5. チューリングマシンと計算

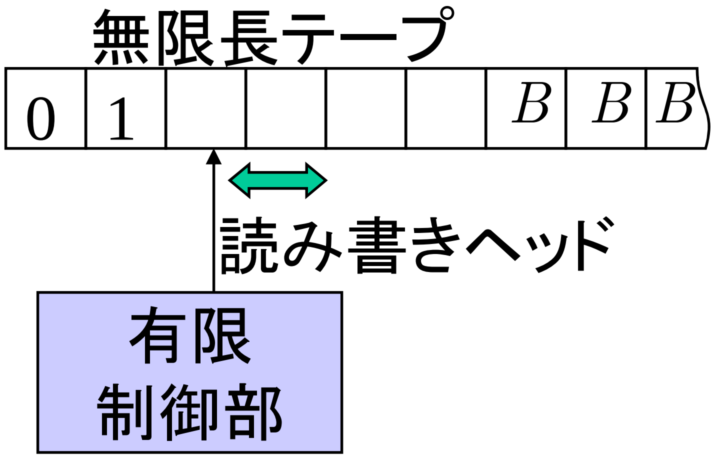
５－1. チューリングマシンとその計算

これまでのモデルでは、
テープに直接書き込むことができなかった。
また、入力テープヘッドの操作は右方向だけしか
移動できなかった。
これらの制限を取り除いた機械を考える。
このような機械をチューリングマシン（Turing　Machine,TM)
と呼ぶ。（実は、TMは、現実のコンピュータの能力を持つ。）

TMの特徴（DFAとの比較）

- 無限長テープを持つ。
- 書き込み可能ヘッドを持つ。
- ヘッドは左右に移動可能。

TMの概略



TMを定める要素

- テープ
  - 入力記号
  - テープ記号
  - 空白記号

有限制御部

- 内部状態
- 初期状態
- 状態変化
- 受理かどうかの判断

TMの数学的定義

TMは、$T=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ の7項組で与えられる。
ここで、

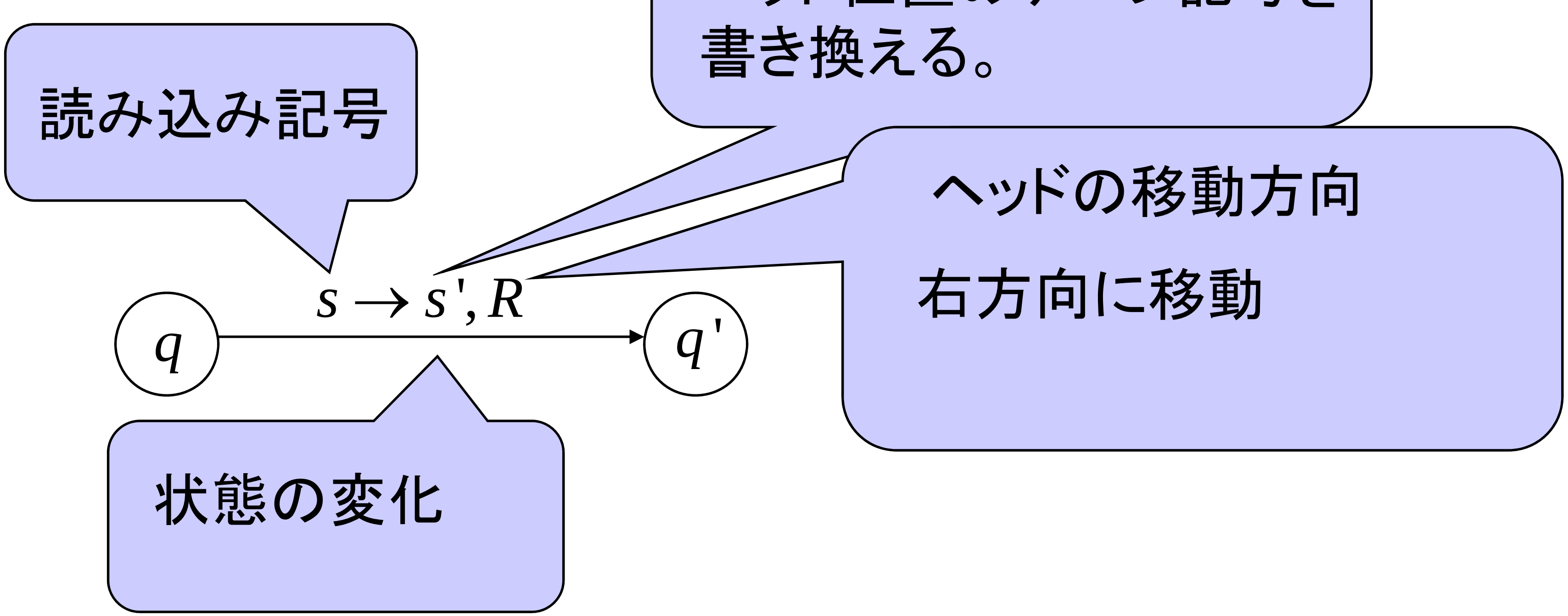
1．　Q は有限集合で、状態を表す。
2．　Σ は有限集合で、入力アルファベットを表す。
3．　Γ は有限集合で、テープアルファベットを表す。
4．　δは$Q\times\Gamma$ から $Q\times\Gamma\times\{L,R\}$ への写像
　　($\delta:Q\times\Gamma\rightarrow Q\times\Gamma\times\{L,R\}$)で、
　　状態遷移を表す。δ を状態遷移関数という。
5．$q_0\in Q$ は、初期状態を表す。
6．$B\in\Gamma$ は空白記号を表す。
5．$F\subseteq Q$ は受理状態の集合を表す。

