8. クラスNPと多項式時間帰着

1

クラスPは決定性TMによって定義された。
この計算機モデルを非決定性に変更すると、
問題のクラスがどのように変化するのかを考察する。

実は、厳密な意味では、この違いは
明らかになっていない。
(つまり、決定性TMと非決定性TMの能力
の差が、多項式倍しかないのかどうかは、
未解決である。)

2

8-1.非決定性時間限定TM

まず、非決定性TMの計算時間を定める。

定義: 非決定性TMの計算時間

非決定の計算過程は、初期様相を根とする木として
表現可能である。
この計算の木において、最も浅い受理様相の深さを
NTMの計算時間と定義する。
すなわち、NTMが非決定的選択を繰り返したとき、
最も速く受理状態に達するときの総ステップ数が、
NTMの計算時間である。

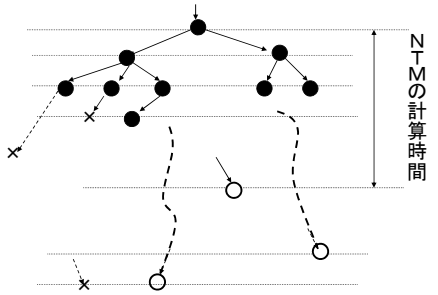
定義: 非決定性TMの計算時間

非決定性計算において、ある様相への初期様相から
の遷移系列を、計算パスと呼ぶ。

NTMの計算時間とは、受理様相までの最も短い
計算パスの長さともみなせる。

3

計算の木と非決定性計算時間



○ :受理様相
× :非受理様相
● :様相

4

時間限定非決定性TM

定義: 時間限定非決定性チューリングマシン

入力サイズが n のとき、
$T(n)$ 時間限定非決定性チューリングマシン
($T(n)$ -NTM)とは、
計算時間が $T(n)$ 以下であるような非決定性チュー
リングマシン(NTM)のことである。

5

8－2. クラスNPの定義

定義: クラスNP

$NTIME(T(n)) = \{L \mid L$は$O(T(n))$時間限定NTM
で判定される言語$\}$

と定義する。

このとき、クラスNPを、

$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$$

と定義する。

つまり、非決定性多項式時間で
計算可能な問題の集合がNPである。

6

クラスPとクラスNPの名前の由来

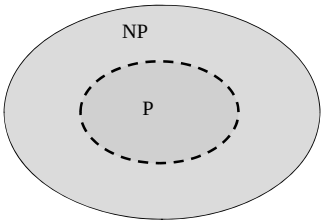
クラスP　：多項式時間TM
（Polynomial Time Turing Machine)
で解ける問題の集合

クラスNP　：非決定性多項式時間TM
（Non-deterministic Polynomial Time TM)
で解ける問題の集合

7

クラスPとクラスNPの関係

定義から明らかであるが、
NPはPを包含する。



8

8－3. クラスNPの問題

問題

名称：ハミルトン閉路問題HC
インスタンス：グラフ $G=(V,E)$

問：
Gにハミルトン閉路が存在するか？
すなわち、V のすべての点を
通るような単純な閉路が存在するか？

また、ハミルトン閉路問題のYESのインスタンスからなる言語を

$$L_{HC}=\{w \mid w\text{はハミルトン閉路をもつグラフ}\}$$

と表す。

9

非決定性計算例

L_{HC} を判定する次のような、
非決定性多項式時間アルゴリズム存在する。
なお、

$$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$$

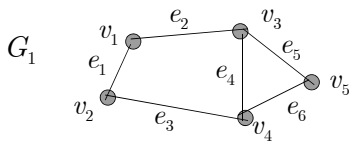
とする。

アルゴリズム：　非決定性ハミルトン閉路判定

1. 辺 e_1 から e_m まで、
ハミルトン閉路で辺を用いるかどうかを、
非決定的に定める。
2. 1.で定めた辺集合が、ハミルトン閉路になっているかどうかをチェックする。
3. 2. において、ハミルトン閉路になっていいればYES、なってなければNO

