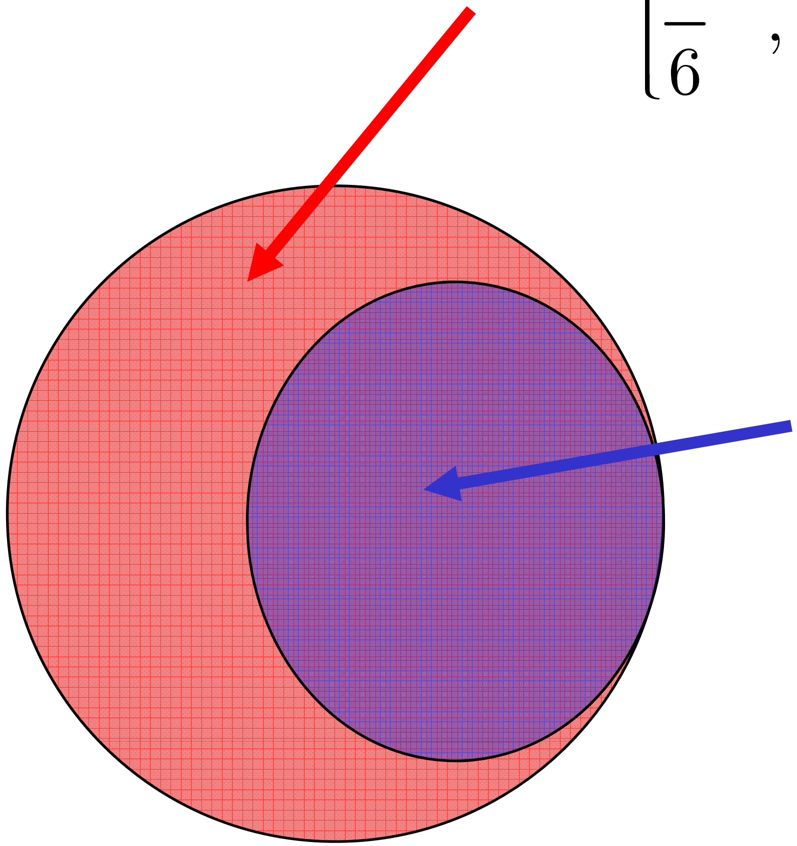
次の各種エントロピーを求めよ。

$$H(\text{コ}\,A), H(\text{コ}\,B), H(\text{コ}\,A \mid \text{コ}\,B), H(\text{コ}\,B \mid \text{コ}\,A), I(\text{コ}\,A; \text{コ}\,B)$$

部分的な情報源

サイコロを投げて出た目に従って、以下の2つの情報源を考える。

$$A = \left\{\begin{matrix} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} \end{matrix}\right\}$$



$$B = \left\{\begin{matrix} \text{偶数} & , & \text{奇数} \\ \dfrac{1}{2} & , & \dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$H(A)=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\log 6=\log 6\simeq 2.58[bit]$$

$$H(B)=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\log 2=\log 2=1[bit]$$

$$H(A\mid 偶数)=\underbrace{0}_{1}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{2}+\underbrace{0}_{3}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{4}+\underbrace{0}_{5}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{6}=\log 3$$

$$H(A\mid 奇数)=\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{1}+\underbrace{0}_{2}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{3}+\underbrace{0}_{4}+\underbrace{\frac{1}{3}\log 3}_{5}+\underbrace{0}_{6}=\log 3$$

$$H(A\mid B)=\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{2}\log 3=\log 3\simeq 1.58[bit]$$

$$I(A;B)=H(A)-H(A\mid B)=1[bit]$$

Bのエントロピーと等しい。

$$I(B;A) = H(B) - H(B \mid A)$$

$$\therefore H(B \mid A) = H(B) - I(B;A) = 0$$

Aを条件とすれば、Bに関する残された情報が無いことを意味する。すなわち、サイコロの目がわかれば、偶数か奇数かもわかる。

$$H(B \mid 1) = \underbrace{-1\log 1}_{\text{奇数}} \underbrace{-0\log 0}_{\text{偶数}} = 0$$

$$\vdots$$

$$H(B \mid 6) = \underbrace{-0\log 0}_{\text{奇数}} \underbrace{-1\log 1}_{\text{偶数}} = 0$$

$$\therefore H(B \mid A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) H(B \mid \alpha) = 0$$

