

線形符号(10章)

1

組織符号

組織符号

情報部分と検査部分(冗長部分)が明確に分離できる通信路符号を組織符号という。

組織符号は以下のように表現できる。

通信路符号=情報部分+検査部分

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_k}_{\text{情報部分}}, \underbrace{p_1, \dots, p_{n-k}}_{\text{検査部分}}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

2

2元(n,k)符号

$w_i \in \{0,1\}$ であり、符号長が n ビット、情報部分が k ビットの(通信路)符号を2元 (n,k) 符号という。

このとき、検査ビットは、当然 $n-k$ ビットである。

情報ビットから、検査ビットの作成には様々な方法が考えられる。この中で、情報ビットを線形写像して(行列演算で)検査ビットを作成する方法が応用上重要である。

線形符号

3

線形符号

組織符号

情報ビット $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ から、検査ビット $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n-k})$ を生成する定義式が、線形写像で表されるような通信路符号を線形符号という。

$$\begin{cases} p_1 = p_{11}x_1 + p_{21}x_2 \cdots + p_{k1}x_k \\ \vdots \\ p_{n-k} = p_{1(n-k)}x_1 + p_{2(n-k)}x_2 \cdots + p_{k(n-k)}x_k \end{cases}$$

4

情報・検査関連行列

線形符号では、検査ビットの定義式は以下のように行列の形で表現可能である。

$$\mathbf{p} = \mathbf{xP}$$

$$(p_1, \dots, p_{n-k}) = (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \end{bmatrix}$$

この行列 $\mathbf{P}$ を、情報・検査関連行列という。

5

生成行列

線形符号では、情報ビットから符号を行列を用いて表現可能である。

$$\mathbf{w} = \mathbf{xG}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{x} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix}$$

$$(w_1, \dots, w_n) = (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & p_{21} & p_{22} & & p_{2(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{k(n-k)} \end{bmatrix}$$

この行列 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ を、生成行列という。

6

生成行列例

(7,4)ハミング符号は、線形符号である。したがって、情報ビットから、行列を用いて検査ビットおよび符号を構成可能である。この行列を示す。

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_7)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3)$$

$$= (\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

$$p_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$p_2 = x_2 + x_3 + x_4$$

$$p_3 = x_1 + x_2 + x_4$$

7

前のスライドより、(7, 4)ハミング符号の情報・検査関連行列 $\mathbf{P}_H$ および生成行列 $\mathbf{G}_H$ が以下のように表現できる。

$$\mathbf{P}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8

例

生成行列が以下で与えられるとする。

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき、以下の情報ビットから符号を生成せよ。

(1) $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, 1)$

(2) $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 1, 1)$

9

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{x}_1 \mathbf{G}_H$$

$$= (1, 0, 0, 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{x}_2 \mathbf{G}_H$$

$$= (0, 1, 1, 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$$

10

練習

前のスライドの生成行列 $\mathbf{G}_H$ で符号を生成するとする。
このとき、次の情報ビットに対する符号を求めよ。

(1) $\mathbf{x}_1 = 0001$

(2) $\mathbf{x}_2 = 0110$

(3) $\mathbf{x}_3 = 1101$

(4) $\mathbf{x}_4 = 1110$

11

練習

垂直・水平パリティ符号は線形符号である。(9,4)垂直・水平符号に対して、情報・検査関連行列 $\mathbf{P}_O$ および生成行列 $\mathbf{G}_O$ を求めよ。

12

練習

前のスライドの生成行列 G_O で符号を生成するとする。
このとき、次の情報ビットに対する符号を求めよ。

- (1) $x_1 = 0001$
 (2) $x_2 = 0110$
 (3) $x_3 = 1101$
 (4) $x_4 = 1110$

13

検査行列

生成行列 $G = [I_k \ P]$ に対して、次の形の行列 H を
検査行列という。

$$H = [{}^t P \ I_{n-k}]$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{k1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{k2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{1(n-k)} & p_{2(n-k)} & \cdots & p_{k(n-k)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14

情報ビット $x = (x_1, \dots, x_k)$ に対して、生成行列 $G = [I_k \ P]$ で
符号 $w = (w_1, \dots, w_n)$ が生成されたとする。このとき、検査
行列 $H = [{}^t P \ I_{n-k}]$ に対して、次式が成り立つ。

$$w^t H = 0$$

$$\therefore (w_1, \dots, w_n) \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \\ 1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-k})$$

