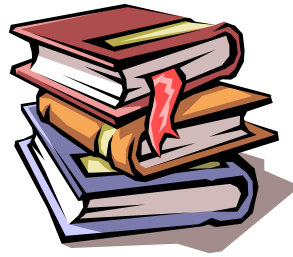


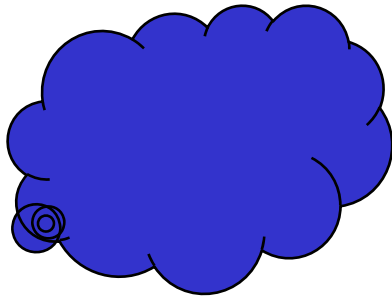
情報量(2章)

入れ物と中身

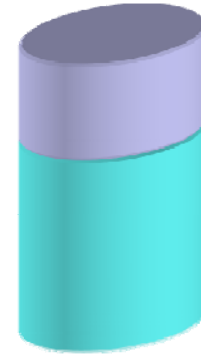
データ



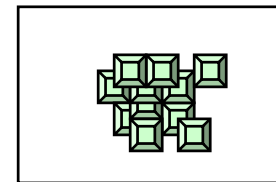
情報



情報の量？



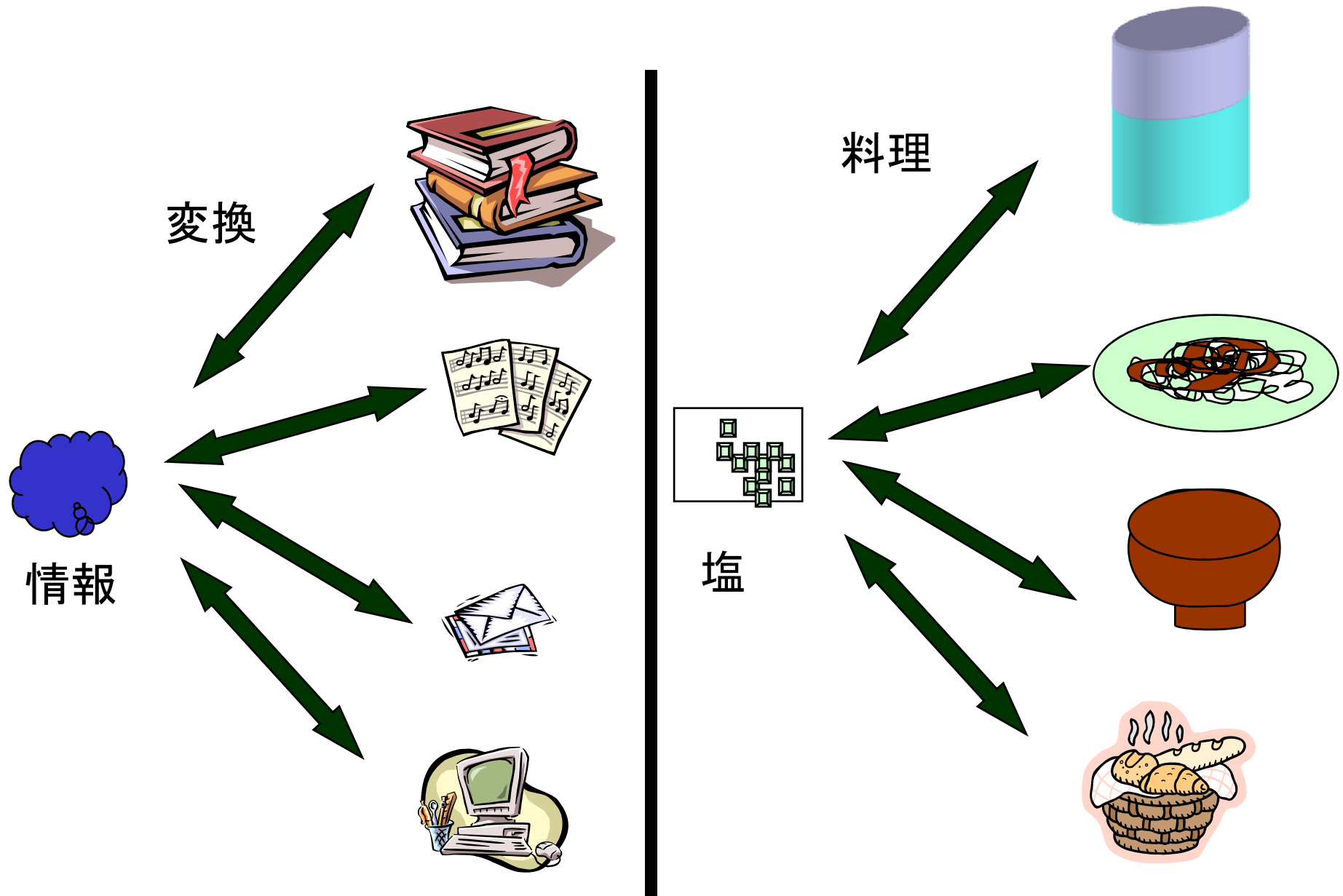
塩水



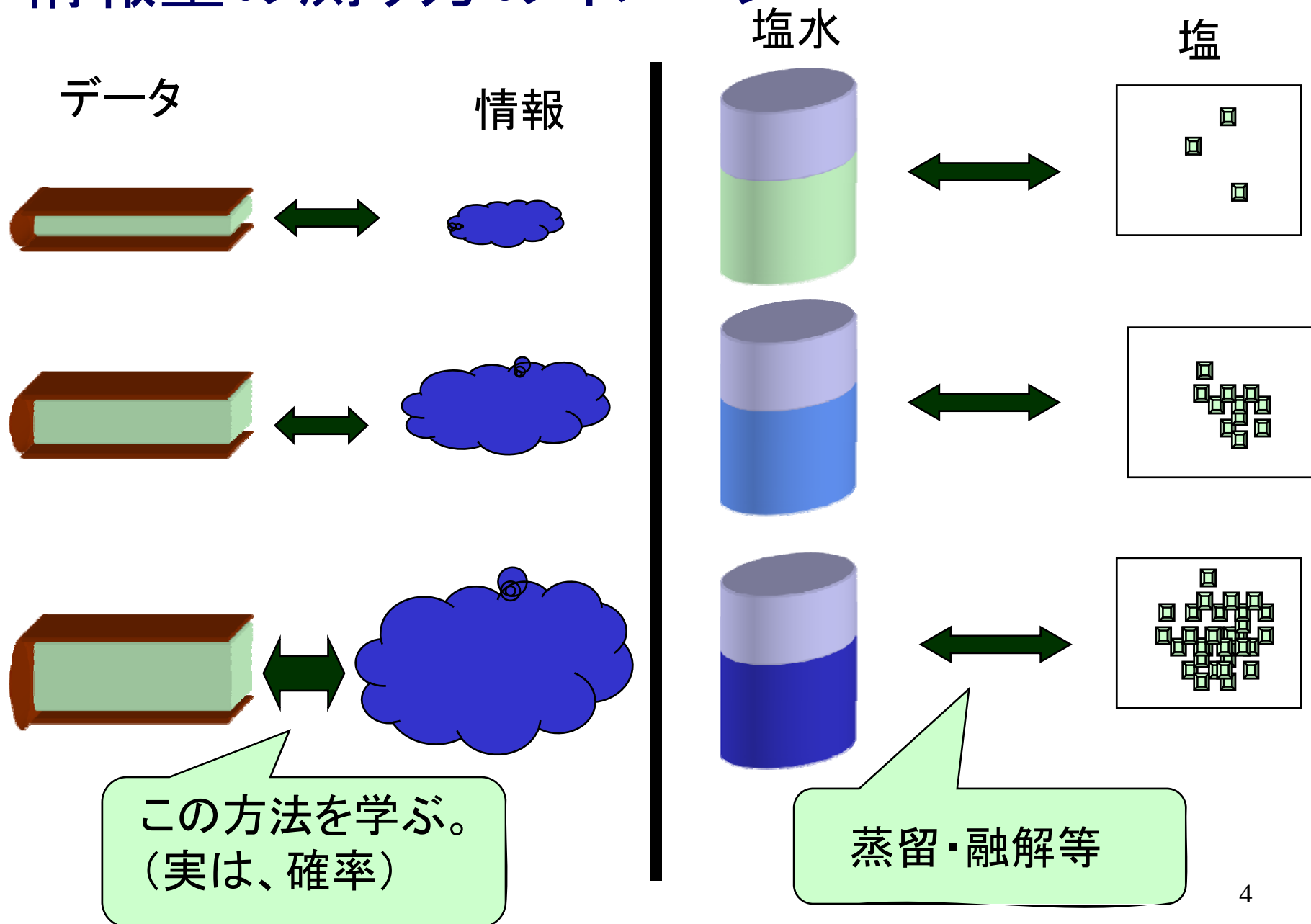
塩

塩分の量！

情報の形態



情報量の測り方のイメージ



情報の大小1

データ

情報量

(a) 東京に雪が降った。

$i(a)$

(b) 北極に雪が降った。

$i(b)$

どれが妥当か？

$$i(a) < i(b)$$

$$i(a) = i(b)$$

$$i(a) > i(b)$$

練習 次のニュース(データ)の情報量の大小関係を示せ。

(1)

(宝a) 買った宝くじが外れた。

(宝b) 買った宝くじが1等当たった。

