6. チューリングマシンの符号化と
計算不可能性

1

6－1. TMの符号化

これまで、チューリングマシンで様々な“計算”が行える
ことを見てきた。ここでは、チューリングマシンは、一種の
“数”であることをみていく。

$$T=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$$

TMの数学的定義

$$\langle T\rangle = 11110\cdots0110\cdots01\in\{0,1\}^*$$

TMの符号化

2

アイディア

1:を区切り記号をして用いる。

0:を一進数の“数”として用いる。

一進数

一種類の記号で数を表す。

10進数	一進数
1	0
2	00
3	000
4	0000
5	00000
n	0^n

3

状態の符号化

状態を符号化する。
ここで、状態の名前は重要ではなく、
状態の数だけが重要である。

$$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_l\}$$

$$\cdots10^l1\cdots$$

両脇の1は、
（アルファベット等）
他の集合との境目
を意味する。

4

アルファベットの符号化

アルファベットを符号化する。
ここでも、記号の名前は重要ではなく、
記号の数だけが重要である。

入力アルファベット

$$\Sigma=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\} \quad \cdots10^m1\cdots$$

テープアルファベット

$$\Gamma=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1},\cdots,a_n\} \quad \cdots10^n1\cdots$$

前半は入力
アルファベットを
表す。

5

受理状態の符号化

受理状態の集合を符号化する。
ここでは、状態の添え字の集合に注目して、
符号化する。

受理状態集合

$$F=\{q_{i_1},q_{i_2},\cdots,q_{i_k}\}$$

$$\cdots110^{i_1}110^{i_2}11\cdots110^{i_k}11\cdots$$

6

初期状態と空白記号の符号化

初期状態は、常に、

$q_1 \in Q$

であるとすれば、符号化の必要がない。

空白記号は、常に、

$B = a_n \in \Gamma$

であるとすれば、符号化の必要がない。

7

状態遷移関数の符号化

状態遷移関数を符号化する。

ヘッドの移動方向を次のように符号化する。

$R = 0$

$L = 00$

これにより、一つの状態遷移関数を次のように符号化する。

$\delta(q_{j_1}, a_{j_2}) = (q_{j_3}, a_{j_4}, 0^{j_5})$

⇕

$c = 0^{j_1}10^{j_2}10^{j_3}10^{j_4}10^{j_5}$

空集合以外の状態遷移関数を符号化する。

$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_h\}$

⇕

$\cdots 11c_1 11c_2 11 \cdots 11c_h 11 \cdots$

8

これらをまとめて、

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

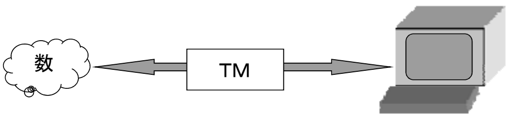
⇕

$\langle T \rangle =$

$11110^l 110^m 110^n 1110^{i_1} 110^{i_2} 11 \cdots 110^{i_k} 111c_1 11c_2 11 \cdots 11c_h 111$

$\in \{0,1\}^*$

このように、TMは数とみなせる。
また、TMは　$\{0,1\}^*$　上の文字列
ともみなせる。



9

練習

次のTM　T を符号化せよ。

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$\Gamma = \{0,1,X,Y,B\}$

$F = \{q_4\}$

δ	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)			(q_3, X, R)	
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)		(q_1, Y, R)	
q_2	$(q_2, 0, L)$		(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	
q_3				(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4					

10

入力テープの符号化

入力記号列も、次のように符号化できる。

$x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p}$

⇕

$\langle x \rangle = 10^{i_1}10^{i_2} \cdots 10^{i_p} \in \{0,1\}^*$

11

6－2. 万能チューリングマシン

符号化によって、どのようなTMも、$\{0,1\}^*$の文字列で
表現できることがわかった。
また、入力記号列も、$\{0,1\}^*$ の文字列で表現できること
もわかった。
このように符号化されているTM　Tを入力として、
Tの動作をシミュレートするTM　Uを設計することができる。
つまり、任意のTM　Tと入力 x の組に対して、
その符号が与えられたときに、Tの動作をシミュレートする
TMを万能TMという。

