10. PとNP完全問題との境界

1

10ー1. 2SAT

3SATがNP完全であることを見てきたが、
ここでは2SATがPに属することを見ていく。

問題

名称：2SAT（2充足可能性問題、
2SATisfiability problem)
インスタンス：2CNF論理式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

問：$f = 1$ となる $x_1, \cdots, x_n$ への0，1の
割り当てが存在するか？

変数の個数
自体には
制限が無い
ことに注意

2

例

$$f = (x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_1} + x_3)(x_2 + x_4)(\overline{x_4} + x_5)(\overline{x_5} + x_1)$$

この2CNFが充足可能かどうか調べる。
先ず、$x_1 = 0$ と仮定する。

このとき、節にはリテラルが2つしかないので、
f を充足させるためには、x_1 を含む節に対して、
x_1 以外の変数への割り当てが決まってしまう。
このことが連続で引き起こされる。

$$x_1 = 0 \to x_2 = 0 \to x_4 = 1 \to x_5 = 1 \to x_1 = 1$$

この例では、この連鎖によって、矛盾が導ける。
したがって、$x_1 \neq 0$ である。

3

したがって、$x_1 \neq 0$ である。

同様に $x_1 = 1$ と仮定する。

このとき、次のように連鎖を導ける。

$$x_1 = 1 \to x_3 = 1$$

このときには、さらに、与えられた関数を簡単化できる。

$$f = (x_1 + \overline{x_2})(\overline{x_1} + x_3)(x_2 + x_4)(\overline{x_4} + x_5)(\overline{x_5} + x_1)$$

$$f' = (x_2 + x_4)(\overline{x_4} + x_5)$$

このとき、f が充足可能であるための必要十分条件は、
f'が充足可能であることに注意する。

4

この例の方針にしたがって、
多項式時間アルゴリズムが得られる。

インスタンス：$f = C_1 \bullet C_2 \bullet \cdots \bullet C_m$ $f(x_1, \cdots, x_n)$

$C_i = (p + q)$

$p, q \in \{x_1, \cdots, x_n, \overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n}\}$

ここで、入力サイズは、$O(n+m)$ である。

$L_{2SAT} = \{f \mid f$は充足可能な2CNF$\}$ とする。

このとき、 $L_{2SAT} \in P$

5

証明

具体的にに多項式時間アルゴリズムを示す。

アルゴリズム2SAT

1．変数x_1 に対して0または1を割り当て、
割り当ての連鎖を求める。

2．1.の連鎖で矛盾が生じた場合には、
をその割り当てを採用しない。

3．1．の割り当てで矛盾が生じない場合には、
関数 f を簡単化した関数f'を作成し、
f' に対して再帰的にアルゴリズムを適用する。

6

ここkで、アルゴリズム2SATが最悪でも
多項式時間で動作することを示す。

まず、ステップ1の連鎖は$O(m)$時間で求めることができる。
各変数に対して、 連鎖を求めることは、
高々2回（肯定の割り当てか、否定の割り当て）
しか行わない。

さらに、一度連鎖に入った節は、簡単化され、
関数f'には含まれない。

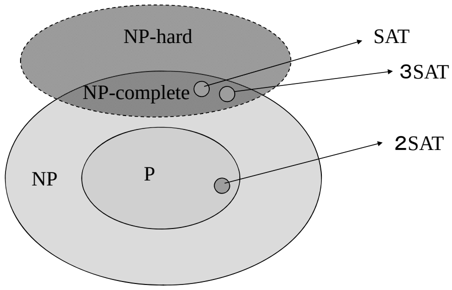
以上より、高々$O(mn)$ 時間で充足可能かどうか
を調べることができる。（なお、ここでは、多項式時間
を示しただけである。現在知られている最速のアルゴリズム
ではない。）

$$\therefore L_{2SAT} \in P$$

$\mathcal{QED}$

7

以上より、次のような状態であることがわかる。



このように、問題を注意深く観察しないと、
Pの問題か、NP完全の問題かは区別できない。

8

練習

次の2CNFが充足可能かどうかを調べよ。

$$f = (x_1 + x_2)(\overline{x_2} + x_3)(\overline{x_2} + x_4)(\overline{x_4} + x_5)(x_3 + x_4)$$
$$(\overline{x_1} + x_3)(x_4 + \overline{x_5})(\overline{x_3} + x_6)(\overline{x_4} + \overline{x_6})(x_5 + x_6)$$

