

### 9. NP完全問題とNP困難問題

1

#### 9-1. NP完全とNP困難

クラスNP内の問題をすべて多項式時間で解けるような問題が存在する。このような問題を**NP困難問題(NP-hard Problem)**という。NP困難問題すべてからなるクラス(問題の集合)を**NP困難(NP-hard)**という。

また、NP困難中には、クラスNPに含まれている問題もある。クラスNPに含まれているようなNP困難問題を**NP完全問題(NP-complete Problem)**という。NP完全問題すべてからなるクラスを**NP完全(NP-complete)**という。

実は、このNP困難な問題が、実用的な範囲で厳密解を求めることができないクラスと考えられている。

2

#### NP困難性

多項式時間帰着

NP困難な問題

NP内のすべての問題 (SAT、k-クリーク、ハミルトン閉路、合成数、ソート、...等)

3

#### クラスNPとNP困難問題の関係

$P \cap NP - complete = \phi$  と信じられているが、証明はされていない。

4

#### クラスPとNP完全

NP完全の定義から次の命題が成り立つ。

クラスPに属するNP完全問題が存在するならば、すなわち、 $P \cap NP - complete \neq \phi$  ならば、 $P=NP$ である。

**証明**

クラスPに属するNP完全問題をXとする。このとき、NP内のすべての問題が多項式時間で解けることを示せばよい。

まず、NP完全問題の定義より、NP内のすべての問題をXに多項式時間帰着できる。また、Xは多項式時間TMで解ける。したがって、NP内のすべての問題は、多項式時間で解くことができる。

QED 5

#### 帰着とNP完全

問題Aのインスタンス

問題Bのインスタンス

Y/N (問題Aの解かつ変換された問題Bの解)

多項式時間帰着

多項式時間解法

6

### オラクル(神託, oracle)

問題Bをたちどころに解くことができる外部機械を考えると、問題Aを多項式時間限定チューリングマシンで解くことができる。このような、(難しい)問題を1ステップで解くことができる機械を**オラクル(神託)**という。例えば、全てのNPの問題を1ステップで解くようなオラクルが存在するとすると、NPの問題は全て多項式時間で解くことができる。

7

### クラスNP完全(困難)の意義

クラスNP中には、歴代の優秀な研究者(数学者、計算機科学者等)が長い年月を掛けても解決できなかった難問も多数含まれている。これらの問題が容易に解決できるようになるとは思われぬ。(もちろんこれは証明されている訳ではない。)よって、NP完全であることが証明できれば、多項式時間で厳密解を求めることが非常に困難であることがわかる。

このことは、NP完全な問題では、すべてのインスタンスに対しては、厳密解を高速に求めることはあきらめて、何らかの妥協が必要になる。

妥協例:

- 問題のインスタンスを限定する。
- インスタンス毎にインスタンス固有の性質を用いる。
- 厳密解をあきらめて近似解を求める。

8

### 9.2 SATのNP完全性

9.1では、もしNP完全な問題が存在するときに成り立つべき状況を示した。ここでは、実際にNP完全問題が存在することを示す。

問題XがNP完全であることを証明するには、NPのすべての問題YをXに多項式時間帰着しなければならない。問題Yは無数に存在するので、一見この証明は困難なように思える。しかし、次のような方針で問題XがNP完全であることが示せる。

NP完全性の証明のアイデア:  
問題Xによって、非決定性多項式時間TMの動作をシミュレートできることを示す。

9

### SATのNP完全性の証明

SATはNP完全である。

証明

SATがNPに含まれることは既に示した。よって、SATがNP困難であることを示せばよい。すなわち、以下ではNPの任意の問題YがSATに多項式時間帰着できることを示す。

問題YはNPに含まれるので、問題Yを判定するNTM Nが存在する。以下では、Nをシミュレートする論理式Fを構成する。

10

問題Yを解くNTM Nを以下のように定める。

$$N = (\{q_0, q_1, \dots, q_k\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_k\})$$

また、このNは問題Yを多項式  $T(n)$  時間で判定できるものとする。

まず、このNの動作を考察する。  
Nで用いられるテープは1本であるとしてよい。  
(テープの本数は多項式時間の範囲では影響がない。)  
また、テープの長さを  $T(n)$  としてよい。  
(それ以上のテープを用いれば、移動だけで  $T(n)$  時間を超えてしまう。)