ここで、$\Sigma\subseteq\Gamma$, $B\notin\Sigma$ である。

TMの図式表現（状態遷移図）

TMは、状態遷移図で表現できる。

$\delta(q,s)=(q',s',R)$ のとき、

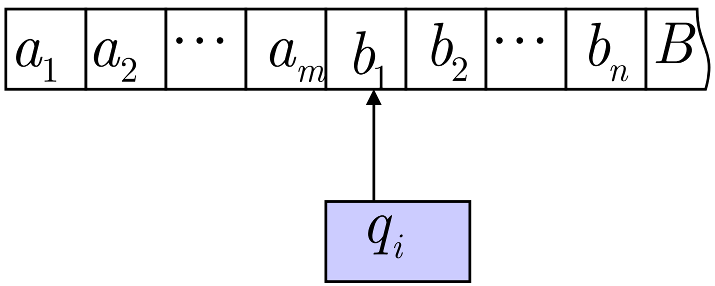


TMの様相

TMでは、複数の対象が同時に変更される。
すなわち、一回の遷移で、
○状態
○テープ内容、
○ヘッド位置
の3つが同時に変化する。
これらの3つによってTMの様相が定義される。
また、下のようなTMの様相は、

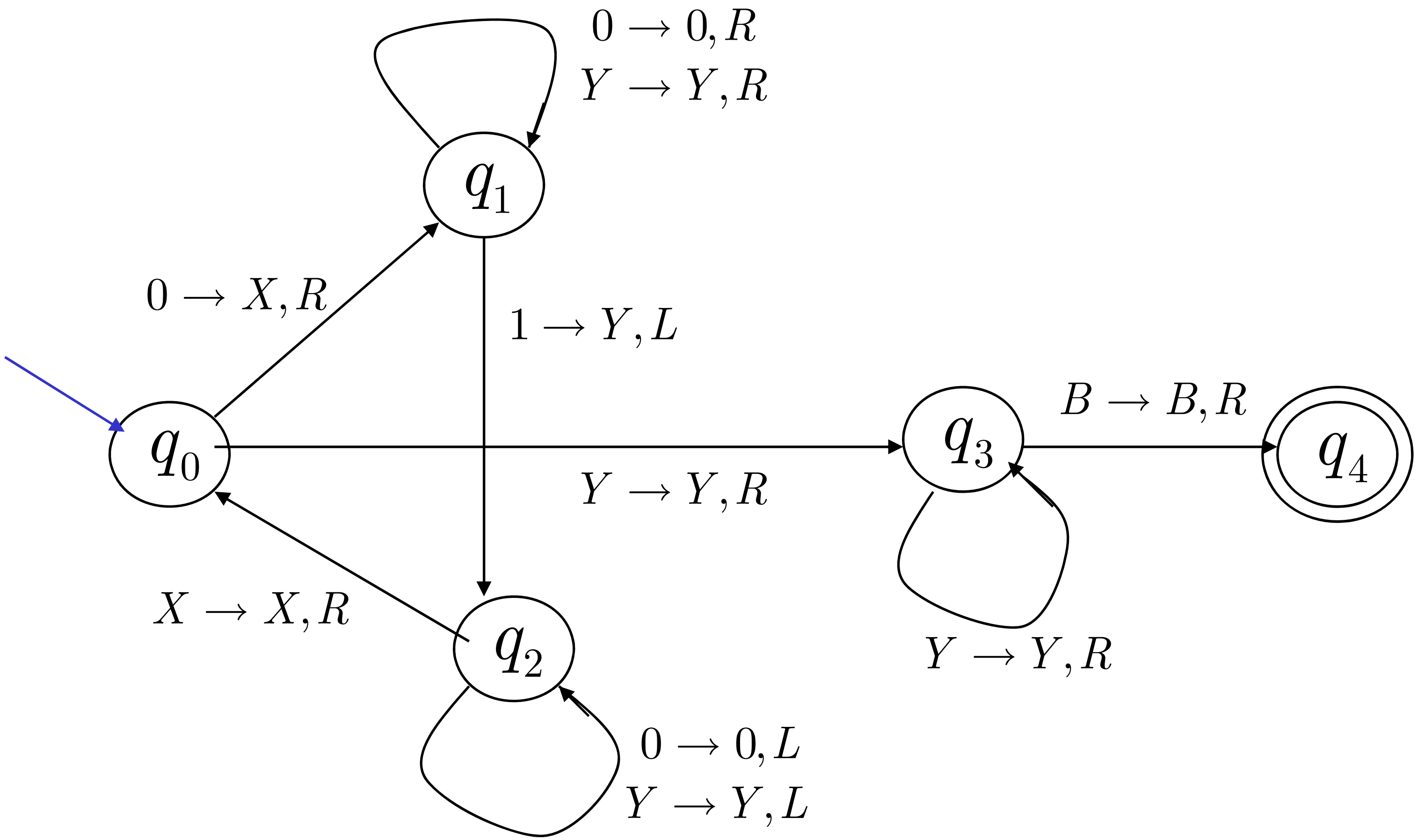
$$a_1 a_2 \cdots a_m q_i b_1 b_2 \cdots b_n$$