9

１０－２．２次元マッチング

次のような問題を考える。

問題

あるパーティには、n人の男性と、n人の女性が招待されている。このパーティにおいて、ダンスを踊るために、
男と女のペアを作りたい。
しかし、全ての男女が組みを作れるわけではなく、
組を作ることができる男女間の情報だけがわかっている
ものとする。
このときに、同時にn組のペアをつくることが可能か？

10

先ほどの問題は、グラフの問題として定式化できる。

問題：２次元マッチング

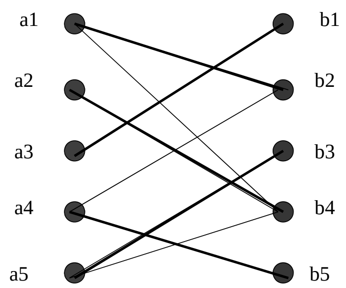
名称：２次元マッチング
インスタンス：

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}, M \subseteq A \times B$$

問い：完全マッチングがあるか？

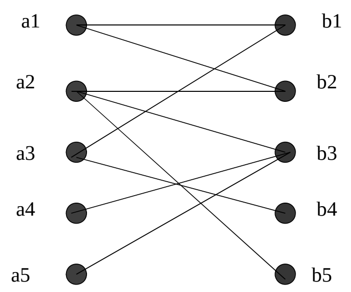
11

肯定のインスタンス



12

否定のインスタンス



13

性質：2次元マッチング問題の計算量

$L_{2DM} = \{M \mid M$は完全マッチングが存在する2部グラフ$\}$
とする。

このとき、 $L_{\mathrm{2DM}} \in P$

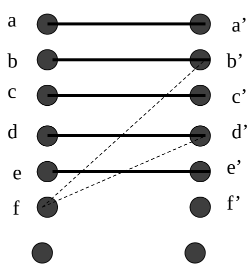
証明

次のようなアルゴリズムを考える。

まず、辺を適当に選択して、マッチングを構成していく。

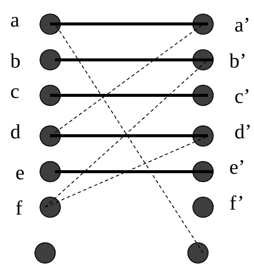
この選択を可能な限り行なう。
ここで、選択した辺の両方の点がこれまでに選択した辺に接続している場合を考えよう。

14



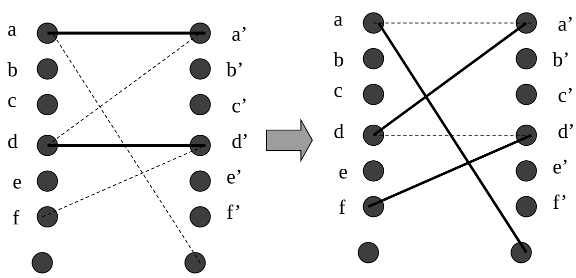
このとき、このような状況になっているはずである。
つまり、fに接続している辺はすべて、既にマッチングの辺が接続している。

15



このときは、マッチングの辺と、マッチしていない辺を交互に辿って、マッチしていない点まで辿る。

16

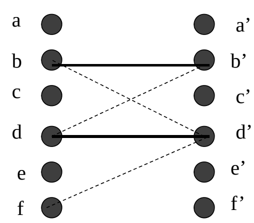


必要部分だけを抜き出すと上図左のようになる。
このとのようなマッチと非マッチの辺を辿った道を
交互道という。交互道において、マッチと非マッチを
交換することができる。このように交換（スイッチ）しても、
マッチングの条件を満足していることに注意する。