15

証明

$w = xG$ であるので、 $w = x[I_k \ P]$

$$w^t H = x[I_k \ P] [{}^t P \ I_{n-k}]$$

$$= (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} p_{11} + p_{11} & p_{12} + p_{12} & \cdots & p_{1(n-k)} + p_{1(n-k)} \\ p_{21} + p_{21} & p_{22} + p_{22} & \cdots & p_{2(n-k)} + p_{2(n-k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} + p_{k1} & p_{k2} + p_{k2} & \cdots & p_{k(n-k)} + p_{k(n-k)} \end{bmatrix}$$

16

$$\therefore w^t H = (x_1, \dots, x_k) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (0, 0, \dots, 0)$$

別証明

$$G^t H = [I_k \ P] [{}^t P \ I_{n-k}]$$

$$= [I_k \ P] \begin{bmatrix} P \\ I_{n-k} \end{bmatrix}$$

$$= P + P$$

$$= 0$$

QED

17

(7, 4)ハミング符号の生成行列 G_H および検査行列 H_H
は以下のように表現できる。

$$G_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18

実際、

$$G_H^t H_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19

練習

垂直・水平パリティ符号は線形符号である。(9,4)垂直
水平符号に対して、検査行列 H_O を求めよ。

また、 $G_O^t H_O = 0$ を確かめよ。

20

シンドローム

シンドローム

2元 (n, k) 線形符号の受信語が $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ であるとき、受信語から次式で定義される長さ $n-k$ の2元系列 $s = (s_1, \dots, s_{n-k})$ をシンドロームという。

$$s = y'H$$

$$\therefore (s_1, \dots, s_{n-k}) = (y_1, \dots, y_n) \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1(n-k)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{k(n-k)} \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

受信語の誤り位置を診断するための情報

21

シンドロームの性質

$$s = y'H$$

である。

一方、受信語 $y = (y_1, \dots, y_n)$ は符号語 $w = (w_1, \dots, w_n)$ と誤りベクトル $e = (e_1, \dots, e_n)$ を用いて次のように表現できる。

$$y = w + e$$

$$\therefore (y_1, \dots, y_n) = (w_1 + e_1, \dots, w_n + e_n)$$

したがって、シンドロームに関して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} s &= y'H \\ &= (w + e)'H \\ &= \underbrace{w'H}_0 + e'H \\ &= e'H \end{aligned}$$

22

このように、実はシンドロームは誤りベクトルのみで定まる。よって、以下が成り立つ。

$$s = 0 \longleftrightarrow \text{誤りなし}$$

$$s \neq 0 \longleftrightarrow \text{誤りあり}$$

シンドロームにより、誤りそのものの検出 および誤り位置の導出が可能である。(1ビット誤り)

23

シンドロームを用いた誤り訂正

符号語より、シンドロームが $s = y'H$ のように計算可能である。このシンドロームが検査行列の H の i 列と等しいとする。このとき、シンドロームと誤りベクトルの関係式から誤りベクトルは $e = (0, \dots, e_i, \dots, 0)$ であり、送信符号は

$$w = y + e$$

$$\begin{aligned} \therefore (w_1, \dots, w_i, \dots, w_n) &= (y_1 + e_1, \dots, y_i + e_i, \dots, y_n + e_n) \\ &= (y_1, \dots, y_i + 1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

であることがわかる。

24

練習

以下の各系列は次の検査行列を持つ(7, 4)ハミング符号である。このとき、シンドロームを計算することにより、誤り訂正を行え。

$$H_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) $y_1 = 1110111$

(2) $y_2 = 0111101$

(3) $y_3 = 0101000$

(4) $y_4 = 0100110$

25

練習

垂直・水平パリティ符号は線形符号である。(9,4)垂直水平符号に対して、先ほど求めた検査行列 H_O を求いてシンドローム $s = (s_1, s_2, \dots, s_5)$ を計算できる。

このシンドロームを用いて以下の符号の誤りを訂正せよ。

(1) $y_1 = 110100000$

(2) $y_2 = 011010011$

(3) $y_3 = 110101001$

(4) $y_4 = 000101010$

26

情報伝達モデル(複雑版)

The diagram illustrates a complex information transmission model. It starts with an '情報源' (Information Source) on the left, which feeds into '情報源符号化 (5, 6章)' (Source Coding, Chapters 5 and 6). This is followed by '通信路符号化 (8章)' (Channel Coding, Chapter 8). The signal then enters the '通信路' (Communication Channel, Chapter 7), which is affected by '外乱(雑音)' (Interference/Noise). After the channel, the signal goes through '通信路復号化 (8章)' (Channel Decoding, Chapter 8) and finally '情報源復号化 (5, 6章)' (Source Decoding, Chapters 5 and 6) to reach the '受信者' (Receiver) on the right. The diagram also includes a feedback loop from the receiver back to the source, labeled '情報' (Information). The entire process is labeled '情報伝達モデル(複雑版)' (Complex Information Transmission Model).

27

5