と記述できる。



TMの状態遷移図例

言語　$L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ を受理するTM T_1 を示す。



TMの形式的定義例

$$T_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, X, Y, B\}$$

$$F = \{q_4\}$$

δ	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)			(q_3, X, R)	
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)		(q_1, Y, R)	
q_2	$(q_2, 0, L)$		(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	
q_3				(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4					

TMの計算例

ここでは、TM T_1 が0011を受理する計算を示す。
なお、TMの計算は、TMの様相の列として表される。

$$q_0 0011 \Rightarrow Xq_1 011 \Rightarrow X0q_1 11 \Rightarrow Xq_2 0Y1$$

$$\Rightarrow q_2 X0Y1 \Rightarrow Xq_0 0Y1 \Rightarrow XXq_1 Y1 \Rightarrow XXYq_1 1$$

$$\Rightarrow XXq_2 YY \Rightarrow Xq_2 XYY \Rightarrow XXq_0 YY \Rightarrow XXYq_3 Y$$

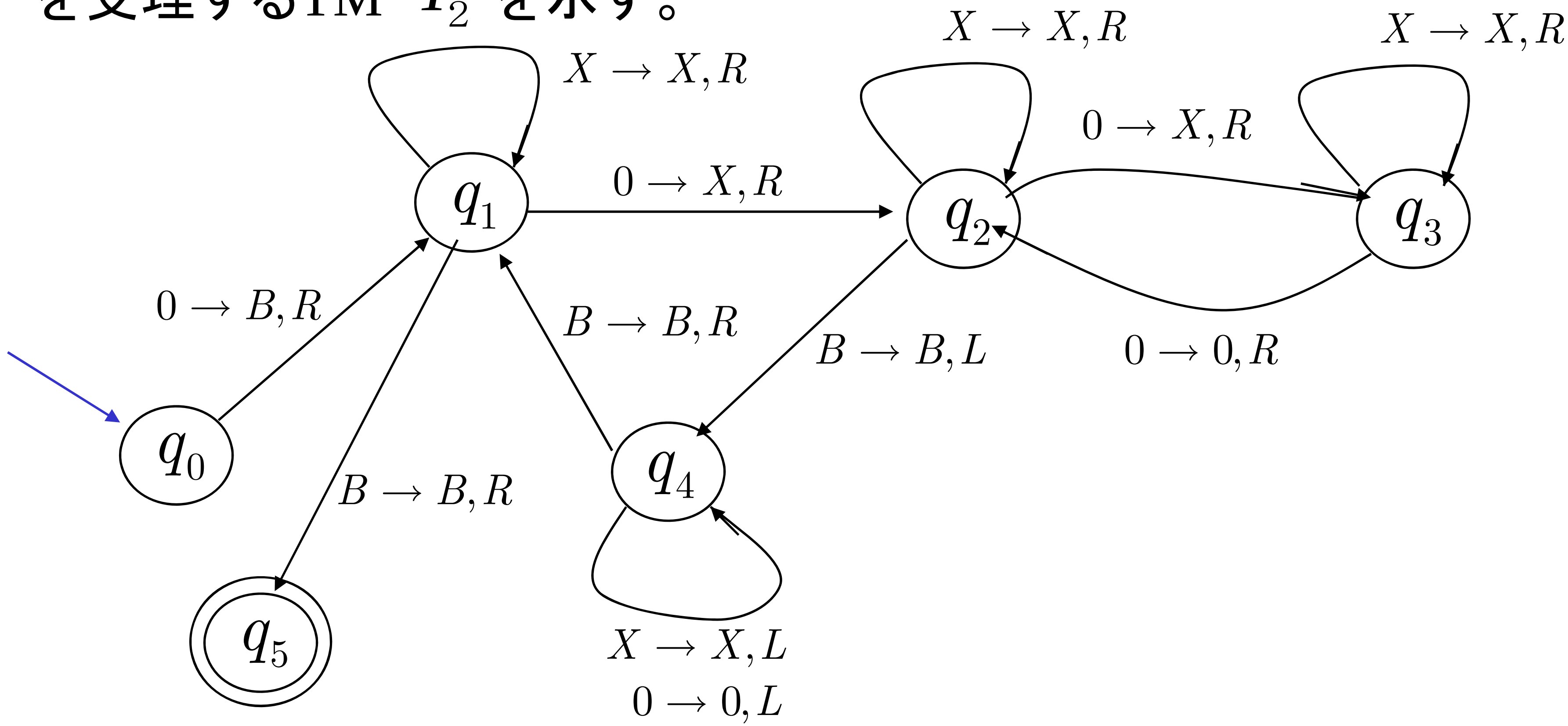
$$\Rightarrow XXYYq_3 \Rightarrow XXYYBq_4$$