17

非マッチの点から初めて非マッチの点で終わる交互道は、
スイッチすることによって、
マッチの辺を１本増加させることができる。

スイッチ不可能な例



このような場合非マッチの点から初めて交互道を辿ると、
交互道の始点側からなる部集合の点集合（青点）が、
交互道の逆の部集合の点集合（赤点）より
必ず個数が多くなる。

18

つまり、このような交互道の選択ステップが失敗するならば、完全マッチングが存在しないことがわかる。

以上より、次のような多項式時間アルゴリズムが得られる。

アルゴリズム2DM

1. 各辺 $e \in M$ を含む極大な交互道を見つける。（必要ならスイッチを行う。）
2. 1.の交互道を取り除いて、再帰的にマッチングを見つける。

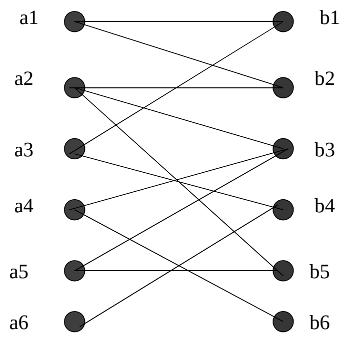
このアルゴリズムの厳密な解析は行わないが、最悪 $O(mn)$ 時間で動作することが知られている。（現在知られている最も高速なアルゴリズムの計算量は、$O(\sqrt{n}m)$ 時間である。）

$\mathcal{QED}$

19

練習

次の例に対して、交互道を延長することによって、マッチングがあるかどうかを決定せよ。



20

１０－３.３次元マッチング

2次元マッチングに対しては、多項式時間アルゴリズムが存在した。しかし、自然な拡張である3次元マッチングはNP完全であることが示せる。

問題：３次元マッチング

名称：３次元マッチング

インスタンス：

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}, C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$

$M \subseteq A \times B \times C$

問い：完全3次元マッチングがあるか？
すなわち、M中の互いに素な部分集合で、A、B、Cの要素を全て網羅できるか？

21

性質：3次元マッチング問題の計算量

$L_{3DM} = \{M \mid M$は３DMが存在するインスタンス$\}$
とする。

このとき、 $L_{\rm 3DM} \in NPcomplete$

証明

まず、 $L_{\rm 3DM} \in NP$ を示す。

$m \in M$ を非決定的に選択することによって、3DMの受理を決定できる。したがって、

$L_{\rm 3DM} \in NP$

である。（あるいは、3DMになっているかどうかの検証は容易に多項式時間で行えるから $L_{\rm 3DM} \in NP$ である。）

22

ここでは、3SATを多項式時間で3DMに帰着できることを示す。

すなわち、

と問題を変換できることを示す。

ここでは、3SATの具体例に対して帰着法（変換法）を示すにとどめる。
この例から容易に一般の3SATのインスタンスを3DMに帰着できることがわかる。
3SATのインスタンスを

$f = (x+y+z)(x+\overline{z}+\overline{w})(\overline{y}+z+w)(x+\overline{z}+\overline{w})(\overline{y}+z+\overline{w})$