(2)

(事a) 今日事故にあった。

(事b) 今日事故にあわなかった

(3)

(サa) サイコロを振ったら1が出た。

(サb) 偶数がでた。

確率の大小と情報量の大小

確率

事象

情報量

$$P(a)$$

(a)東京に雪が降った。

$$i(a)$$

$$P(b)$$

(b)北極に雪が降った。

$$i(b)$$

$$P(a) < P(b)$$

$$i(a) > i(b)$$



1. 情報量は、確率の関数
2. 情報量は、確率に対する減少関数

独立事象の確率と情報量

事象「宝くじが当たって、しかも事故にあった。」の情報量を考えよう。

(宝a) 買った宝くじが外れた。
(宝b) 買った宝くじが1等当たった。



(事a) 今日事故にあった。
(事b) 今日事故にあわなかった

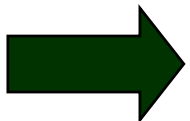
(互いに無関係な事象を独立な事象と言う。)

”独立”な事象の積事象の確率

$$P(\text{宝b}) \times P(\text{事a})$$

”独立”な事象の積事象の情報量

$$i(\text{宝b}) + i(\text{事a})$$



3. 独立な事象の積事象は、個々の情報量の和

情報量の満たす満たすべき性質

事象 x がおきる確率を $P(x)$ と表し、
事象 x がおきたことを知った情報量を $i(x)$ と表す。
このとき、以下をみたすような関数 $f(x)$ で情報量を定義する。

1. 情報量は、確率の関数である。

$$i(x) = f(P(x))$$

2. 情報量は、確率に対する減少関数である。

$$P(x_1) < P(x_2) \Leftrightarrow i(x_1) > i(x_2)$$

3. 独立な積事象を知ったときの情報量は、個々の情報量の和である。

$$\begin{aligned} & i(x_1 \bullet x_2) \\ &= f(P(x_1) \bullet P(x_2)) = f(P(x_1)) + f(P(x_2)) \\ &= i(x_1) + i(x_2) \end{aligned}$$

(自己)情報量と情報量の単位

先のスライドを満たすように、
ある事象 x を知る情報量 $i(x)$ は以下の関数で
定義される。 ($s > 1$)

定義(自己情報量)