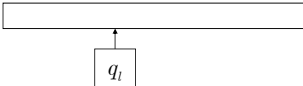
11

12

これらの様相の変化を論理式Fで表現すればよい。  
 まず、Fで用いる変数を示す。

変数:  
 V1: 時刻  $t, (1 \leq t \leq T(n))$  に状態が  $q_l, (0 \leq l \leq k)$  であるときに真それ以外に偽である変数  $p_i$  の集合。  
 すなわち、

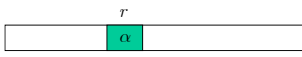
$$V1 = \left\{ \begin{array}{cccc} p_{11}, & p_{12}, & \dots & p_{1k}, \\ p_{21}, & & & \\ \vdots & & & \\ p_{T(n)1}, & & & p_{T(n)k} \end{array} \right\}$$

時刻t: 

13

V2: 時刻  $t, (1 \leq t \leq T(n))$  にテープ位置  $r, (1 \leq r \leq T(n))$  の文字が  $\alpha \in \{0, 1, B\}$  であるときに真それ以外に偽である変数  $x$  の集合。しかも、この変数が真の時には対応するセルにヘッドがないものとする。すなわち、

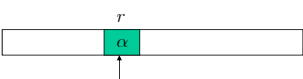
$$V2 = \left\{ \begin{array}{l} x_{110}, x_{120}, \dots, x_{1T(n)0}, x_{111}, x_{121}, \dots, x_{1T(n)1}, x_{11B}, x_{12B}, \dots, x_{1T(n)B}, \\ x_{210}, x_{220}, \dots, x_{2T(n)0}, x_{211}, x_{221}, \dots, x_{2T(n)1}, x_{21B}, x_{22B}, \dots, x_{2T(n)B}, \\ \dots \\ x_{T(n)10}, \dots, x_{T(n)T(n)0}, x_{T(n)21}, \dots, x_{T(n)T(n)1}, x_{T(n)1B}, \dots, x_{T(n)T(n)B} \end{array} \right\}$$

時刻: 

14

V3: 時刻  $t, (1 \leq t \leq T(n))$  にテープ位置  $r, (1 \leq r \leq T(n))$  の文字が  $\alpha \in \{0, 1, B\}$  であるときに真それ以外に偽である変数  $x$  の集合。しかも、この変数が真の時には対応するセルにヘッドがあるものとする。すなわち、V2の変数がヘッドが無いときに真になるのに対して、ヘッドがあるときに真となる変数である。

$$V3 = \left\{ \begin{array}{l} x^1_{110}, \dots, x^1_{1T(n)0}, x^1_{111}, \dots, x^1_{1T(n)1}, x^1_{11B}, \dots, x^1_{1T(n)B}, \\ \dots \\ x^1_{T(n)10}, \dots, x^1_{T(n)T(n)0}, x^1_{T(n)21}, \dots, x^1_{T(n)T(n)1}, x^1_{T(n)1B}, \dots, x^1_{T(n)T(n)B} \end{array} \right\}$$

時刻t: 

15

以下では、これらの変数を組み合わせて、Nをシミュレートできるように節を構成していく。

(1) 先ず、F=1となる割り当てで、時刻tとセル位置rを特定すれば文字が一意に定まるように節を構成する。

$$C1 = (x_{110} + x_{111} + x_{11B} + x^1_{110} + x^1_{111} + x^1_{11B}) \cdot (x_{110} + x_{111}) \cdot (x_{110} + x_{11B}) \cdot (x_{110} + x^1_{110}) \cdot \dots$$

時刻1、セル1に文字があることを示す。  
 時刻1、セル1に文字が1文字しかないことを示す。

ここでは、時刻1に対するセル1の部分しか示していないが、これを全時刻、全セルに対して論理積で結合することができる。T1はそうにして構成できる。(なお、このT1により様相が一意に定まることに注意する。)

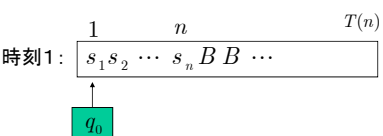
16

(2) 次に、初期様相を示す節を構成する。

入カインスタンスを、  
 $x = s_1 s_2 \dots s_n (s_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n)$   
 と仮定する。

$$C2 = (x_{11s_1}) \cdot (x_{12s_2}) \cdot \dots \cdot (x_{1ns_n}) \cdot (x_{1(n+1)B}) \cdot p_{10}$$

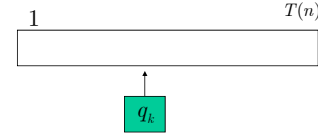
C2は、初期様相が以下の状態の時真、それ以外のとき偽となる。

時刻1: 