10

ハミルトン閉路問題のインスタンス1



$$\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_4),(v_3,v_5),(v_4,v_5)\}$$

G_1 には、

$$e_1e_3e_6e_5e_2$$

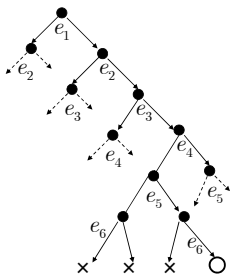
というハミルトン閉路が存在する。
よって、

$$G_1 \in L_{HC}$$

11

非決定性計算

$G_1 \in L_{HC}$であるが、その受理までの計算をみてみる。



この木において、
右ならその辺を用いて、
左なら用いないとする。

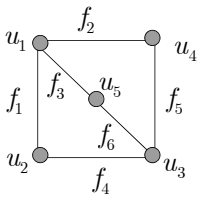
この受理される場合の
計算パスの長さは
明かに $O(m)$ である。

このように、ハミルトン閉路問題は、
明らかにNPに属する。

12

インスタンス2

$G_2 = (U, F)$



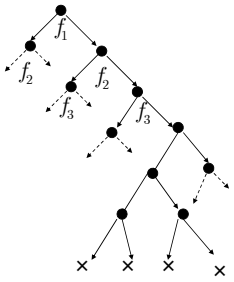
G_2 には、ハミルトン閉路が存在しない。
よって、

$$G_2 \notin L_{HC}$$

13

非決定性計算

$G_2 \notin L_{HC}$であるので、すべての計算パスが非受理の様相に遷移する。



この受理される場合の計算パスの長さは明かに$O(m)$ である。

このように、ハミルトン閉路問題は、明らかにNPに属する。

14

以上より、
次の命題が成り立つ。

性質

ハミルトン閉路問題はクラスNPに属する。
つまり、

$$L_{HC} \in NP$$

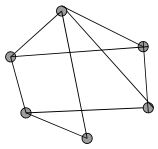
である。

15

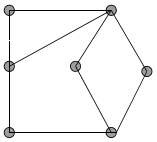
練習

次のグラフにハミルトン閉路があるかどうかを決定せよ。

（1）



（2）



16

クラスNPの問題2

問題

名称：SAT（充足可能性問題、SATisfiability problem)
インスタンス：和積形の論理式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

問：$f = 1$ となる $x_1, \cdots, x_n$ への0, 1の割り当てが存在するか？

また、SATのYESのインスタンスからなる言語を次のように表す。

$$L_{SAT} = \{f \mid f = 1\text{となる}x_1, \cdots, x_n\text{への}0, 1\text{の割り当てが存在する。}\}$$

17

充足可能なインスタンス

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= (\overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4})(x_2)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3 + \overline{x_4})$$

この例では、

例えば、

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$$

と割り当てればブール関数は充足される。

よって、

$$f_1 \in L_{SAT}$$

である。

18

充足不可能なインスタンス

$$f_2(x_1,x_2)=(x_1+x_2)(x_1+\overline{x_2})(\overline{x_1})$$

このインスタンスは、
恒偽であり、充足不可能である。

よって、

$$f_2 \notin L_{SAT}$$

19

SATの非決定性アルゴリズム

性質

SATはNPに属する。
すなわち、

$$L_{SAT} \in NP$$

である。

証明

SATを解く、非決定性多項式時間アルゴリズムを
示せばよい。
次に、そのアルゴリズムを示す。

20

アルゴリズム: 非決定性SAT判定

1. 変数に対して x_1 から x_n まで、
   0か1を非決定的に割り当てる。
2. 1.での割り当てで、ブール関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$
   が1かどうかをチェックする。
3. 2. において、1になっていいれば
   YES、なってなければNO