TMの例2

言語 $L_2 = \{0$を 2 のべき乗個並べた文字列$\}$

$$=\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$$

を受理するTM T_2 を示す。



TMの計算例2

ここでは、TM T_2 が0000を受理する計算を示す。

$$q_0 0000 \Rightarrow Bq_1 000 \Rightarrow BXq_2 00 \Rightarrow BX0q_3 0$$

$$\Rightarrow BX0Xq_2 B \Rightarrow BX0q_4 XB \Rightarrow BXq_4 0XB$$

$$\Rightarrow Bq_4 X0XB \Rightarrow q_4 BX0XB \Rightarrow Bq_1 X0XB$$

$$\Rightarrow BXq_1 0XB \Rightarrow BXXq_2 XB \Rightarrow BXXXq_2 B$$

$$\Rightarrow BXXq_4 XB \Rightarrow \cdots \Rightarrow q_4 BXXXB$$

$$\Rightarrow Bq_2 XXXB \Rightarrow \cdots \Rightarrow BXXXq_2 B$$

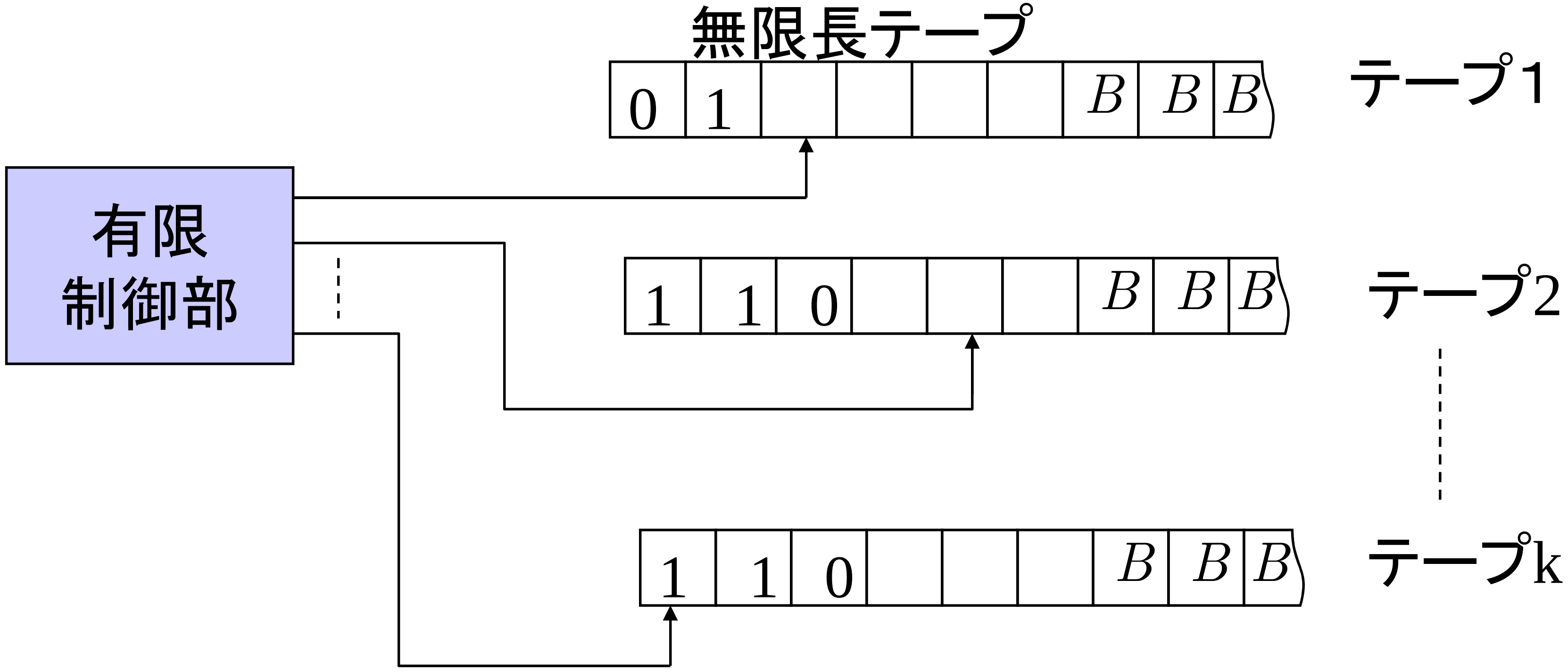