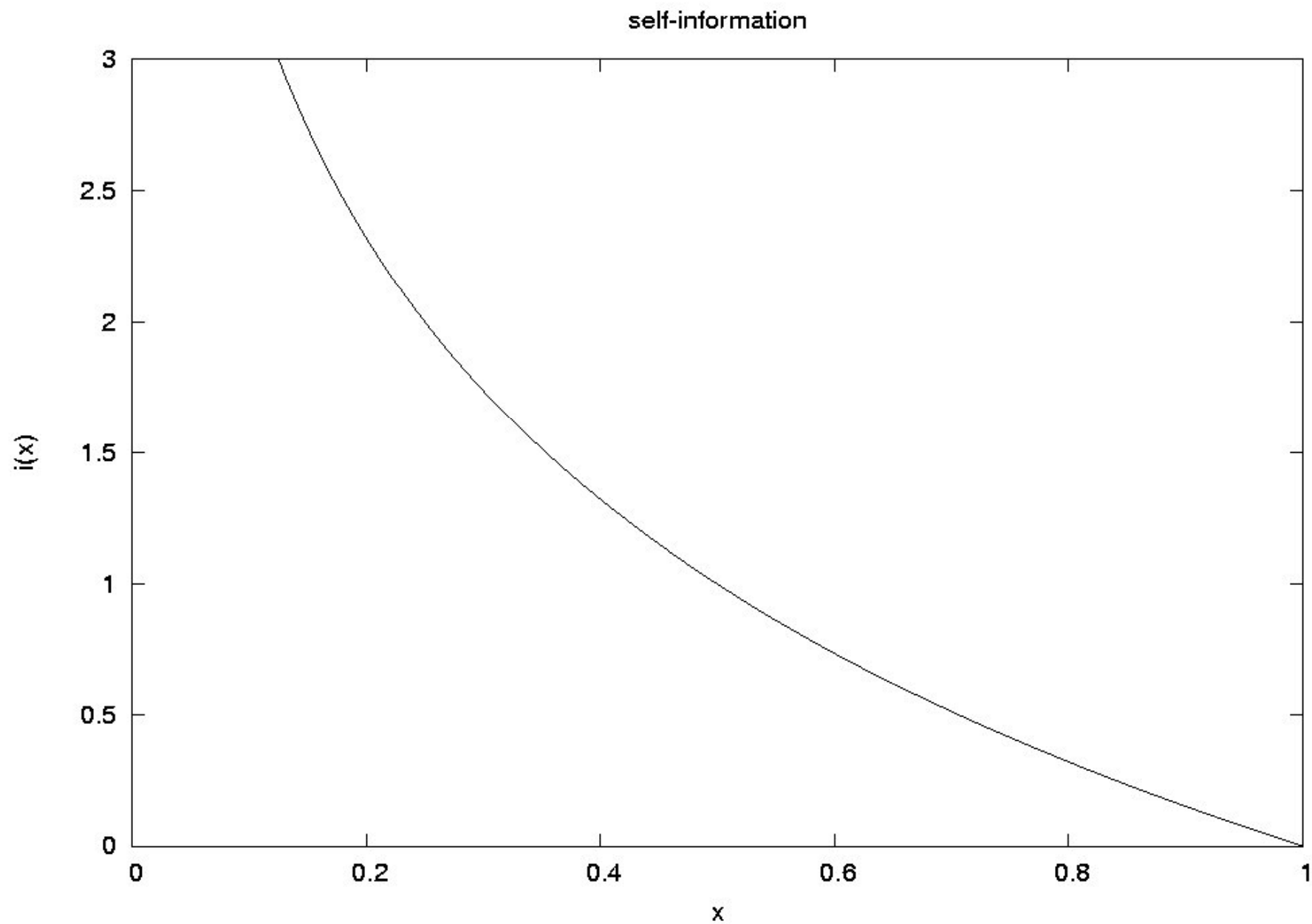
$$i(x) = -\log_s P(x)$$

情報量の単位

$(s = 2) \longrightarrow [\text{bit}](\text{ビット})$
 $(s = e) \longrightarrow [\text{nat}](\text{ナット})$
 $(s = 10) \longrightarrow [\text{decit}](\text{デシット})$