このアルゴリズムが、非決定性多項式時間であることは
明らかである。
以上より、

$$L_{SAT} \in NP$$

QED

21

練習

L_{SAT} に属する3変数以上のブール関数と、
L_{SAT} に属さない3変数以上のブール関数を示せ。

22

8－4 TMとNTMの時間の関係

前に、DTMによってNTMをシミュレートできることを示した。
ここでは、時間まで考慮に入れて考察する。

性質

$T(n)$を $T(n)>n$であるような関数とする。
このとき、すべての $T(n)$時間限定NTMに対して、
それと等価な $2^{O(T(n))}$ 時間限定DTMが存在する。

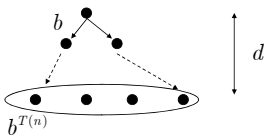
証明

Nを $T(n)$ 時間で動作するNTMとする。
前にみてきたように、
NTMの計算の木を幅優先で探索しながらシミュレートする
3テープ決定性DTM D_1 が存在する。
まず、この D_1の計算時間が$2^{O(T(n))}$であることを示す。

23

Nの分岐の最大値を b とする。（つまり、計算木において、
どの節点に対しても、高々b の子供しかいない。）

Nの計算木において、最も浅い受理様相の深さを d とする。
このとき、深さ $d=T(n)$ であり、
このには深さには高々 $b^{T(n)}$ の頂点しかない。



また、根から深さ d までの計算木に現れる
頂点の総数は、$2b^{T(n)}$ 以下、すなわち
$O(b^{T(n)})$ である。

24

計算木の各頂点に対して，
シミュレーションは$O(T(n))$時間で行える。

よって、D_1 の計算時間は、

$$O(T(n)) \times O(b^{T(n)}) = 2^{O(T(n))}$$

である。

D_1 は3テープTMであったので、これを
1テープTM D_2 でシミュレートする。
このシミュレートは、2乗時間で行える。
よって、 D_2 は、

$$\left(2^{O(T(n))}\right)^2 = 2^{2\times O(T(n))} = 2^{O(T(n))}$$

時間でNをシミュレートすることができる。 $\mathcal{QED}$

25

8－5.検証可能性

ここでは、クラスNPのもう一つの特徴づけを与える。
クラスNPは、直感的には、答えがの正当性が
多項式時間で検証できる問題の集合ともみなせる。

定義： 検証装置、証拠

あるアルゴリズムVに対して、言語Aを
次のように定義できるとき、VをAの検証装置
（Verifier)という。

$A = \{w \mid V$は文字列cに対して$< w,c >$を受理$\}$

このとき、cを証拠(witness)という。
（なお、証拠としては、答えそのものであること
が多い。ただし、答え以外の証拠もあるので、
注意が必要。）

26

多項式時間検証可能性

定義： 多項式時間検証可能性

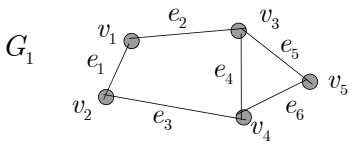
検証装置の時間は、w の長さに対してのみ
計られる。したがって、多項式時間検証装置
とは、w の長さに対して，多項式時間でcの検証
を行うアルゴリズムである。言語Aが決定的多項
式時間検証装置をもつとき、Aを多項式時間検証
可能という。

27

多項式時間検証の例1

性質

L_{HC} は多項式時間検証可能である。



$$< w,c >=< G, e_1e_2e_3e_5e_6 >$$

ここで、$c = e_1e_2e_3e_5e_6$

c は順序が異なるので、ハミルトン閉路ではないが，
ハミルトン閉路で用いる辺集合を与えている。
これより、多項式時間検証可能である。

$\mathcal{QED}$

28

多項式時間検証の例2

性質

L_{SAT} は多項式時間検証可能である。

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$= (\overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4})(x_2)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3 + \overline{x_4})$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$$

$$< w,c >=< f_1(x_1,x_2,x_3,x_4), 0111 >$$

この証拠のチェックは明らかに多項式時間で
行える。

$\mathcal{QED}$

29

クラスNPと検証可能性

ここでは、クラスNPが多項式時間検証可能な言語と
等価であることを示す。

性質

言語Lがクラスに属するための、必要十分条件
はLが多項式時間検証可能であることである。

証明

$w \in L$を判定するNTMからを $< w,c >$ を検証する
検証装置Vを構成し、
$< w,c >$を検証するVから
$w \in L$ を判定するNTMを構成する。