$$\Rightarrow BXXXBq_5$$

練習

言語 $L = \{w \# w \mid w \in \{a, b,\}^*\}$ を認識するTMを作成せよ。

5-2.多テープTM

チューリング機械の拡張として、多テープチューリング機械を考えると便利なことが多い。



多テープチューリング機械の概略

多テープTMの状態遷移関数

多テープTMの形式的定義では、
状態遷移関数 δ を次のように定めればよい。

$$\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$$

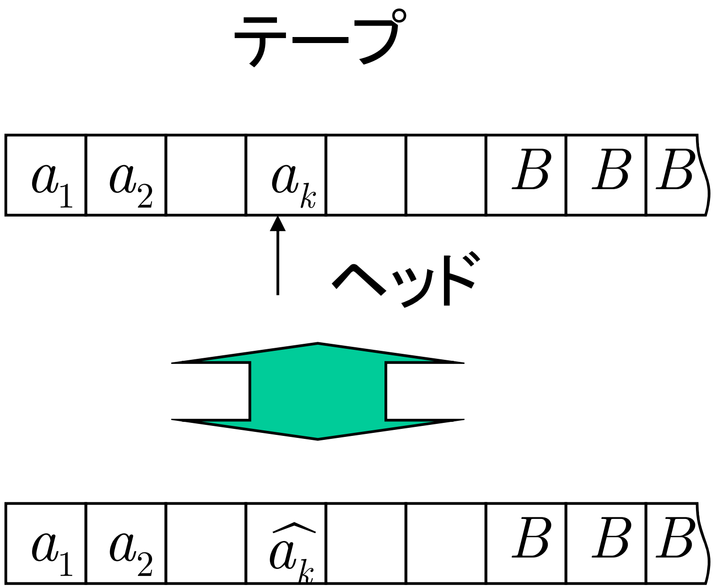
状態と k ヘッドの
読み取り値が決まると、

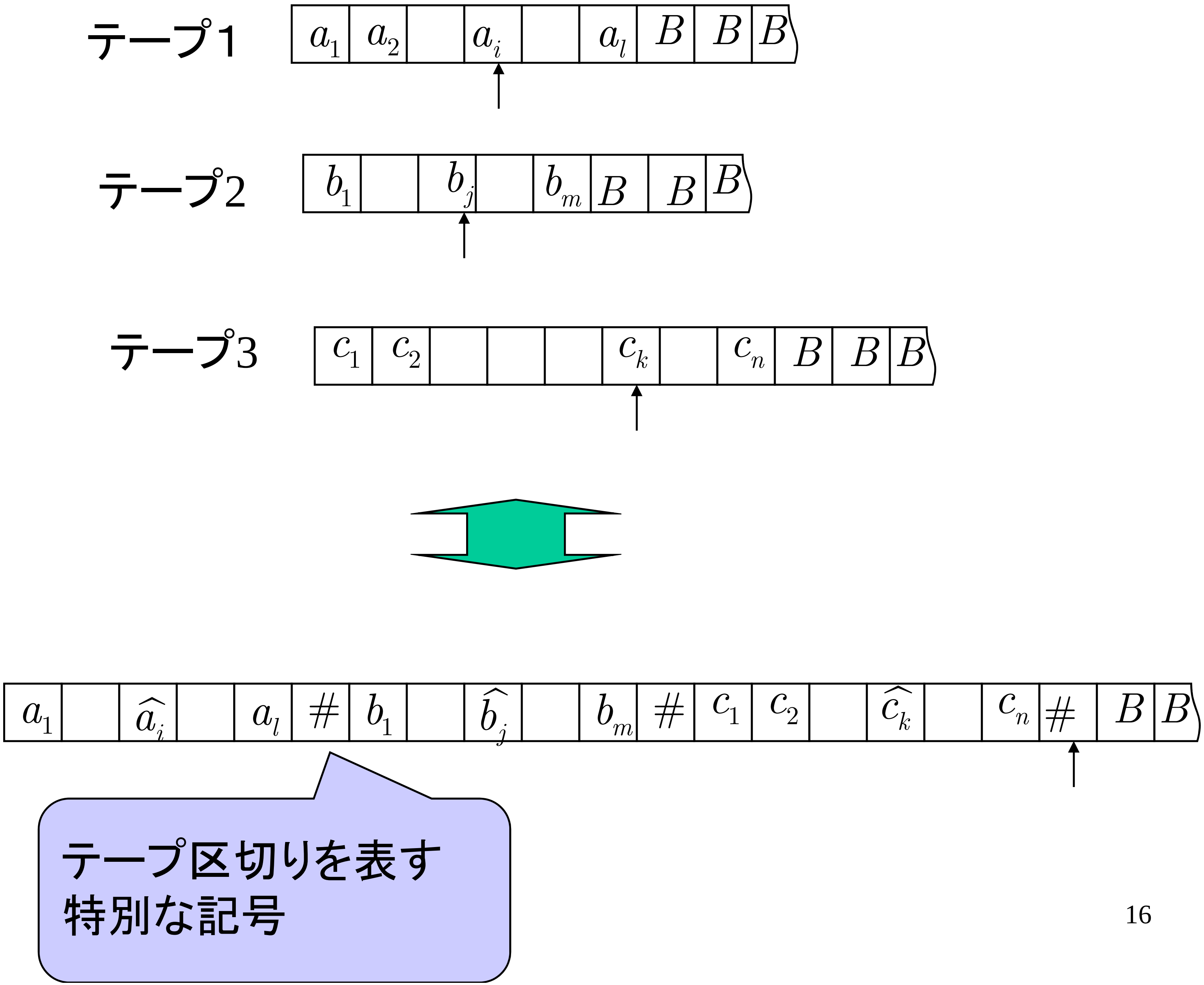
遷移後の状態と
k ヘッドの書き込み値
および移動方向が
定まる。

多テープTMとTMの等価性

１本のテープを用いて、多テープをシミュレートできればよい。

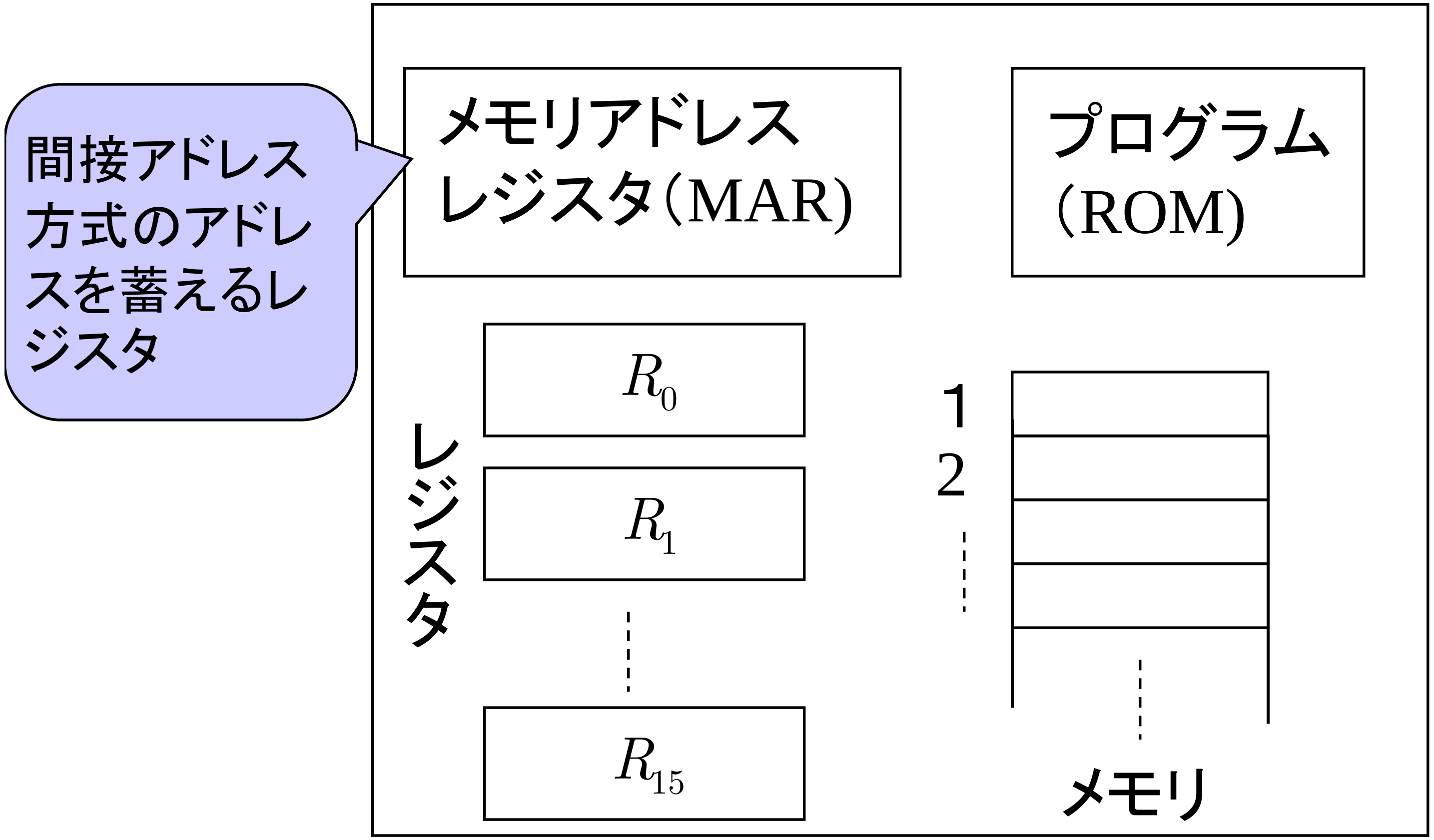
〇アイディア
ヘッド位置を表す記号を導入する




テープ1
テープ2
テープ3
テープ区切りを表す
特別な記号

5-3. ランダムアクセスマシン(RAM)

より現実的な計算機モデルとしてRAMが考えられている。