12

万能TM

次のような、5テープTM　UでどんなTM　Tの動作でも
シミュレートすることができる。

$\langle T,x\rangle = \langle T\rangle \circ \langle x\rangle$ Uへの入力

$100\cdots01001\cdots$ Tのテープ

$11001000100001001011\cdots$ Tの状態遷移関数 δ

0000 Tの状態

0000100000 ワークテープ

このように、他の任意のTMをシミュレートするTMを
万能TM（Universal Turing Machine、UTM)という。

UTMの動作

(i)UはTの現在の状態が受理状態かチェックする。
（状態テープの内容が、符号化の一部と同じか
チェックする。）
(ii)状態テープの内容をワークテープにコピーし、
Tのヘッド位置の記号を1に続けてコピーする。
このとき、状態遷移関数　の前半部の書式になる。
(iii)ワークテープの内容と一致する状態遷移関数を
入力テープから検索する。(見つからない場合は、
非受理とする。）
(iv) (iii)が見つかったら後半部にしたがって、第2テープ、
第4テープ内容を更新する。（シフト動作が必要となるが、
実現可能である。）

TMとUTM

ここでは、TMやUTMを一種のブラックボックスをみなす。

$x \longrightarrow$ [TM　T] $\longrightarrow Y\ or\ N$

$\langle T,x\rangle \longrightarrow$ [UTM　U] $\longrightarrow Y\ or\ N$

６－３．TMの限界（計算の限界）

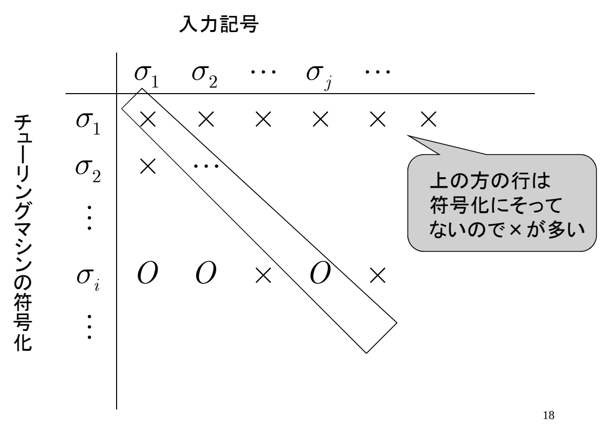
TMは、現在のコンピュータが実行できるものは、
すべて実行することができる。
コンピュータによって、実現されている様々なソフトウェア
を考えると、TMで何でも計算可能のように思えてしまう。
しかし、TMで受理できない言語が存在する。
これは、コンピュータには、原理的に限界があることを示している。

計算の表

TMは、$\{0,1\}^*$の文字列であり、
入力も、$\{0,1\}^*$の文字列である。
いま、$\{0,1\}^*$の文字列すべてを次のように並べることができる。

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 00, \sigma_4 = 01, \cdots, \sigma_\infty$$

ここで、 σ_i を縦横に配置して2次元の表をつくる。
(i,j) 成分は、TM　$\sigma_i = \langle T\rangle$　が入力 $\sigma_j = \langle x\rangle$　を
受理するときに○、その他は×とする。
（なお、 σ_i がTMの符号化にそっていなければ×とする。）
このようにして、2次元の表を構成することができる。



TMで認識不可能な言語

計算の表に基づいて次のような言語を構成できる。

$$L_{\overline{TM}} = \{\sigma_i \mid TM\sigma_i = \langle T\rangle \text{が} \sigma_i = \langle x\rangle \text{を受理しない。}\}$$

この言語は、計算の表において、
対角成分が×となるような σ_i すべてからなる。

このとき、次の命題が成り立つ。

言語 $L_{\overline{TM}}$ はいかなるTMによっても認識されない。

19

証明（対角線論法）

$L_{\overline{TM}}$を認識するTM　Tが存在するとする。（背理法の仮定。）
Tの符号化したものを σ_T とする。すなわち、$\sigma_T = < T >$ 。
計算の表より、
(σ_T, σ_T)
の要素は○か×である。