17

(3) 次に、受理様相のみを判定する節を構成する。

$$C3 = p_{T(n)k}$$

時刻  $T(n)$ : 

時刻  $T(n)$  に受理状態であればいい。もし、 $T(n)$  以前の時刻に受理状態  $q_k$  になっても、 $T(n)$  に受理状態のままできるように  $N$  を容易に変更できる。

18

これ以降の項は、Nの状態遷移関数による遷移を適切にシミュレートするための節である。

(4) 計算バスの遷移が時刻  $t$  から時刻  $t+1$  に正しく変化していることを保証する節を構成する。  
まず、ヘッドが影響を与えない部分を考察する。

$$C4 = (\overline{x_{tr\alpha}} + \overline{x_{t(r+1)\beta}} + \overline{x_{t(r+2)\gamma}} + x_{(t+1)(r+1)\beta}) \cdots$$

ここで、 $t$  は  $1 \leq t \leq T(n)$  の全ての時刻、  
 $r$  は  $1 \leq r \leq T(n)$  の全てのセル、  
 $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, B\}$  は全てのテープ記号の組み合わせを持つものとする。

時刻  $t$ :  $\begin{matrix} r & r+1 & r+2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$   
 $\downarrow q_t$   
 時刻  $t+1$ :  $\begin{matrix} r & r+1 & r+2 \\ & \beta & \end{matrix}$

19

(5) ヘッドが存在する場合に、決定的に遷移する部分をシミュレートするように節を構成する。

時刻  $t$ :  $\begin{matrix} r & r+1 & r+2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$   $\rightarrow$  時刻  $t+1$ :  $\begin{matrix} r & r+1 & r+2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$   
 $\uparrow q_t$   $\uparrow q_t$

$$C5 = (\overline{x_{tr\alpha}} + \overline{x_{t(r+1)\beta}} + \overline{x_{t(r+2)\gamma}} + \overline{p_{tl}} + p_{(t+1)l'}) \cdot$$

$$(\overline{x_{tr\alpha}} + \overline{x_{t(r+1)\beta}} + \overline{x_{t(r+2)\gamma}} + \overline{p_{tl}} + x'_{(t+1)j\alpha}) \cdot$$

$$(\overline{x_{tr\alpha}} + \overline{x_{t(r+1)\beta}} + \overline{x_{t(r+2)\gamma}} + \overline{p_{tl}} + x_{(t+1)(r+1)\beta'}) \cdot$$

$$(\overline{x_{tr\alpha}} + \overline{x_{t(r+1)\beta}} + \overline{x_{t(r+2)\gamma}} + \overline{p_{tl}} + x_{(t+1)(r+2)\gamma}) \cdot$$

...

このような4つの節を全ての遷移の可能性に対して、組み合わせて論理積で結ぶ。

20

(6) 最後に、非決定性の部分をシミュレートする節を構成する。

時刻  $t$ :  $\begin{matrix} r & r+1 & r+2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$   
 $\uparrow q_t$   
 非決定的遷移  
 時刻  $t+1$ :  $\begin{matrix} r & r+1 & r+2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$     $\begin{matrix} r & r+1 & r+2 \\ & \beta & \end{matrix}$     $\begin{matrix} r & r+1 & r+2 \\ & & \end{matrix}$   
 $\uparrow q_t$     $\uparrow q_t$     $\uparrow q_t$

この部分にだけ新たな変数を用いる。  
非決定的な選択を表す変数を集合を  $V3$  とする。  
すなわち、  
 $V3 = \{c_{1,1}^1, c_{1,2}^1, \dots, c_{1,u}^1, \dots, c_{1,1}^{\delta}, c_{1,2}^{\delta}, \dots, c_{u,1}^{\delta}, c_{u,2}^{\delta}, \dots, c_{u,u}^{\delta}\}$   
 ここで  $u$  は選択の最大値である。

21

このとき、

非決定的選択の可能性を表す。

$$C6 = (\overline{x_{tr\alpha}} + \overline{x_{t(r+1)\beta}} + \overline{x_{t(r+2)\gamma}} + \overline{p_{tl}} + c_1 + \dots + c_u) \cdot$$

$(\overline{c_1} + \overline{c_2}) \cdot (\overline{c_1} + \overline{c_2}) \cdots$  受理様相への遷移を表す。

$$(\overline{c_1} + p_{(t+1)l}) \cdot (\overline{c_1} + x'_{(t+1)j\alpha}) \cdot (\overline{c_1} + x_{(t+1)(j+1)\beta'}) \cdot (\overline{c_1} + x_{(t+1)(j+2)\gamma}) \cdot$$

...