RAMとTMの等価性

多テープを用いてRAMをシミュレートすることができる。
（すなわち、1テープTMによってもシミュレートすることができる。）

ここでは、厳密な証明はおこなわない。
直感的に、シミュレートが可能であると認識できればよい。

〇アイディア
機能ごとにテープを用意して模倣する。

メモリテープ $\#0\$\ x_0\ \#1\$\ x_1\ \#10\$\ x_2\ \#11\$\ x_3 \cdots$

MAR

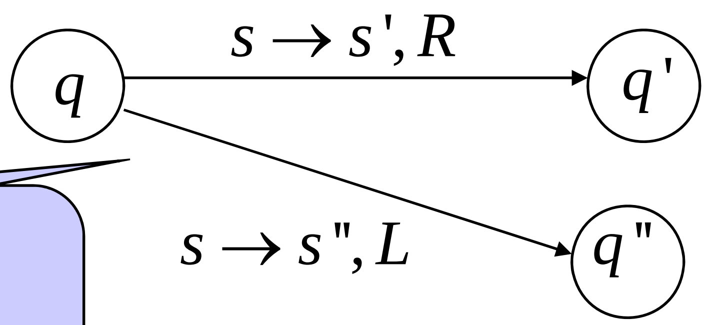
ワークテープ

R_0

R_{15}

5-5.非決定性TM

状態の遷移を非決定的にできるTMを
非決定性チューリングマシン
(Non-deterministic Turing Machine,NTM)
という。(なお、これまでのTMは、
決定性チューリングマシン
(Deterministic Turing Machine,DTM)
といわれる。



同一様相から、
2つ以上の状態
遷移が可能なTM

NTMの状態遷移関数

NTMの形式的定義では、
状態遷移関数 δ を次のように定めればよい。

$$\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}\left(Q \times \Gamma \times \{L, R\}\right)$$