とする。

23

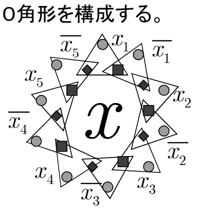
まず、A,B,Cを次のように定める。

A={●,●,● , ・・・}

B={■,■,■ , ・・・}

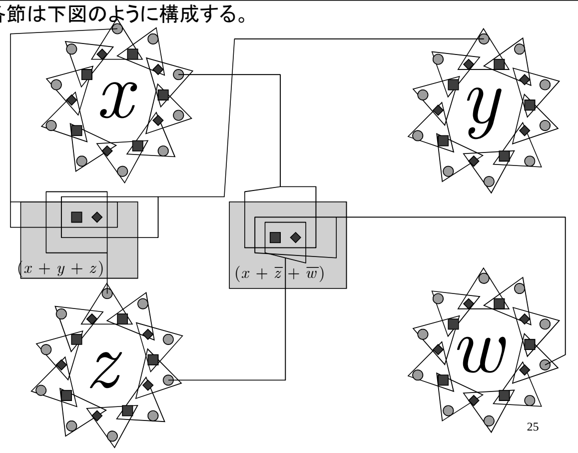
C={◆,◆, ◆, ・・・}

次に、各変数 に対して次のような構造を持つように、3DMのインスタンスを作成する。この例では、項が5つあるので肯定と否定で１０角形を構成する。



24

各節は下図のように構成する。



25

3SATが充足可能であるときにかつ、そのときに限り、
この構成が3DMを持つことを示す.

先ず、3DMがあると仮定する。このときに、充足可能である
ことを示す。

10角形中のBやCの要素をいずれかのマッチングが網羅
するためには、変数は偶数番目だけすべて選ぶか
あるいは奇数番目だけをすべて選ぶしかない。
偶数番目を選んだときには肯定の変数が自由でなくなり、
(節への割り当てが不可能)、
奇数番目を選んだときには否定の変数が自由でなくなる。
したがって、
変数 x_i の偶数番目をマッチングで選んだら、
x_i に0を割り当てると考える。
逆に、奇数番目をマッチングで選んだら、
x_i に1を割り当てると考える。

26

節に対応するマッチングにより、Aの要素をいずれかの変数で
網羅しなければならない。この選択によって、
変数における自由な頂点が一意に決定することに注意する。
3DMのインスタンスの構成から、3DMが存在するときには、
3SATが充足可能であることがわかる。

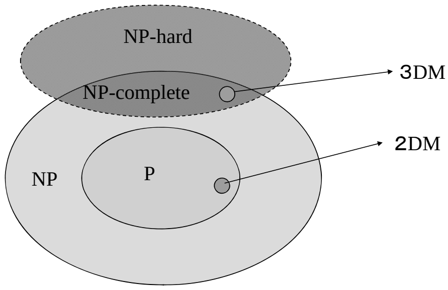
次に充足可能であるならば、3DMが存在することを示す。

全ての節を1にする割り当てが存在する。この割り当てに
したがって、10角形の奇数番目か偶数版目かを選ぶことができる。
このとき、BとCの要素はすべて網羅されている。したがって、
残っている要素はAの要素だけである。
残った要素は、あらかじめ必要分のMの要素をすべてのAに対応
させておくことにより、すべてのAをマッチさせることができる。
(一種のガベージコレクションを行えばよい。)

$\mathcal{QED}$

27

以上より、次のような状態であることがわかる。

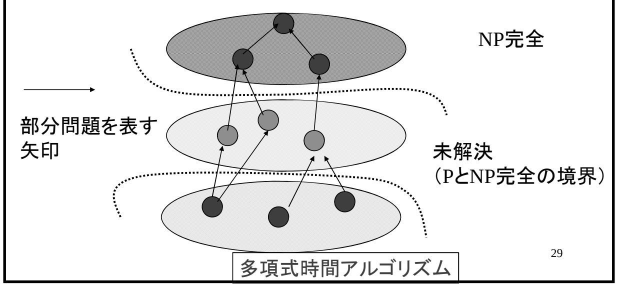


一見似たような問題でも計算量が全く異なる。
このような問題の組をいくつか示す。(証明なしで)

28

10ー4. PとNP完全

Pの問題解決手法を組み合わせることで、
多項式時間アルゴリズムが得られることもある。
また、NP完全の問題を帰着できて、NP困難であることが
証明できることもある。
これらは、計算機科学の主要な研究テーマである。

