

情報量(2章)

1

入れ物と中身

データ

情報

情報の量？

塩水

塩

塩分の量！

2

情報の形態

変換

情報

料理

塩

3

情報量の測り方のイメージ

データ

情報

塩水

塩

この方法を学ぶ。
(実は、確率)

蒸留・融解等

4

情報の大小1

データ	情報量
(a)東京に雪が降った。	$i(a)$
(b)北極に雪が降った。	$i(b)$

どれが妥当か？

$i(a) < i(b)$ $i(a) = i(b)$ $i(a) > i(b)$

5

練習

次のニュース(データ)の情報量の大小関係を示せ。

(1)

(宝a) 買った宝くじが外れた。

(宝b) 買った宝くじが1等当たった。

(2)

(事a) 今日事故にあった。

(事b) 今日事故にあわなかった

(3)

(サa) サイコロを振ったら1が出た。

(サb) 偶数がでた。

6

確率の大小と情報量の大小

確率	事象	情報量
$P(a)$	(a)東京に雪が降った。	$i(a)$
$P(b)$	(b)北極に雪が降った。	$i(b)$
$P(a) < P(b)$		$i(a) > i(b)$

1. 情報量は、確率の関数
2. 情報量は、確率に対する減少関数

7

独立事象の確率と情報量

事象「宝くじが当たって、しかも事故にあった。」の情報量を考えよう。

(宝a) 買った宝くじが外れた。
(宝b) 買った宝くじが1等当たった。

(事a) 今日事故にあった。
(事b) 今日事故にあわなかった

(互いに無関係な事象を独立な事象と言う。)

”独立”な事象の積事象の確率

$$P(\text{宝}b) \times P(\text{事}a)$$

”独立”な事象の積事象の情報量

$$i(\text{宝}b) + i(\text{事}a)$$

3. 独立な事象の積事象は、個々の情報量の和

8

情報量の満たす満たすべき性質

事象 x がおきる確率を $P(x)$ と表し、
事象 x がおきたことを知った情報量を $i(x)$ と表す。
このとき、以下をみたすような関数 $f(x)$ で情報量を定義する。

1. 情報量は、確率の関数である。

$$i(x) = f(P(x))$$

2. 情報量は、確率に対する減少関数である。

$$P(x_1) < P(x_2) \Leftrightarrow i(x_1) > i(x_2)$$

3. 独立な積事象を知ったときの情報量は、個々の情報量の和である。

$$i(x_1 \cdot x_2)$$

$$= f(P(x_1) \cdot P(x_2)) = f(P(x_1)) + f(P(x_2))$$

$$= i(x_1) + i(x_2)$$

9

(自己)情報量と情報量の単位

先のスライドを満たすように、
ある事象 x を知る情報量 $i(x)$ は以下の関数で
定義される。 ($s > 1$)

定義(自己情報量)

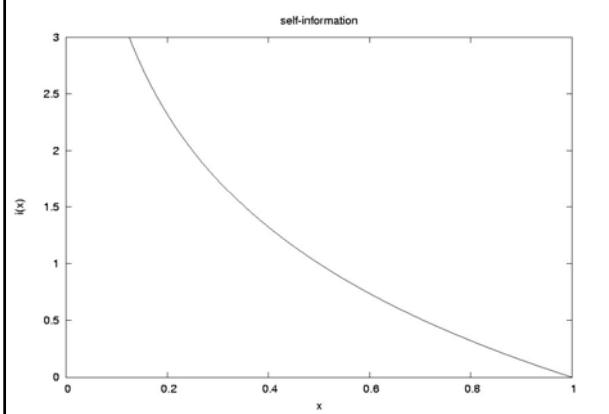
$$i(x) = -\log_s P(x)$$

情報量の単位

($s = 2$) $\rightarrow$ [bit](ビット)
($s = e$) $\rightarrow$ [nat](ナット)
($s = 10$) $\rightarrow$ [decit](デシット)

1ビットは確率0.5の事象が起きたことを知る情報量。以後は、ビットだけを扱う。

自己情報量の外形



練習

次の事象の自己情報量を求めよ。

(1)

a : 2枚のコインを投げて両方とも裏がでる。

(2)

b : 52枚のトランプから絵札を1枚引く

(3)

C : アルファベットの書いてある26個の玉から、cの玉を取り出す。

12

事象系

単独の事象ではなくて、事象の集合を考える。
事象の集合とそれが生じる確率を以下のように表す。

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n \\ P(x_1) & , & P(x_2) & , & \cdots & , & P(x_n) \end{array} \right\}$$

ここで、 $0 \leq P(x_i) \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n)$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

このように、確率が定められた事象の集合を事象系と言う。

13

事象系例

(1) コイントスの事象系

$$C = \left\{ \begin{array}{cc} \text{表} & , & \text{裏} \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

(2) サイコロの事象系

$$D = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

(3) トランプを引いたときの数の事象系

$$T = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & , & 2 & , & \cdots & , & K \\ \frac{1}{13} & , & \frac{1}{13} & , & \cdots & , & \frac{1}{13} \end{array} \right\}$$

14

練習

次の事象系を形式的に示せ。

(1) トランプを引いたときのカードの事象系

(2) 26文字のアルファベットと空白文字が書かれた、27個の玉が袋に入っている。その袋から1つの玉をとりだし事象系。

15

事象系の平均情報量

定義(エントロピー)

事象系 X のすべての事象に対して、その情報量の平均をとったものを平均情報量またはエントロピーという。

ある事象系 X が以下のように与えられるとする。

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n \\ P(x_1) & , & P(x_2) & , & \cdots & , & P(x_n) \end{array} \right\}$$

このとき、平均情報量 $H(X)$ は自己情報量を元に以下のように表される。

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{x \in X} P(x) i(x) \\ &= - \sum_{x \in X} P(x) \log P(x) \end{aligned}$$

16

平均情報量の計算例

$$\begin{aligned} (1) \quad C = \left\{ \begin{array}{cc} \text{表} & , & \text{裏} \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad H(C) &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad D = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{array} \right\} \\ H(D) &= -\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \\ &= 6 \times \frac{1}{6} \log_2 6 \\ &= \log_2 6 \\ &= 2.585 \dots \end{aligned}$$

17

練習

次の確率事象系(情報源)の平均情報量(エントロピー)を求めよ。

(1)

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & , & a_2 \\ \frac{1}{4} & , & \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

(2)

$$B = \left\{ \begin{array}{ccc} b_1 & , & b_2 & , & b_3 \\ \frac{1}{10} & , & \frac{3}{10} & , & \frac{6}{10} \end{array} \right\}$$

(3) $C = \left\{ \begin{array}{l} c_1 \text{ さいころを振って1、または4の目} \\ c_2 \text{ さいころを振って1、4以外の目} \end{array} \right\}$

18

2事象の事象系の平均情報量

ある事象系 X が以下のように与えられるとする。

$$X = \left\{ \begin{array}{cc} x & , \quad \bar{x} \\ p & , \quad 1-p \end{array} \right\}$$

引数が、事象系

このとき、エントロピーは次式となる。

$$H(X) = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

この形の事象系は非常によく用いられ、この右辺の形の関数をエントロピー関数といい以下のように表す。

$$\mathcal{H}(p) \equiv -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

引数が、数

19

エントロピー関数の外形 $\mathcal{H}(p)$