遷移が正しいことを表す。

と全ての可能性に対して節を構成する。

22

以上の(1)から(6)までの節を全て論理積で結ぶことによってSATのインスタンスが得られる。すなわち、

$$F = C1 \cdot C2 \cdot C3 \cdot C4 \cdot C5 \cdot C6$$

とする。  
このとき、Nが問題Xのインスタンスを受理するための必要十分条件は、構成されたFが充足可能であることがわかる。

また、F中に現れる変数の個数や節の個数は、  
の多項式であることもわかる。

以上によって、NPの任意の問題XをSATに多項式時間帰着することができる。  
よってSATはNP完全である。

QED 23

### 9-3. 多項式時間帰着によるNP完全性の証明

SATがNP完全であることを証明するためには、NTMをシミュレートする必要がある。  
しかし、一つの問題XがNP完全であることがわかると、あとはその問題Xを多項式時間帰着することによって、NP困難性が示せる。

NP完全の問題Xを問題Yに多項式時間帰着できれば、問題YはNP困難である。

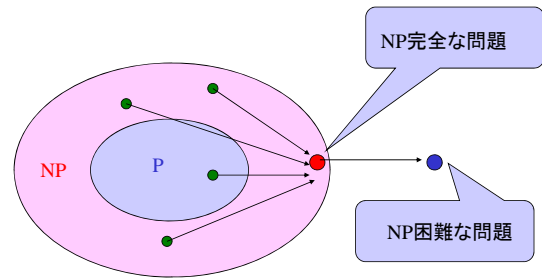
24

証明

問題XはNP完全なので、NPの問題を全てXに多項式時間帰着できる。  
 また、問題Xの全てのインスタンスは問題Yのインスタンスに多項式時間帰着(変換)できる。  
 したがって、これらの多項式時間帰着を連続して行えば、NPのすべての問題を問題Yに多項式時間帰着できる。  
 以上より、問題YはNP困難である。

QED 25

イメージ



26

同様に次のような命題も成り立つ。

NP困難の問題Xを問題Yに多項式時間帰着できれば、問題YはNP困難である。

問題XがNP困難かつNPに属するならば、問題XはNP完全である。

ここでは、3SATを多項式時間帰着によって、NP完全であることを示す。

27

3SATのNP完全性

3SATはNP完全である。

証明

まず、3SATは明らかにNPに属する。  
 (変数毎に非決定的に割り当てを決定すればよい。)  
 よって、以下ではSATを3SATへ多項式時間帰着することによって3SATがNP困難であることを示す。  
 SATのインスタンスをFとし、3SATのインスタンスをGとする。  
 Fにはいろいろなサイズの節を含むが、Gにはサイズが3の節しか含まない。  
 よって、一見すると、Gの方が制限されていてFを記述できないようにも思える。

28

しかし、節のサイズを次のように常に3にすることができる。

(1) Fのサイズが2以下の節:  
 リテラルを3つにコピーする。

$$F = \dots (l_1) \dots$$



$$G = \dots (l_1 + l_1 + l_1) \dots$$

(2) Fのサイズが3の節:  
 節をそのまま採用する。

$$F = \dots (l_1 + l_2 + l_3) \dots$$



$$G = \dots (l_1 + l_2 + l_3) \dots$$

29

(3) Fのサイズが4以上の節:

新たな変数  $v_i$  を用いることによって、サイズを小さくすることができる。

$$F = \dots (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5) \dots$$



$$F' = \dots (l_1 + l_2 + v_1) \cdot (\bar{v}_1 + l_3 + l_4 + l_5) \dots$$



$$G = \dots (l_1 + l_2 + v_1) \cdot (\bar{v}_1 + l_3 + v_2) \cdot (\bar{v}_2 + l_4 + l_5) \dots$$

これは、Fが充足可能であるための必要十分条件は、Gが充足可能であることがわかる。  
 またこの帰着は明らかに多項式時間でおこなえる。  
 以上より3SATはNP完全である。

QED 30

また、前回の結果と合わせて次ぎの命題も成り立つ。

$k$  クリーク問題はNP完全である。

証明

$k$  クリーク問題はNPに属する。  
(各点に対して、最大クリークに属するかどうかを  
非決定的に決定するだけでよい。)

また、3SATを  $k$  クリーク問題に多項式時間  
帰着することができる。

以上より  $k$  クリーク問題はNP完全である。

*QED*<sup>31</sup>