30

NTM → V

アルゴリズム： 検証装置によるNTMのシミュレーション

1. NTMの非決定的に選択される記号を
すべて集めて 証拠 c とする。
2. c の表す枝での計算をVはシミュレートする。
3. 2. においてNが受理するならVも受理し、
Nが拒否するならVも拒否する。

このシミュレーションは明らかに正しく動作する。

31

V → NTM

Vは n^k 時間で動作するDTMと仮定する。

アルゴリズム： NTMによる検証装置のシミュレーション

1. 長さ n^k の文字列 c を非決定的に選択する。
2. 入力 $< w, c >$ に対して、
VをNTMでシミュレートする。
（VはDTMなので、NTMで容易にシミュレートできる。）
3. 2. において、Vが受理するなら受理し、
Vが拒否するなら拒否する。

以上より、クラスNPは多項式時間検証可能な
問題の集合でもあることが示された。

QED

32

8－6. 多項式時間帰着

ここでは、問題間の難しさを調べるために、
多項式時間帰着について述べる。
直感的には、多項式時間帰着とは
問題の変換のことである。

ある問題を解く際に、他の問題が利用可能な場合が
よくある。この際に、もし利用される側の問題に効率的な
アルゴリズムが存在していたならば、
利用する側の問題も効率よく解ける可能性がある。

帰着の考え方は問題が難しいことを示すときにも利用される。
難しいことがわかっている問題Aのすべてのインスタンスが、
別の問題Bに変換可能ならば変換された問題Bを利用して、
元の問題Aに対するアルゴリズムが得られる。このことから
問題Bは、問題Aより易しくはないことを示している。つまり、問
題Bも難しいといえる。

33

多項式時間帰着の定義

定義： 多項式時間帰着

言語Aと言語Bに対して、すべての $w \in A$ に対して、

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

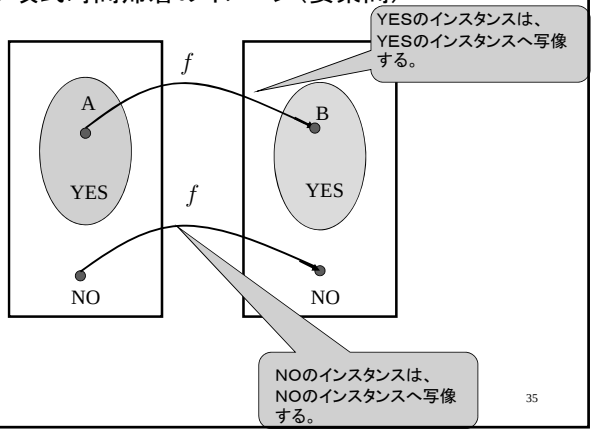
であるような多項式時間帰着関数 $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ が存在
するとき言語Aは言語Bに多項式時間（多対一）帰着
(Polynomial time many to one reduction)
可能という。ここで、多項式時間帰着関数とは、関数の
計算（変換）が多項式時間で行えるもののことである。
言語Aから言語Bへ多項式時間帰着可能であることを、