場合1：○のとき
このときは、
$\sigma_T = < T >$ は列 $\sigma_T = < x >$ を受理するので、$L_{\overline{TM}}$ には含まれない。しかし、Tは受理しており矛盾である。
場合2：×のとき
今度は、σ_T が $L_{\overline{TM}}$ に入るのにTは受理しない。
よって、こちらも矛盾である。

以上より、$L_{\overline{TM}}$ を認識する TM は存在しない。 $\mathscr{QED}$

20

TMにおける停止能力

必ず停止するTMでは認識できないが、
そのような制限のないTMでなら認識できる $\{0,1\}$ 上の
言語 $L_{\overline{halt}}$ が存在する。

証明

$$L_{\overline{halt}} = \{\sigma_i \mid TM\sigma_i = \langle T\rangle \text{は、列}\sigma_i \text{に対して停止して受理しない。}\}$$

とする。このとき、$L_{\overline{halt}}$ が命題の言語であることを示す。

21

この言語は、必ず停止する言語では認識できない。
背理法（対角線論法）により証明する。
必ず停止するTM　Tが存在すると仮定する。（背理法の仮定）
このとき、符号化によって、$\sigma_T = \langle T\rangle$ を得る。
このとき、列 σ_T を入力しても停止する。
すると、前の議論と同様にして、Tが σ_T を受理しても、
受理しなくても矛盾が生じる。

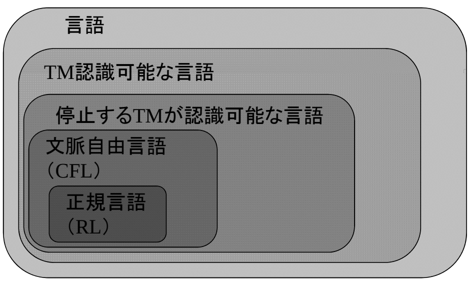
一方、必ず停止するという条件をはずすと、次のように
簡単に認識可能。
Tの列 σ_T に対する動作をシミュレートして、
非受理状態で停止したときのみ受理をする。

以上より、必ず停止するTMは、TMより能力が小さい。

$\mathscr{QED}$ 22

言語間の関係

言語には、TM認識不可能なもの、TM認識可能なもの、
文脈自由文法、正規言語がある。
これらは、真の包含関係を形成する。



23

６－４.言語と問題

問題（クラス）と問題例（インスタンス）

ここで、計算機で解く問題について再考する。

問題といった場合に、次のような３つのタイプが考えられる。

素因数分解についての「問題」
（１）781167は合成数かどうか判定せよ。
（２）整数nが与えられたとき、それが合成数かどうか
　判定せよ。
（３）整数nの素因数をすべてもとめよ。

問題のインスタンス

インスタンスの集合（クラス）

列挙の問題といいます。

24

判定問題

ここからは、(2)のタイプの問題を扱いたい。
(2)のように{yes,no}で答えられる問題を
「判定問題」(decision problem)といいます。

判定問題を記述する際には、
1.問題の名称、
2. 問題例の集合、
3.yesとなるべき条件
の3つを記述する必要がある。
これらの記述によって、初めて問題が定義される。

ここで、2，3は簡単に、
2'インスタンス(の代表)
3'質問
に置き換えることもある。

25

判定問題の例

名称:合成数の問題
インスタンス:整数n
問:nは合成数か？

名称:最大値の問題
インスタンス:実数の集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ と
添え字 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$
問: a_i は S の最大値か？

26

言語と問題

判定問題は、yesとなるインスタンスの集合を言語とみなせば、
一意に表現可能である。

名称:合成数の問題
インスタンス:整数n
問:nは合成数か？

$$L_Y=\{c\in N \mid c\text{は合成数}\}$$
$$=\{4,6,8,9,10\cdots\}$$

このように、
問題は言語に
読み替え可能。
問題を解くとは、
対応する言語を
認識するTMを
作ること。

27

6－5. 停止性問題

次のような問題を考える。

名称:TMの停止性問題
インスタンス: $\langle T,\sigma\rangle$
問:TM Tは σ に大して、停止するか？

この問題は、無限ループの自動判別等に利用可能で、
大変有用であるが、計算不可能である。
つまり、自動無限ループ判定ソフトは原理的に、
実現不可能である。

28

定理

TMの停止性問題は非可解である。(計算不可能である。)