練習

試行T「トランプから１枚カードを引く」

この試行Tを次の２つの事象系としてとらえる。

事象系 （TA）:
「引いたカードの数」

事象系 （TB）:
「引いたカードが絵札かどうか」

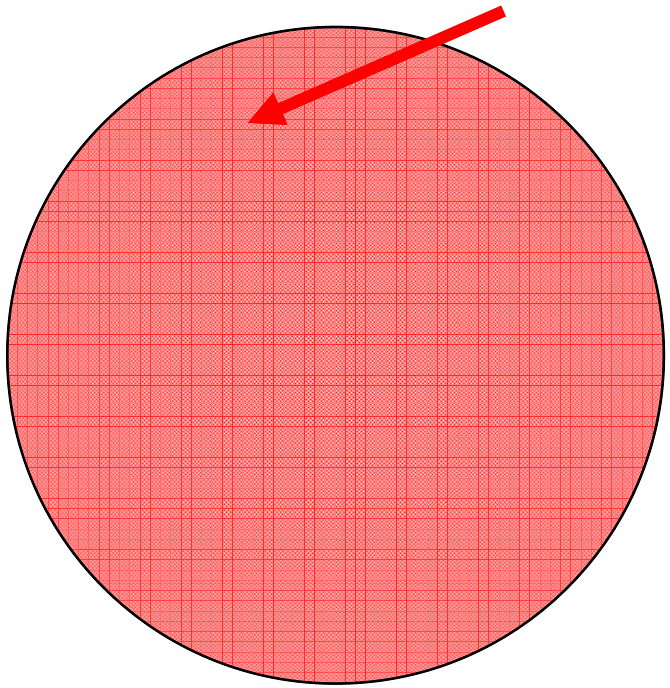
次の各種エントロピーを求めよ。

$$H(TA), H(TB), H(TA \mid TB), H(TB \mid TA), I(TA; TB)$$

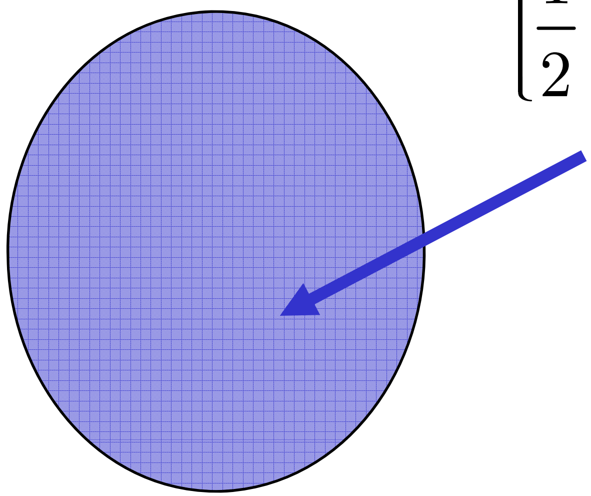
独立な情報源

サイコロを投げて得られる情報源と、コインを投げて得られる情報源を考える。

$$A=\begin{Bmatrix} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} & , & \dfrac{1}{6} \end{Bmatrix}$$



$$B=\begin{Bmatrix} 表 & , & 裏 \\ \dfrac{1}{2} & , & \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$



$$H(A) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \log 6 = \log 6 \simeq 2.58[bit]$$

$$H(B) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \log 2 = \log 2 = 1[bit]$$

$$H(A \mid 表) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(A \mid 裏) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \log 6 = \log 6$$

$$H(A \mid B) = \frac{1}{2} \log 6 + \frac{1}{2} \log 6 = \log 6$$

$$I(A; B) = H(A) - H(A \mid B) = 0[bit]$$

コインの試行からは、サイコロに関する情報が得られないことを意味する。

$$I(B;A) = H(B) - H(B \mid A)$$

$$H(B \mid A) = H(B) - I(B;A) = \log 2 = 1[bit]$$

Aを条件としても、Bに関する平均情報量に変化がない。