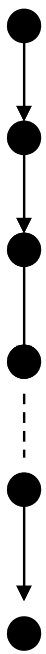
状態とヘッドの
読み取り値が決まると、

いくつかの遷移の
可能性のなかで
都合の良いものに
遷移する。

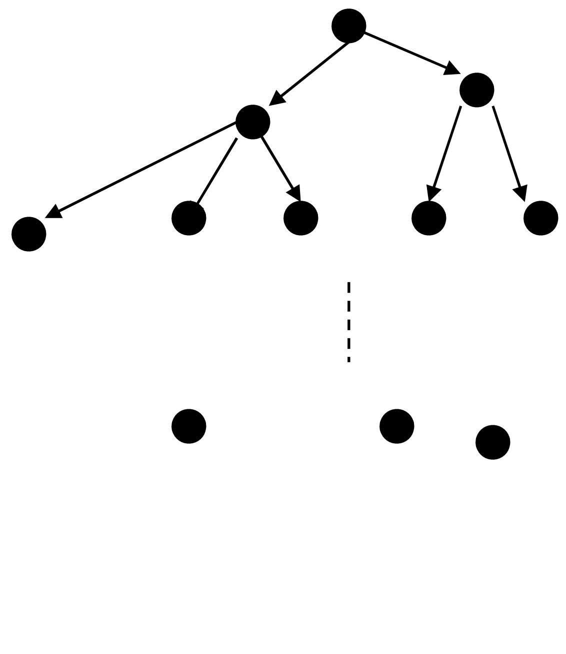
$$\delta(q, s) = \{(q', s', R), (q'', s'', L)\}$$