$$A \leq_m^P B \quad \text{あるいは} \quad A \leq B$$

と書く。

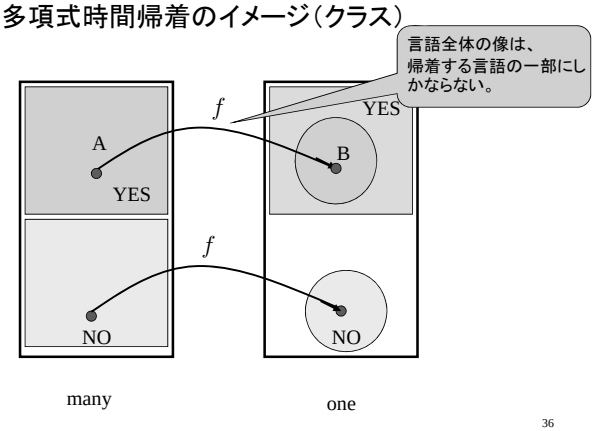
34

多項式時間帰着のイメージ（要素間）



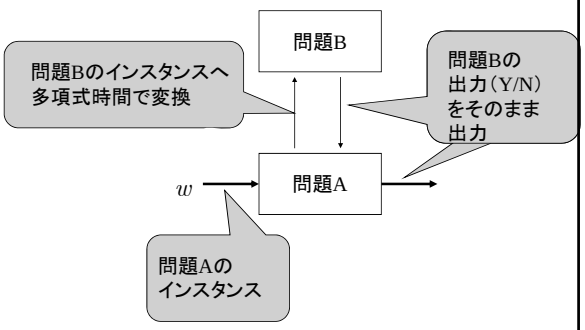
35

多項式時間帰着のイメージ（クラス）



36

帰着のイメージ



37

帰着とクラスP

帰着の性質から次の命題が成り立つ。

性質

$A \leq_m^P B$ かつ $B \in P$ ならば $A \in P$ である。

証明　問題Bを判定する多項式時間TM(アルゴリズム)をTとし、
f をAからBへの多項式時間帰着とする。

このとき、TM Tを利用して、
問題Aを判定するTM T'(アルゴリズム)が構成できる。

アルゴリズム: 帰着

Aへのインスタンス w に対して、
1. $f(w)$ を計算する。
2. 入力 $f(w)$ に対してTを動作させ、
その出力をT'の出力とする。

このTM T'は明らかに多項式時間で動作する。 $\mathcal{QED}$

38

帰着の例

ここではブール関数の問題からグラフの問題への
帰着を示す。
まず、これらの問題を示す。

39

3SAT

ここでは、SATを特殊化した問題を考える。
そのためにSATの問題を再考する。

定義: 論理式関連

ブール変数に対してその否定と肯定を
リテラル(literal)という。例えば, $x_1, \overline{x_1}$ 等がリテラル。
また、リテラルを論理和で結んだ式を節(clause)という。
例えば、 $(x_1 + x_2 + \overline{x_3})$ 等が節。
節を論理積で結んだ式が和積標準形(Conjective
Normal Form)であり、CNF論理式と約される。

定義: 3SAT

すべての節が3つのリテラルからなるような
CNF論理式(3CNF)に対して、
充足可能なものすべてからなる言語を
3SATと呼ぶ。

40

問題

名称:3SAT(3充足可能性問題、
3SATisfiability problem)
インスタンス:3CNF論理式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

問: $f = 1$ となる $x_1, \cdots, x_n$ への0, 1の
割り当てが存在するか？

変数の個数
自体には
制限が無い
ことに注意

また、この問題に対応する言語を、

$L_{3SAT} = \{f \mid f$は充足可能な3CNF$\}$

と定める。

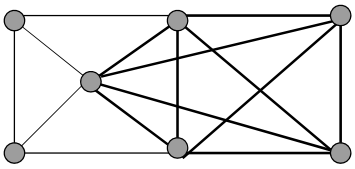
41

kクリーク問題

定義: kクリーク

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、
完全部分グラフをクリーク(clique)という。
k 点の完全部分グラフを k クリークという。