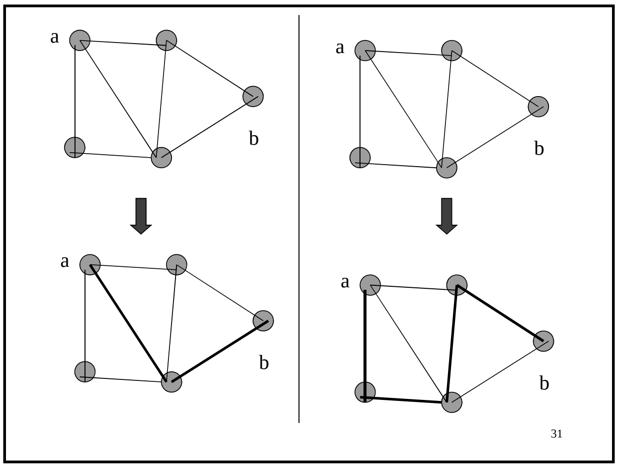


29

似ているクラスPの問題とNP完全の問題1

P	NP完全
名称:2点間の最短路	名称:2点間の最長路
インスタンス: 辺重みつきグラフ G=(V,E)と 2点 $a,b\in V$ さらに、正定数B	インスタンス: 辺重みつきグラフ G=(V,E)と 2点 $a,b\in V$ さらに、正定数B
問い: 点aから点bまで結ぶ 単純な路で長さがB以下 のものがあるか?	問い: 点aから点bまで結ぶ 単純な路で長さがB以上 のものがあるか?

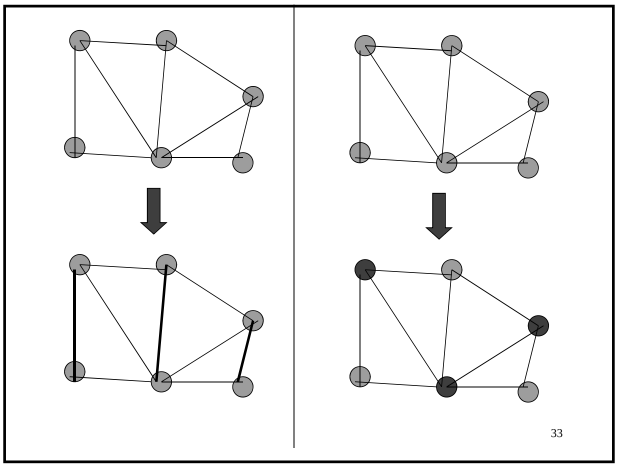
30



似ているクラスPの問題とNP完全の問題2

P	NP完全
名称：辺被覆	名称：点被覆
インスタンス： グラフG＝(V,E)と さらに、正定数K	インスタンス： グラフG＝(V,E)と さらに、正定数K
問い： $E' \subseteq E$ かつ $\lvert E' \rvert \le K$ で、全ての点は $e \in E'$ のいずれかの辺に接続している。	$V' \subseteq V$ かつ $\lvert V' \rvert \le K$ で、全ての辺は $v \in V'$ のいずれかの点に接続している。

32



似ているクラスPの問題とNP完全の問題3

P	NP完全
名称：実数ナップザック	名称：0ー1ナップザック
インスタンス： 集合 $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$ と、 サイズ関数 $s(u_i)$ 価値関数 $v(u_i)$ 。 また、正定数B、正定数K	インスタンス： 集合 $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$ と、 サイズ関数 $s(u_i)$ 価値関数 $v(u_i)$ 。 また、正定数B、正定数K
問い： $1 \le i \le n$ に対して、 $\alpha_i \in [0,1]$ が存在して、 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s(u_i) \le B$ かつ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v(u_i) \ge K$ とできるか？	問い： $1 \le i \le n$ に対して、 $x_i \in \{0,1\}$ が存在して、 $\sum_{i=1}^{n} x_i s(u_i) \le B$ かつ $\sum_{i=1}^{n} x_i v(u_i) \ge K$ とできるか？

34