NTMの計算の木

（様相の遷移の可能性）



DTM
の計算

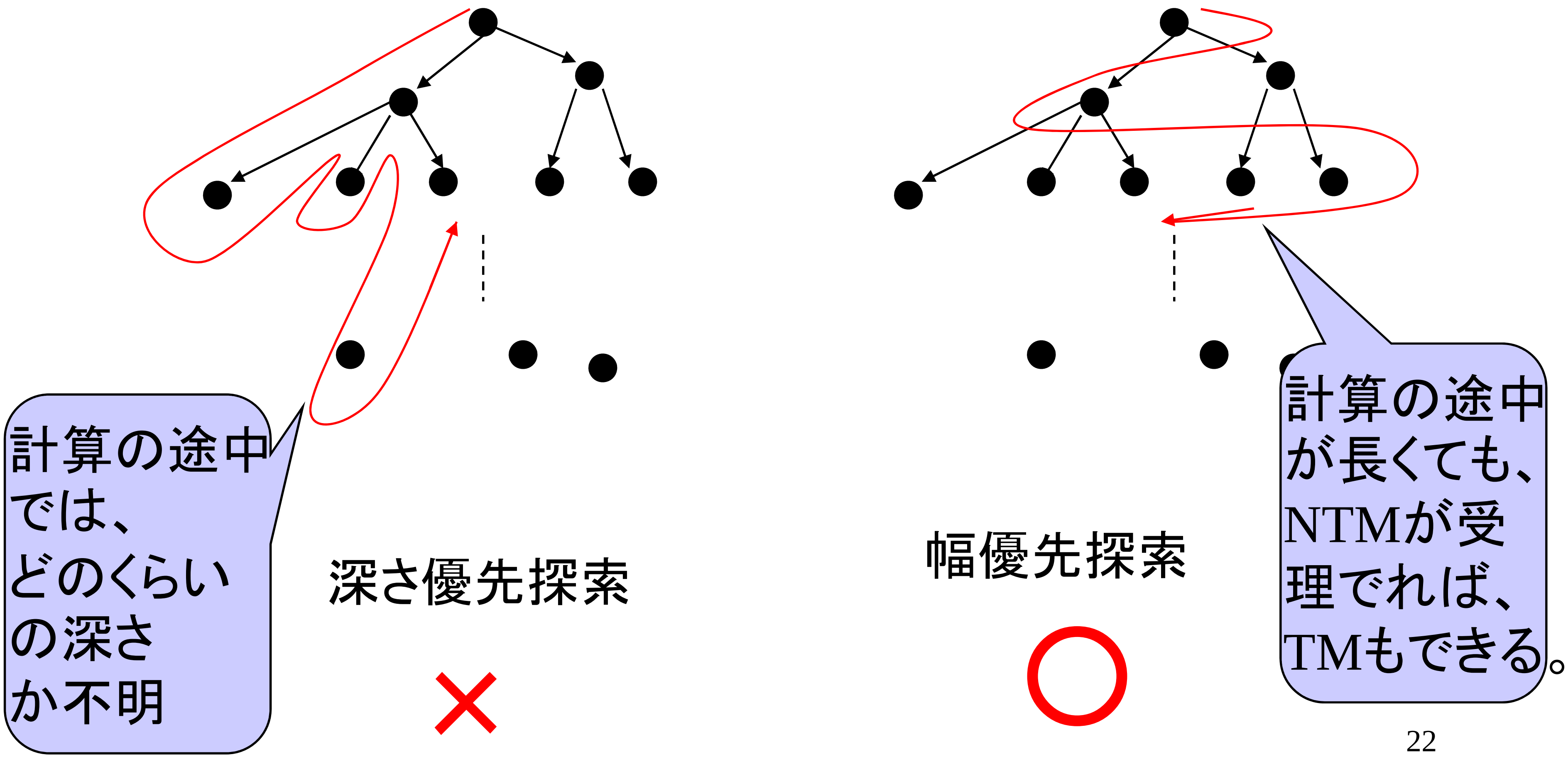


NTM
の計算

●：様相

DTMによるNTMのシミュレーション

NTMの計算の木を一本道で辿るような
DTMを設計すればよい。



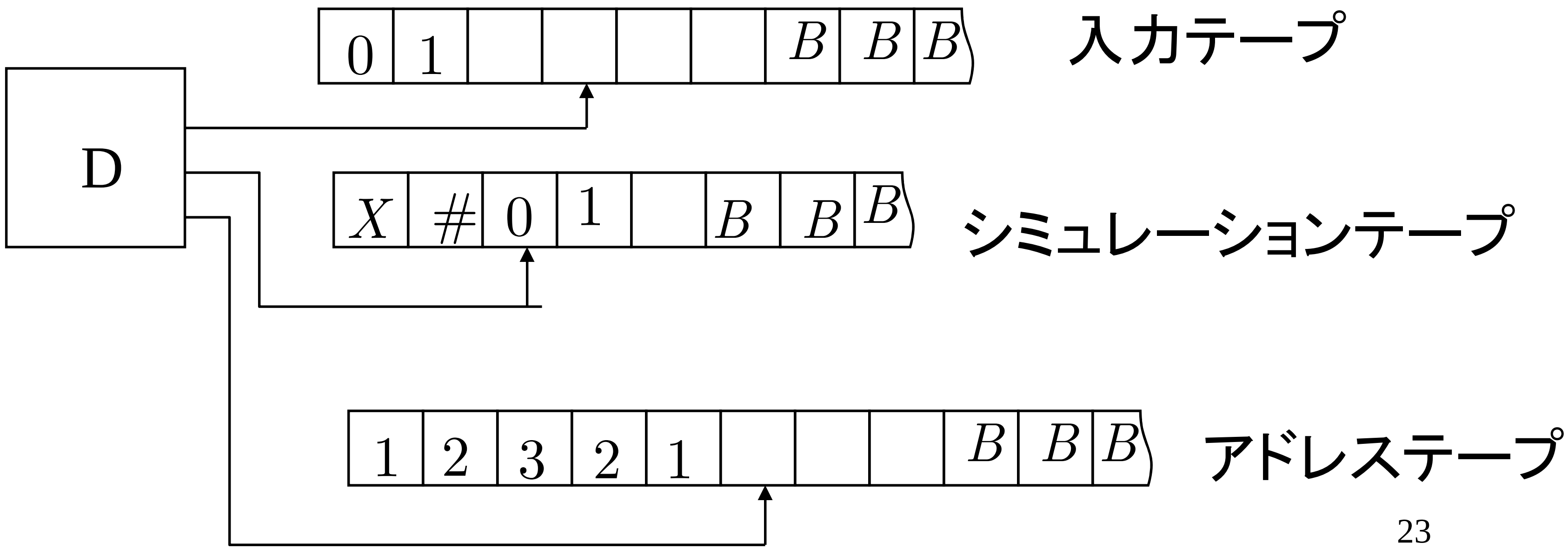
非決定性TMとTMの等価性

すべてのNTM　Nに対して、
それと等価なDTM　Dが存在する。

テープ3

証明

Dは3つのテープを持つものとする。



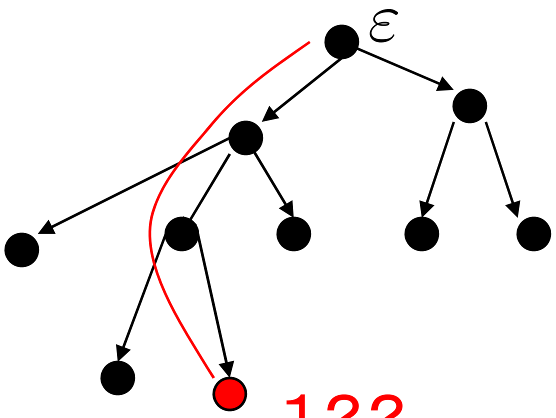
テープ1（入力テープ）は常に入力文字列を含み、
決して変更しない。

テープ2は、現在シミュレートしている非決定的計算上での、
Nのコピーを維持する。

テープ3は、現在シミュレートしている非決定的な計算木の
探索点の位置を保持する。

Nの遷移可能の選択数の最大値をbとする。
木のすべての節点に対して、 $\Sigma_b = \{1, 2, \cdots, b\}$

の文字列を割り当てる。



次のようなアルゴリズムにしたがって、
シミュレーションを行う。

1. テープ1にNへの入力 w をセットし、
テープ2、テープ3は空とする。

2. テープ2に、テープ1をコピーする。

3. テープ3のアドレスにしたがって、Nの一つの枝をシミュレートする。
受理状態になれば、受理する。
テープ3のアドレスを使いきったり、遷移不可能になったら、ステージ4にいく。

4. テープ3の文字列を長さの順でかつ辞書式順に並べ換える。
ステージ2に行って対応する計算を一つシミュレートする。

このアルゴリズムによって、DはNをシミュレートすることがわかる。 $\mathcal{QED}$

5-5. チャーチ・チューリングのテーゼ（計算の定義）

このように、DTMはいろいろなモデルと等価であることが示された。

このような状況証拠から、
「機械的な計算（アルゴリズム）とは、
チューリング機械で計算できるものとしよう。」
という提唱がなされた。
これを、チャーチ・チューリングのテーゼ
（Church-Turing thesis）という。
つまり、アルゴリズムの定義とは、対応するチューリング機械が存在することである。