1ビットは確率0.5の事象が起きたことを知る情報量。以後は、ビットだけを扱う。

自己情報量の外形



練習

次の事象の自己情報量を求めよ。

(1)

a : 2枚のコインを投げて両方とも裏がでる。

(2)

b : 52枚のトランプから絵札を1枚引く

(3)

c : アルファベットの書いてある26個の玉から、 c の玉を取り出す。

事象系

単独の事象ではなくて、事象の集合を考える。
事象の集合とそれが生じる確率を以下のように表す。

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n \\ P(x_1) & , & P(x_2) & , & \cdots & , & P(x_n) \end{array} \right\}$$

ここで、

$$0 \leq P(x_i) \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

このように、確率が定められた事象の集合を事象系と言う。

事象系例

(1) コイントスの事象系

$$C = \left\{ \begin{array}{cc} \text{表} & , & \text{裏} \\ \frac{1}{2} & , & \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

(2) サイコロの事象系

$$D = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

(3) トランプを引いたときの数の事象系

$$T = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & , & 2 & , & \cdots & , & K \\ \frac{1}{13} & , & \frac{1}{13} & , & \cdots & , & \frac{1}{13} \end{array} \right\}$$

練習

次の事象系を形式的に示せ。

(1) トランプを引いたときのカードの事象系

(2) 26文字のアルファベットと空白文字が書かれた、27個の玉が袋に入っている。その袋から1つの玉をとりだし事象系。

事象系の平均情報量

定義(エントロピー)

事象系 X のすべての事象に対して、その情報量の平均をとったものを**平均情報量**または**エントロピー**という。

ある事象系 X が以下のように与えられるとする。

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n \\ P(x_1) & , & P(x_2) & , & \cdots & , & P(x_n) \end{array} \right\}$$

このとき、平均情報量 $H(X)$ は自己情報量を元に以下のように表される。

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{x \in X} P(x) i(x) \\ &= - \sum_{x \in X} P(x) \log P(x) \end{aligned}$$

平均情報量の計算例

$$\begin{aligned} (1) \quad C &= \left\{ \begin{array}{cc} \text{表} & , \quad \text{裏} \\ \frac{1}{2} & , \quad \frac{1}{2} \end{array} \right\} & H(C) &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \\ & & &= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2 \\ & & &= 1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad D = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & 6 \\ \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} H(D) &= -\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \\ &= 6 \times \frac{1}{6} \log_2 6 \\ &= \log_2 6 \\ &= 2.585 \dots \end{aligned}$$

練習

次の確率事象系(情報源)の平均情報量(エントロピー)を求めよ。)

(1)

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & , & a_2 \\ \frac{1}{4} & , & \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

(2)

$$B = \left\{ \begin{array}{ccc} b_1 & , & b_2 & , & b_3 \\ \frac{1}{10} & , & \frac{3}{10} & , & \frac{6}{10} \end{array} \right\}$$

(3) $C = \left\{ \begin{array}{ll} c_1 & \text{さいころを振って1、または4の目} \\ c_2 & \text{さいころを振って1、4以外の目} \end{array} \right\}$

2事象の事象系の平均情報量

ある事象系 X が以下のように与えられるとする。

$$X = \left\{ \begin{array}{cc} x & , \quad \bar{x} \\ p & , \quad 1 - p \end{array} \right\}$$

引数が、事象系

このとき、エントロピーは次式となる。

$$H(X) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$$

この形の事象系は非常によく用いられ、この右辺の形の関数をエントロピー関数といい以下のように表す。

$$\mathcal{H}(p) \equiv -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$$

引数が、数

エントロピー関数の外形 $\mathcal{H}(p)$