証明

$$L_{\overline{halt}}=\{\sigma_i \mid TM\sigma_i=\langle T\rangle\text{は、列}\sigma_i\text{に対して停止して受理しない。}\}$$

は、前にみてきたように停止保証TMでは認識できない。

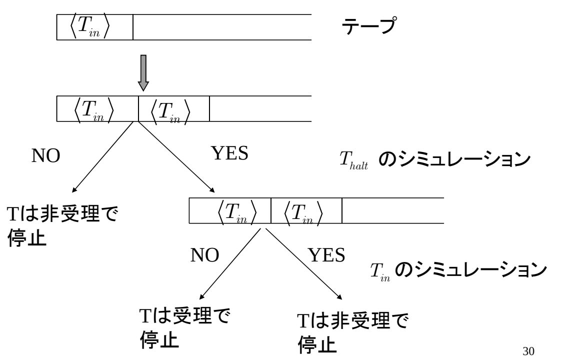
この言語を利用して、命題を背理法によって示す。

TMの停止性問題を解くTM T_{halt} が存在すると仮定する。
(背理法の仮定)

T_{halt} をUTMの構成の要領でシミュレートすることができる。
このことを利用してTを構成する。

29

入力 $\langle T_{in}\rangle$ に大して、コピーを作り文字列 $\langle T_{in}\rangle\langle T_{in}\rangle$ を構成する。



30

もし、 $\langle T_{in}, T_{in} \rangle$ が必ず停止することがあらかじめ判別できれば、
$\langle T_{in} \rangle$ をシミュレートすることによって、
$L_{\overline{halt}}$ の言語を認識できるTM Tが構成できる。
しかも、Tは必ず停止する。
これは、 $L_{\overline{halt}}$ を認識する停止保証TMが存在しないことと矛盾する。

以上より、もし停止性判定問題を解くTM T は存在しない。

QED

31

6ー6. 停止性問題の別証明

一般のプログラムの停止を判定するような、
プログラムは存在しない。

証明

プログラムPとPへの入力Dを引数とするような次のような
プログラムが存在するとする。

halttester1(Program P,Data D);

入力:プログラムPと、そのプロうグラムへのデータD
出力:PへDを入力したときに、
停止するなら yes
停止しないなら no
を出力する。(必ず停止する)

32

DataのDとしては、どのようなデータでもかまわないはずである。
よって、Dとしてプログラム自身を常にとるような関数を
構成できる。

halttester2(Program P);

入力:プログラムP
出力:PへPを入力したときに、
停止するなら yes
停止しないなら no
を出力する。(必ず停止する)
つまり、halttester1(P,P)と同様の動作をする。

これは、halttester1(P,D)が存在すれば、容易に構成できる。
(単に、機能を限定させているだけである。)

33

次に、halttester2(P)を元に、次のような関数を構成する。

funny1(Program P);

入力:プログラムP
出力:halttester2(P)がyesなら、無限ループ
halttester2(P)がnoなら、停止

具体的には、次のような関数を構成すれば良い。

```
funny1(Program P){
    if(halttester2(P){
        for(;;);
    }
    else{
        printf("HALT¥n");
    }
}
```

34

このとき、プログラムfunny1()に、
引数として、funny1()を与えたときの動作を考える。

すなわち、funny1(funny1);が停止するかどうかを考える。

場合1:
haltester2(funny1)がyesと出力する場合、
このときは、
funny1()の作り方から明らかに停止しない。
これは、funny1が停止すると判断していることと矛盾する。

場合2:
haltester2(funny1)がnoと出力する場合、
このときは、
funny1()の作り方から停止する。。
これは、funny1が停止しないと判断していることと矛盾する。

このようにいずれの場合も矛盾が生じる。

QED 35