インスタンス



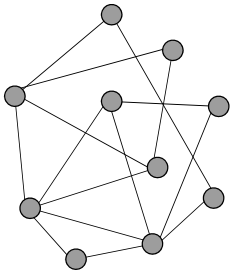
5クリークの例

42

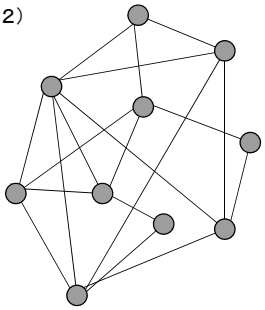
練習

次のグラフから最大のクリークを見つけよ。

（1）



（2）



43

問題

名称:kクリーク、
インスタンス: $< G,k >$
問:G中に、kクリークが存在するか？

また、この問題に対応する言語を、

$$L_{CQ} = \{< G,k > | \ G\text{はk}\text{クリークを持つ}\circ\}$$

と定める。

44

多項式時間帰着

性質

L_{3SAT} は L_{CQ} に多項式時間帰着可能である。

証明

f を p 個の節を持つ次のようなn変数3CNFとする。

$$f(x_1,\cdots,x_n) = (a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_p+b_p+c_p)$$

ここで、各 a_i,b_i,c_i はリテラルを意味し、
$a_i,b_i,c_i \in \{x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n}\}$ である。

45

この f から kクリーク問題のインスタンスである
$< G,k >$を生成する。
すなわち、グラフ G と整数 k を生成する。

まず、整数 k は節数 p に設定する。すなわち、

$$k \equiv p$$

とする。

次にグラフ G の構成法を示す。

まず、各a_i,b_i,c_i に対応する点集合を作成し、
各節ごとの k グループに分ける。
辺集合は次の規則で定める。

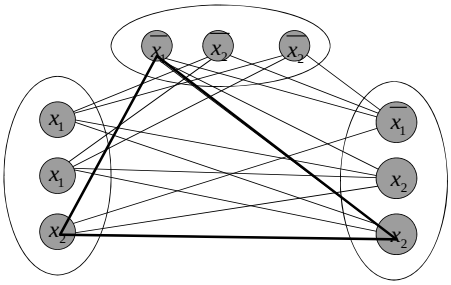
1. 同じグループ内の点間には辺を引かない。
2. 異なるグループ間には、矛盾がない限り
全ての点間に辺を引く。

（ここで、矛盾とは、 $a_i = x_s, a_j = \overline{x}_s$ のように
互いに否定の関係にあるものを指す。）

46

$f(x_1,x_2) = (x_1+x_1+x_2)(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_2})(\overline{x_1}+x_2+x_2)$

に対するグラフG の構成例を示す。



47

ここで、この帰着が正しく動作することを示す。すなわち、
「f が充足可能であるための必要十分条件が、
G に k クリークが存在することである。」ことを示す。

必要性:

f に充足可能な割り当てが存在すると仮定する。
この割り当てでは、全ての節で少なくとも一つのリテラルが
真である。G においてその真である点を選ぶ。
そのとき、G の構成法から選ばれた点間にはすべて
辺があることがわかる。したがって、k クリークを持つ。

48

十分性:

G に k クリークがあると仮定する。
同じグループの点どうしには辺がないので、クリークの
どの頂点も異なるグループに属する。よって、
すべてのグループ中の一つの点がクリークに属する。

このとき、クリークに属する点が真となるように、
割り当てを設定すること（リテラルに真偽の値を設定すること）
ができる。
（矛盾するリテラル間には辺がないので、この割り当ては
可能である。）

以上より、 $f \in L_{3SAT} \Leftrightarrow < G,k > \in L_{CQ}$ であり、
命題が証明された。

$\mathcal{QED}$

49

練習

次の3CNFのインスタンスに対して,
帰着で得られるグラフ G を構成せよ。

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(\overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_1} + x_2)(\overline{x_2} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

また、この f に充足可能な割り当てを見つけ、
G に対応する4クリークを見つけよ。

50